LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

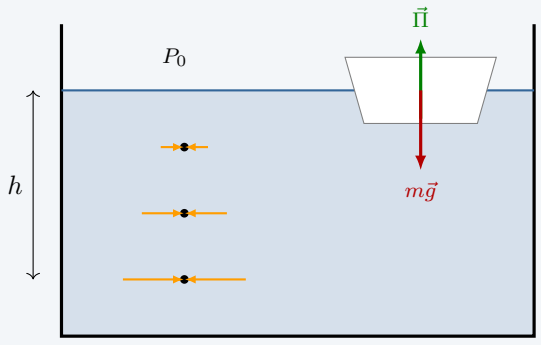
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

T2

THERMODYNAMIQUE

Statique des fluides dans un référentiel galiléen

Forces de pression — Relation fondamentale de la statique — Fluide incompressible — Atmosphère isotherme — Poussée d'Archimède



$$P = P_0 + \rho g h$$

« *L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature ; mais c'est un roseau pensant.*

— Blaise Pascal, *Pensées* (1670)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Statique des fluides »

T2 — Statique des fluides

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Distinguer forces volumiques et forces surfaciques ; exprimer la force de pression sur un élément de surface.
- Établir l'équivalent volumique des forces de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$.
- Établir la relation fondamentale de la statique des fluides sur une tranche élémentaire et l'intégrer.
- Exploiter la loi de l'hydrostatique $P = P_0 + \rho g h$: vases communicants, manomètres, baromètre, théorème de Pascal.
- Établir le profil de pression d'une atmosphère isotherme et l'interpréter avec le facteur de Boltzmann.
- Calculer la résultante des forces de pression sur une paroi et la position de son point d'application.
- Utiliser la poussée d'Archimède pour étudier l'équilibre d'un corps immergé ou flottant.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Statique des fluides » permet de faire varier la profondeur, la masse volumique du liquide et celle d'un objet immergé, et d'observer pression, poussée d'Archimède et flottaison.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Forces exercées sur un fluide . . . 3
I.1 Particule de fluide . . . 3
I.2 Forces volumiques et forces surfaciques . . . 3
I.3 Équivalent volumique des forces de pression . . . 4
II Relation fondamentale de la statique des fluides . . . 4
II.1 Forme locale . . . 5
III Fluide incompressible et homogène . . . 6
III.1 Loi de l'hydrostatique . . . 6
III.2 Applications . . . 6
IV Fluide compressible : l'atmosphère isotherme . . . 8
IV.1 Profil de pression . . . 8
IV.2 Facteur de Boltzmann . . . 10
V Résultante des forces de pression sur une paroi . . . 11
VI Poussée d'Archimède . . . 12
VII Synthèse . . . 14
VIII Exercices d'approfondissement . . . 14
IX Classiques des concours . . . 16

I Forces exercées sur un fluide

I.1 Particule de fluide

Un fluide (liquide ou gaz) est un milieu déformable dont les éléments peuvent glisser les uns sur les autres. On le décrit à l'échelle **mésoscopique** (chapitre T1) : une **particule de fluide** est un volume $\mathrm{d}\tau$ petit devant les dimensions macroscopiques mais contenant un très grand nombre de molécules, de masse $\mathrm{d}m = \rho(M)\,\mathrm{d}\tau$. Dans tout ce chapitre, le fluide est **au repos** dans un référentiel galiléen (référentiel terrestre).

I.2 Forces volumiques et forces surfaciques

Un système étendu peut subir des forces localisées en un point (tension d'un fil, réaction d'un appui ponctuel), mais aussi des forces **réparties**, en surface ou en volume, que l'on décrit par des densités.

Définition — Forces volumiques et surfaciques

- Une force **volumique** s'exerce sur chaque élément de volume, proportionnellement à celui-ci : $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{f}_v\,\mathrm{d}\tau$ où $\vec{f}_v$ est une densité volumique de force (en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3}$). Exemple : le poids, $\vec{f}_v = \rho\,\vec{g}$.
- Une force **surfacique** s'exerce sur un élément de surface $\mathrm{d}S$, proportionnellement à son aire. C'est le cas des forces de pression : la force exercée par un fluide au repos sur un élément de surface $\mathrm{d}S$ (paroi ou fluide voisin) est

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = P(M)\,\mathrm{d}S\,\vec{n}}$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire orientée **du fluide vers la surface**. La densité surfacique de force vaut $\vec{f}_s = \dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S} = P\,\vec{n}$ (en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}$, c'est-à-dire en pascals).

Remarque

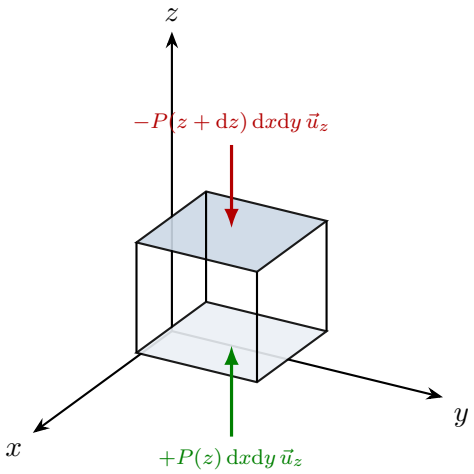
Dans un fluide au repos, la force surfacique est **normale** à la surface : un fluide au repos ne peut pas exercer de force tangentielle (sinon il se mettrait en mouvement ; les forces tangentielles de viscosité n'apparaissent qu'en écoulement). La pression $P(M)$ est un **champ scalaire** : en un point donné, elle ne dépend pas de l'orientation de la surface (principe de Pascal local). L'origine microscopique de la pression a été étudiée au chapitre T1.

Ordres de grandeur

$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$; $P_{\mathrm{atm}} \approx 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ au niveau de la mer. Sur une surface de $1\,\mathrm{m}^2$, la pression atmosphérique exerce une force de $10^5\,\mathrm{N}$, soit le poids d'une masse de 10 tonnes ! On ne la ressent pas car elle s'exerce des deux côtés des parois.

I.3 Équivalent volumique des forces de pression

Considérons une particule de fluide parallélépipédique de côtés $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, entourée de fluide.



Équivalent volumique des forces de pression R D

La résultante des forces de pression exercées sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ est

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u}_z$$

Démonstration. La face inférieure (altitude z) reçoit $P(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\vec{u}_z$, la face supérieure $-P(x,y,z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\vec{u}_z$. Leur somme vaut

$$\mathrm{d}F_z = \big[P(z) - P(z+\mathrm{d}z)\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

On procède de même selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$; on obtient $\mathrm{d}\vec{F}_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u}_z\right)\mathrm{d}\tau$. □

Remarque

Seules les **variations** de pression créent une force résultante : un champ de pression uniforme exerce une résultante nulle sur tout volume fermé. Le gradient est dirigé vers les pressions croissantes ; la force de pression pousse donc la particule vers les basses pressions. Le gradient s'exprime dans les autres systèmes de coordonnées (chapitre M1) :

$$\text{cylindriques : } \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \frac{\partial P}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\text{sphériques : } \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \frac{\partial P}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi.$$

II Relation fondamentale de la statique des fluides

II.1 Forme locale

Relation fondamentale de la statique des fluides (RFSF) R D

Pour un fluide au repos dans un référentiel galiléen, soumis à la seule pesanteur :

$$\vec{0} = \rho\,\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

Avec un axe (Oz) **vertical ascendant** ($\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$) : $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ et

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g$$

Démonstration sur une tranche élémentaire. Considérons la tranche de fluide de section S comprise entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$. Elle est au repos dans un référentiel galiléen, donc la somme des forces qu'elle subit est nulle :

- son poids $-\rho\,S\,\mathrm{d}z\,g\,\vec{u}_z$;
- les forces de pression sur ses faces horizontales $P(z)S\,\vec{u}_z - P(z+\mathrm{d}z)S\,\vec{u}_z = -\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\,S\,\vec{u}_z$;
- les forces de pression latérales, qui se compensent deux à deux (la pression ne dépend pas de x et y, ce que l'on montre de même avec des tranches verticales).

En projection sur $\vec{u}_z$: $-\rho g S\mathrm{d}z - \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}S\mathrm{d}z = 0$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$. □

Conséquences R

- La pression ne dépend que de l'altitude : les surfaces **isobares** sont des plans horizontaux.
- La pression **diminue** quand on monte et **augmente** quand on descend.
- La surface libre d'un liquide au repos (isobare $P = P_0$) est un plan horizontal.
- Ces résultats ne valent que dans un même fluide **continu** : deux points à la même altitude séparés par une paroi ou un autre fluide n'ont pas nécessairement la même pression.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Le signe de $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ dépend de l'orientation de l'axe. Avec un axe (Oz) **descendant**, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\rho g$. Toujours préciser l'orientation sur un schéma.
- La relation $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$ est valable pour tout fluide, même compressible ; ρ peut alors dépendre de z : on ne peut intégrer qu'après avoir exprimé ρ en fonction de P et z.

Remarque

Généralisation. Si la particule de fluide subit d'autres forces volumiques $\vec{f}_{\text{autre}}$, la RFSF devient $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g} + \vec{f}_{\text{autre}}$: par exemple $\rho_e\vec{E}$ pour un fluide chargé dans un champ électrique, ou les forces d'inertie volumiques dans un référentiel non galiléen (exercice du récipient tournant). Par ailleurs, g dépend en toute rigueur de l'altitude, $g(z) = g_0\,R_T^2/(R_T+z)^2$; on le suppose uniforme tant que $z \ll R_T = 6400\,\text{km}$.

III Fluide incompressible et homogène

III.1 Loi de l'hydrostatique

Loi de l'hydrostatique R

Pour un fluide **incompressible et homogène** (ρ uniforme et constant) :

$$P(z) = P(z_0) - \rho g\,(z - z_0).$$

Avec la profondeur h comptée vers le bas depuis la surface libre où règne P_0 :

$$\boxed{P = P_0 + \rho\, g\, h}$$

La différence $P - P_0 = \rho g h$ est appelée **pression effective** (ou relative) : c'est elle qu'indiquent la plupart des manomètres (pneus, plongée).

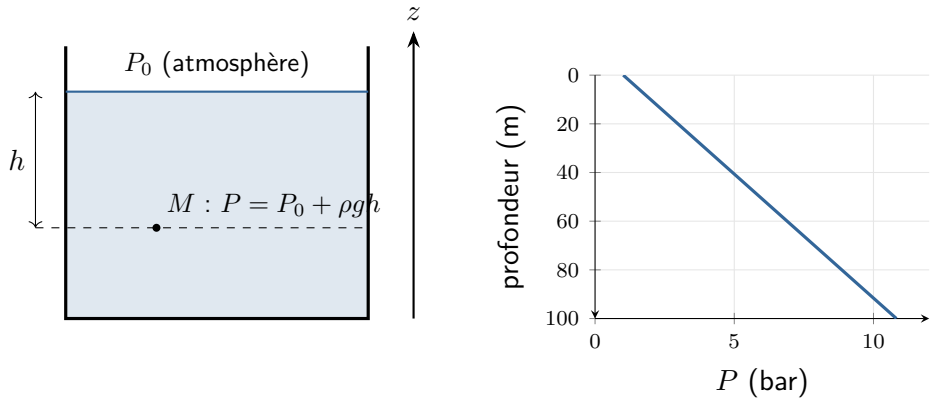


Fig. 1 : Pression dans l'eau en fonction de la profondeur : elle augmente de $1\,\mathrm{bar}$ tous les $10\,\mathrm{m}$ environ.

Ordres de grandeur

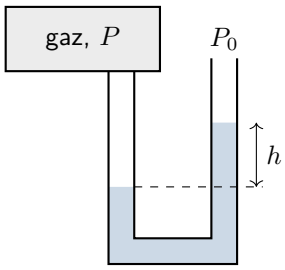
- Eau ($\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) : $\rho g \approx 10^4\,\mathrm{Pa\cdot m^{-1}}$, soit $1\,\mathrm{bar}$ tous les $10\,\mathrm{m}$. Au fond de la fosse des Mariannes ($\approx 11\,\mathrm{km}$), $P \approx 1100\,\mathrm{bar}$.
- Air ($\rho \approx 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) : $\rho g \approx 12\,\mathrm{Pa\cdot m^{-1}}$. Sur $1\,\mathrm{m}$, $\Delta P/P \sim 10^{-4}$: en thermodynamique, on considère la pression d'un gaz **uniforme** dans un récipient de laboratoire.

III.2 Applications

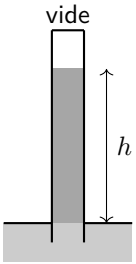
Conséquences de la loi de l'hydrostatique

- **Vases communicants** : un liquide homogène au repos, soumis à la même pression P_0 sur ses surfaces libres, présente le même niveau dans des récipients qui communiquent.
- **Manomètre à liquide** (tube en U) : la dénivellation h mesure la différence de pression $P - P_0 = \rho g h$.
- **Baromètre de Torricelli** : un tube rempli de mercure retourné sur une cuve ; au sommet règne un quasi-vide, d'où $P_0 = \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, h$; $h = 760\,\mathrm{mm}$ pour $P_0 = 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$.
- **Théorème de Pascal** : une variation de pression imposée en un point d'un liquide incompressible au repos est intégralement transmise en tout point du liquide. Application : la presse hydraulique,

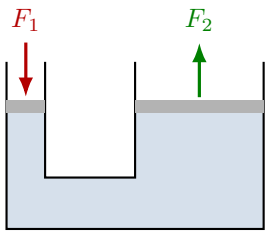
$F_2 = F_1\, S_2/S_1$.



manomètre : $P - P_0 = \rho g h$



Torricelli : $P_0 = \rho_{\mathrm{Hg}} g h$



presse : $F_2 = F_1 S_2/S_1$

☞ Méthode — Résoudre un problème de fluides superposés M

1. Faire un schéma en repérant les surfaces libres et les interfaces entre fluides.
2. Dans un même fluide **continu** au repos, deux points de même altitude ont la même pression : choisir comme référence le plan horizontal de l'interface la plus basse, sous lequel on ne trouve qu'un seul fluide.
3. Exprimer la pression dans ce plan en remontant chaque branche jusqu'à une surface libre : $P = P_0 + \sum_i \rho_i g h_i$.
4. Égaler les expressions obtenues et résoudre.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Pressions hydrostatiques ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer la pression absolue à $10\,\mathrm{m}$ puis $100\,\mathrm{m}$ sous la surface d'un lac ($P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$).

Q-2) Quelle serait la hauteur d'un baromètre à eau ? Pourquoi Torricelli a-t-il choisi le mercure ($\rho = 13{,}6 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) ?

Q-3) Calculer la différence de pression sanguine entre les pieds et la tête d'une personne debout de $1{,}8\,\mathrm{m}$ ($\rho_{\text{sang}} = 1050\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$). L'exprimer en mmHg.

Correction

Q-1) $P = P_0 + \rho g h = 1{,}0 \times 10^5 + 1000 \times 9{,}81 \times 10 = 1{,}98\,\mathrm{bar}$; à $100\,\mathrm{m}$: $10{,}8\,\mathrm{bar}$.

Q-2) $h = P_0/(\rho g) = 1{,}013 \times 10^5/(1000 \times 9{,}81) = 10{,}3\,\mathrm{m}$: instrument peu pratique ! Avec le mercure, 13,6 fois plus dense, $h = 0{,}76\,\mathrm{m}$.

Q-3) $\Delta P = \rho g H = 1050 \times 9{,}81 \times 1{,}8 = 1{,}9 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$. Comme $760\,\mathrm{mmHg}$ correspondent à $1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\Delta P \approx 140\,\mathrm{mmHg}$: c'est du même ordre que la pression artérielle ($120\,\mathrm{mmHg}$), d'où le rôle des valvules veineuses et les malaises lors d'un lever brutal.

EXERCICE 2 Mesurer la masse volumique d'une huile ✦✧✧✧✧

Un tube en U contient de l'eau ($\rho_e = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$). On verse de l'huile dans la branche de droite. À l'équilibre, la colonne d'huile mesure $h_1 = 12{,}0\,\mathrm{cm}$ au-dessus de l'interface eau–huile, et la surface libre de l'eau, dans la branche de gauche, est à $h_2 = 10{,}2\,\mathrm{cm}$ au-dessus du niveau de cette interface.

Q-1) Justifier que la pression est la même dans les deux branches au niveau de l'interface. En déduire la masse volumique ρ_h de l'huile.

Q-2) Quelle est la dénivellation entre les deux surfaces libres ?

Correction

Q-1) Sous l'interface, les deux branches sont reliées par de l'eau continue : le plan horizontal de l'interface est isobare. $P_0 + \rho_e g h_2 = P_0 + \rho_h g h_1$, d'où $\rho_h = \rho_e \dfrac{h_2}{h_1} = 850\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Q-2) $h_1 - h_2 = 1{,}8\,\mathrm{cm}$, la surface de l'huile étant la plus haute (fluide moins dense).

EXERCICE 3 Tube en U à trois liquides ✦✦✧✧✧

Un tube en U contient de l'eau ($\rho_e = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$). On verse dans la branche gauche une hauteur $h_1 = 10\,\mathrm{cm}$ d'huile ($\rho_1 = 800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), puis dans la branche droite une hauteur h_2 de pétrole ($\rho_2 = 700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), de sorte que les deux surfaces libres soient au même niveau.

Q-1) Quelle interface (eau–huile ou eau–pétrole) est la plus basse ? Écrire l'égalité des pressions dans le plan horizontal de cette interface.

Q-2) En déduire h_2 et la dénivellation Δ entre les deux interfaces.

Correction

Q-1) L'huile, plus dense que le pétrole, exerce davantage de pression pour une même hauteur : l'interface eau–huile est la plus basse. Dans son plan, la branche gauche donne $P_0 + \rho_1 g h_1$; la branche droite donne $P_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_e g \Delta$ (Δ d'eau puis h_2 de pétrole).

Q-2) Surfaces libres au même niveau : $h_1 = h_2 + \Delta$. En reportant : $\rho_1 h_1 = \rho_2 (h_1 - \Delta) + \rho_e \Delta$, d'où $\Delta = \dfrac{(\rho_1 - \rho_2) h_1}{\rho_e - \rho_2} = 3{,}3\,\mathrm{cm}$ et $h_2 = 6{,}7\,\mathrm{cm}$.

IV Fluide compressible : l'atmosphère isotherme

IV.1 Profil de pression

On modélise l'atmosphère par un gaz parfait de masse molaire M, à température uniforme T, dans un champ de pesanteur uniforme. La masse volumique dépend de la pression (chapitre T1) : $\rho = \dfrac{PM}{RT}$.

Atmosphère isotherme R D

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \qquad \text{avec} \qquad H = \frac{RT}{Mg}$$

H est la **hauteur caractéristique** (ou hauteur d'échelle) de l'atmosphère.

Démonstration. La RFSF s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\dfrac{Mg}{RT} P$. C'est une équation différentielle linéaire du premier

ordre à coefficients constants, de solution $P(z) = P(0)\,\mathrm{e}^{-z/H}$ avec $H = RT/(Mg)$. □

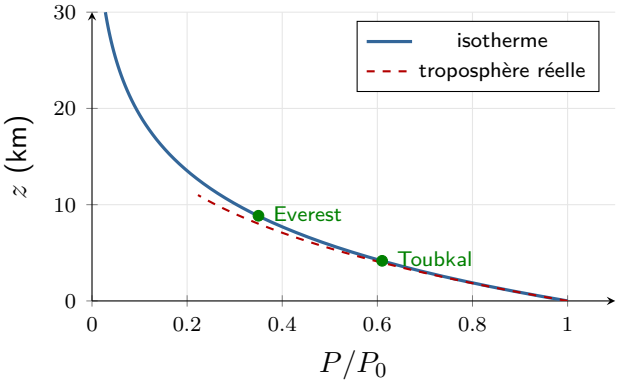


Fig. 2 : Pression en fonction de l'altitude dans le modèle isotherme ($H = 8{,}4\,\mathrm{km}$) et dans le modèle à gradient de température (exercice de concours).

Ordres de grandeur

Pour l'air ($M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$) à $T = 288\,\mathrm{K}$: $H \approx 8{,}4\,\mathrm{km}$. Au sommet du Toubkal ($4167\,\mathrm{m}$) : $P \approx 0{,}61\,P_0$; au sommet de l'Everest ($8849\,\mathrm{m}$) : $P \approx 0{,}35\,P_0$; à l'altitude de croisière des avions ($11\,\mathrm{km}$) : $P \approx 0{,}27\,P_0$. La variation de pression est donc négligeable sur quelques mètres ($z \ll H$), mais pas sur quelques kilomètres.

Remarque

L'atmosphère réelle. L'air sec contient en moles $78{,}1\,\%$ de diazote, $20{,}9\,\%$ de dioxygène et $0{,}9\,\%$ d'argon. On découpe l'atmosphère en couches selon le sens de variation de la température : **troposphère** (jusqu'à 11 km environ, T décroît d'environ $6{,}5\,\mathrm{K\cdot km^{-1}}$), **stratosphère** ($T$ croît à cause de l'absorption des UV par l'ozone), puis mésosphère, thermosphère et exosphère. Le modèle isotherme ne décrit donc qu'approximativement chaque couche.

☞ Méthode — Résoudre numériquement l'équation de la statique M

Pour un profil de température $T(z)$ quelconque, $\dfrac{\mathrm{d}P}{P} = -\dfrac{Mg}{RT(z)}\mathrm{d}z$ s'intègre numériquement. Exemple en Python (méthode d'Euler explicite) :

```
import numpy as np
M, g, R, P0 = 29e-3, 9.81, 8.314, 1.013e5
T = lambda z: 288 - 6.5e-3*z          # troposphère (K)
z = np.linspace(0, 11e3, 1101); dz = z[1] - z[0]
P = np.zeros_like(z); P[0] = P0
for i in range(len(z) - 1):
    P[i+1] = P[i] - M*g*P[i]/(R*T(z[i]))*dz
print(P[-1]/P0)                        # environ 0.22
```

On compare ensuite le résultat à la solution analytique (exercice de concours) et au modèle isotherme.

IV.2 Facteur de Boltzmann

La densité particulaire est proportionnelle à la pression ($P = n^* k_B T$), d'où, avec $m = M/N_A$ la masse d'une molécule :

$$n^*(z) = n^*(0)\,\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right).$$

On reconnaît le rapport entre l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = mgz$ d'une molécule et l'énergie d'agitation thermique $k_B T$. Plus la température est élevée, plus l'agitation thermique permet aux molécules d'atteindre des altitudes élevées :

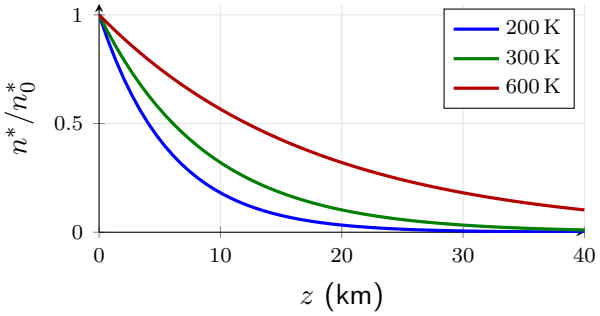


Fig. 3 : Densité particulaire de l'air en fonction de l'altitude (modèle isotherme) pour trois températures : $H = RT/(Mg)$ est proportionnelle à T.

Facteur de Boltzmann (admis)

Pour un système de particules indépendantes en équilibre à la température T, la probabilité qu'une particule occupe un état d'énergie E est proportionnelle au **facteur de Boltzmann** :

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Les états d'énergie $E \gg k_B T$ sont très peu peuplés ; ceux d'énergie $E \lesssim k_B T$ sont accessibles par agitation thermique.

Ordres de grandeur

$k_B T \approx 4{,}1 \times 10^{-21}\,\mathrm{J} \approx 25\,\mathrm{meV}$ à $300\,\mathrm{K}$. La hauteur $H = k_B T/(mg)$ est celle pour laquelle l'énergie potentielle d'une molécule égale $k_B T$: elle vaut $8\,\mathrm{km}$ pour l'air mais quelques micromètres pour des particules colloïdales de $1\,\mu\mathrm{m}$ (expérience de Jean Perrin, 1908, qui permit de mesurer N_A).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 — **Atmosphère isotherme** ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer H pour l'air à $288\,\mathrm{K}$, puis la pression au sommet de l'Everest dans ce modèle.

Q-2) À quelle altitude la pression est-elle divisée par deux ?

Q-3) Justifier que la pression d'un gaz contenu dans un récipient de hauteur $1\,\mathrm{m}$ peut être considérée comme uniforme.

Correction

Q-1) $H = \dfrac{8{,}314 \times 288}{29 \times 10^{-3} \times 9{,}81} = 8{,}4\,\mathrm{km}$; $P = P_0\,\mathrm{e}^{-8{,}849/8{,}4} = 0{,}35\,\mathrm{bar}$ (valeur réelle : $0{,}33\,\mathrm{bar}$).

Q-2) $z_{1/2} = H \ln 2 = 5{,}8\,\mathrm{km}$.

Q-3) $\Delta P/P \approx z/H = 1/8400 \approx 1{,}2 \times 10^{-4}$: variation négligeable. Il faut s'élever de $0{,}01\,H \approx 85\,\mathrm{m}$ pour que la pression baisse de $1\,\%$.

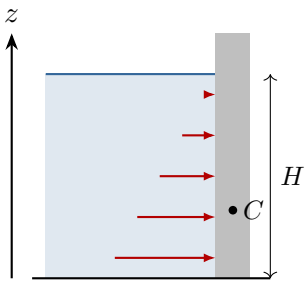
V Résultante des forces de pression sur une paroi

☞ Méthode — Calculer une force pressante M

1. Choisir un repère et découper la paroi en éléments $\mathrm{d}S$ sur lesquels la pression est uniforme (bandes horizontales pour une paroi plane verticale).
2. Exprimer $\mathrm{d}\vec{F} = P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$, en ne gardant que la **surpression** lorsque P_0 s'exerce des deux côtés.
3. Intégrer : $\vec{F} = \iint P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$. Pour une paroi courbe, projeter avant d'intégrer et utiliser les symétries.
4. Le point d'application C (centre de poussée) s'obtient en écrivant que le moment de $\vec{F}$ appliquée en C est égal à la somme des moments élémentaires.

Exemple : barrage vertical. Un barrage plan vertical de largeur L retient une hauteur d'eau H. La pression atmosphérique s'exerce des deux côtés et se compense ; sur la bande comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$ (origine au fond), la surpression vaut $\rho g(H - z)$ et

$$F = \int_0^H \rho g(H - z)\,L\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\rho\,g\,L\,H^2.$$



Le moment par rapport à l'arête inférieure vaut $\mathcal{M} = \int_0^H \rho g(H - z)L\,z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\rho g L H^3$: le centre de poussée est à la hauteur $z_C = \mathcal{M}/F = H/3$ au-dessus du fond. La force croît comme H^2 et son moment de renversement comme H^3 : les barrages-poids sont beaucoup plus épais à la base.

Remarque

Paradoxe hydrostatique. La force pressante exercée par un liquide sur le fond horizontal d'un récipient vaut $\rho g h S$ (en plus de $P_0 S$) : elle ne dépend que de la hauteur de liquide et de l'aire du fond, pas de la forme du récipient. Pour un récipient évasé, elle est inférieure au poids du liquide ; pour un récipient qui se resserre vers le haut, elle lui est supérieure, les parois latérales inclinées compensant la différence.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Force sur un hublot ✦✦✧✧✧

Un sous-marin possède un hublot circulaire vertical de rayon $a = 20\,\text{cm}$ dont le centre est à la profondeur $h = 300\,\text{m}$. L'intérieur est à la pression P_0.

Q-1) Montrer que la résultante des forces de pression vaut $F = \rho g h\,\pi a^2$ (on pourra utiliser la symétrie du disque).

Q-2) Faire l'application numérique et commenter.

Correction

Q-1) La surpression à la cote y (comptée vers le haut depuis le centre) est $\rho g(h-y)$: $F = \iint \rho g(h-y)\,\mathrm{d}S = \rho g h\,\pi a^2 - \rho g \iint y\,\mathrm{d}S$. Le second terme est nul par symétrie du disque par rapport à son diamètre horizontal. On retrouve la surpression au centre multipliée par l'aire.

Q-2) $F = 1000 \times 9{,}81 \times 300 \times \pi \times 0{,}04 = 3{,}7 \times 10^5\,\text{N}$, soit le poids de 37 tonnes : les hublots sont épais et de petite taille.

VI Poussée d'Archimède

Théorème d'Archimède R

Tout corps immergé (totalement ou partiellement) dans un ou plusieurs fluides au repos subit de leur part une force, la **poussée d'Archimède**, opposée au poids des fluides déplacés :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}}\, V_{\text{immergé}}\, \vec{g}$$

Elle s'applique au centre de masse du fluide déplacé, appelé **centre de poussée**.

Justification. La résultante des forces de pression ne dépend que de la surface du corps et du champ de pression, imposé par le fluide environnant. Si l'on remplace par la pensée le corps par du fluide identique au fluide environnant, ce fluide est en équilibre : la résultante des forces de pression compense exactement son poids. On retrouve aussi ce résultat en intégrant $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau = -\rho\vec{g}\,\mathrm{d}\tau$ sur le volume. □

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La poussée d'Archimède n'est **pas** une force supplémentaire qui s'ajoute aux forces de pression : c'est leur résultante. On ne compte donc jamais les deux.
- ρ est la masse volumique du **fluide**, V le volume **immergé**. Pour un corps flottant à la surface de l'eau, la poussée de l'air sur la partie émergée est en général négligeable.
- Le théorème suppose le fluide au repos et le corps entièrement entouré de fluide : il ne s'applique pas à un objet posé de manière étanche au fond d'un récipient.

☞ Méthode — Étudier l'équilibre d'un flotteur M

Appliquer le principe fondamental de la statique au corps : $m\vec{g} + \vec{\Pi}(+\text{autres forces}) = \vec{0}$. Pour un corps homogène flottant librement : $\rho_{\text{corps}} V = \rho_{\text{fluide}} V_{\text{im}}$, donc $\dfrac{V_{\text{im}}}{V} = \dfrac{\rho_{\text{corps}}}{\rho_{\text{fluide}}}$. Un corps homogène flotte si $\rho_{\text{corps}} < \rho_{\text{fluide}}$.

Ordres de grandeur

Iceberg : glace $\rho_g = 917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ dans l'eau de mer $\rho_e = 1025\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$: $V_{\text{im}}/V = 0{,}89$, seuls $11\,\%$ du volume émergent. Corps humain : $\rho \approx 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ (poumons pleins), d'où une flottaison « limite ».

Remarque

Stabilité. Un corps flottant est soumis à son poids, appliqué en son centre de gravité G, et à la poussée, appliquée au centre de poussée C. L'équilibre exige que G et C soient sur la même verticale. Lors d'une légère inclinaison, C se déplace : l'équilibre est stable si le couple créé tend à redresser le flotteur. Un navire est d'autant plus stable que son centre de gravité est bas (lest).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Dynamomètre et densimètre

✦✧✧✧✧

Q-1) Un objet de masse $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ et de volume $V = 0{,}50\,\mathrm{L}$ est suspendu à un dynamomètre puis totalement immergé dans l'eau. Quelle est l'indication du dynamomètre ?

Q-2) Un densimètre est un flotteur lesté de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ terminé par une tige cylindrique de section $s = 0{,}50\,\mathrm{cm^2}$. Dans l'eau, il s'enfonce jusqu'à la graduation « 1,000 ». De combien s'enfonce-t-il en plus dans un liquide de densité $0{,}90$?

Correction

Q-1) À l'équilibre : $T + \Pi = mg$, donc $T = mg - \rho_e V g = 19{,}6 - 4{,}9 = 14{,}7\,\mathrm{N}$.

Q-2) Dans l'eau : $V_0 = m/\rho_e = 20{,}0\,\mathrm{cm^3}$; dans le liquide : $V = m/(0{,}90\rho_e) = 22{,}2\,\mathrm{cm^3}$. Le volume immergé supplémentaire, $2{,}2\,\mathrm{cm^3}$, correspond à une longueur de tige $\Delta h = 2{,}2/0{,}50 = 4{,}4\,\mathrm{cm}$.

EXERCICE 7 Bloc flottant ou coulant

✦✦✧✧✧

Un parallélépipède homogène de base carrée $a \times a$ et de hauteur h, de masse volumique ρ_s, est placé verticalement dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ.

Q-1) On suppose $\rho_s < \rho_\ell$. Calculer la hauteur immergée h_{im} à l'équilibre. Application : bois ($\rho_s = 600\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), $h = 20\,\mathrm{cm}$, eau.

Q-2) On suppose $\rho_s > \rho_\ell$. Calculer l'accélération du bloc totalement immergé, en négligeant les frottements. Application : aluminium ($\rho_s = 2700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) dans l'eau.

Correction

Q-1) Équilibre : $\rho_s a^2 h g = \rho_\ell a^2 h_{\text{im}} g$, d'où $h_{\text{im}} = \dfrac{\rho_s}{\rho_\ell} h = 12\,\mathrm{cm}$.

Q-2) Principe fondamental de la dynamique : $\rho_s V \vec{a} = (\rho_s - \rho_\ell) V \vec{g}$, d'où $\vec{a} = \left(1 - \dfrac{\rho_\ell}{\rho_s}\right)\vec{g}$, soit $a = 0{,}63\,g = 6{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ vers le bas (en réalité la traînée du liquide limite rapidement la vitesse).

EXERCICE 8 Glaçon et banquise

★★☆☆☆

Q-1) Un glaçon flotte dans un verre d'eau douce. Montrer que le niveau de l'eau ne change pas lorsqu'il fond.

Q-2) Même question dans de l'eau salée ($\rho_s = 1025\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$). Conséquence pour la fonte des banquises ?

Correction

Q-1) À l'équilibre, $m = \rho_e V_{\text{im}}$: le volume immergé $V_{\text{im}} = m/\rho_e$ est exactement le volume occupé par l'eau de fonte. Le niveau ne change pas.

Q-2) $V_{\text{im}} = m/\rho_s$ tandis que l'eau douce de fonte occupe $m/\rho_e > V_{\text{im}}$: le niveau monte très légèrement (de 2,5 % du volume immergé). La fonte de la banquise (glace de mer) contribue donc très peu à la montée des océans, contrairement à celle des glaciers continentaux et à la dilatation thermique de l'eau.

VII Synthèse

★ À retenir

- Force de pression sur $\mathrm{d}S$: $\mathrm{d}\vec{F} = P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$, normale à la surface, $\vec{n}$ orienté du fluide vers la surface.
- Équivalent volumique : $\mathrm{d}\vec{F}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$; seules les variations de pression créent une résultante.
- RFSF : $\rho\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \vec{0}$; axe ascendant : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$. Isobares horizontales dans un fluide continu.
- Fluide incompressible et homogène : $P = P_0 + \rho g h$ ($\approx 1\,\mathrm{bar}$ pour $10\,\mathrm{m}$ d'eau). Vases communicants, manomètre, Torricelli, Pascal.
- Atmosphère isotherme : $P = P_0 \mathrm{e}^{-z/H}$, $H = RT/(Mg) \approx 8\,\mathrm{km}$; facteur de Boltzmann e^{-E/k_BT}.
- Force sur une paroi : découper en éléments à pression uniforme, ne garder que la surpression ; barrage : $F = \frac{1}{2}\rho g L H^2$, appliquée à $H/3$ du fond.
- Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{im}} \vec{g}$, appliquée au centre de poussée ; c'est la résultante des forces de pression.

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 9 Vanne d'écluse inclinée

★★☆☆☆

Une vanne rectangulaire de largeur $L = 4{,}0\,\mathrm{m}$, inclinée d'un angle $\alpha = 60°$ sur l'horizontale, retient une hauteur d'eau $H = 3{,}0\,\mathrm{m}$. La pression atmosphérique s'exerce des deux côtés.

Q-1) Calculer la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur la vanne.

Q-2) Déterminer la position du centre de poussée.

Correction

Q-1) On repère un point de la vanne par la distance s le long de celle-ci depuis la surface ; il est à la profondeur $s\sin\alpha$, avec $s \in [0, H/\sin\alpha]$. $F = \displaystyle\int_0^{H/\sin\alpha} \rho g\, s \sin\alpha\, L\,\mathrm{d}s = \frac{\rho g L H^2}{2\sin\alpha} = 2{,}0\times10^5\,\mathrm{N}$, normale à la vanne.

Q-2) $s_C = \dfrac{\int s\,\mathrm{d}F}{F} = \dfrac{\int_0^\ell s^2\,\mathrm{d}s}{\int_0^\ell s\,\mathrm{d}s} = \dfrac{2}{3}\ell$ avec $\ell = H/\sin\alpha$: le centre de poussée est aux deux tiers de la longueur immergée, à la profondeur $\frac{2}{3}H = 2{,}0\,\mathrm{m}$.

EXERCICE 10 Ballon-sonde à enveloppe souple

★★☆☆☆

Un ballon-sonde de masse totale (enveloppe et nacelle) $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ contient n moles d'hélium ($M_{\mathrm{He}} = 4\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$). L'enveloppe, souple, maintient l'hélium à la pression et à la température de l'air ambiant. On utilise le modèle de l'atmosphère isotherme ($T = 273\,\mathrm{K}$, $H = 8{,}0\,\mathrm{km}$, $M_{\mathrm{air}} = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$).

Q-1) Montrer que la force ascensionnelle $F = n(M_{\mathrm{air}} - M_{\mathrm{He}})g - mg$ est indépendante de l'altitude. Calculer F pour $n = 200\,\mathrm{mol}$.

Q-2) L'enveloppe a un volume maximal $V_{\max} = 30\,\mathrm{m^3}$. À quelle altitude devient-elle tendue ? Que se passe-t-il ensuite ?

Correction

Q-1) Poussée : $\rho_{\mathrm{air}} V g = \dfrac{PM_{\mathrm{air}}}{RT}\cdot\dfrac{nRT}{P}g = nM_{\mathrm{air}}g$; poids de l'hélium : $nM_{\mathrm{He}}g$. Les deux sont indépendants de z tant que le ballon n'est pas tendu. $F = 200\times 0{,}025\times 9{,}81 - 2{,}0\times 9{,}81 = 29\,\mathrm{N}$.

Q-2) $V = nRT/P = V_{\max}$ pour $P = \dfrac{nRT}{V_{\max}} = 0{,}151\,\mathrm{bar}$, soit $z = H\ln(P_0/P) = 15\,\mathrm{km}$. Au-delà, le volume reste constant et la poussée décroît comme $\rho_{\mathrm{air}} \propto \mathrm{e}^{-z/H}$: le ballon atteint une altitude d'équilibre (à moins que l'enveloppe n'éclate).

EXERCICE 11 Récipient en rotation (référentiel non galiléen)

★★★☆☆

Un cylindre vertical contenant de l'eau tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe (Oz). Dans le référentiel tournant, l'eau est au repos ; on admet qu'il faut ajouter au poids la force d'inertie d'entraînement volumique $\rho\,\omega^2 r\,\vec{u}_r$ (voir l'étude des référentiels non galiléens).

Q-1) Écrire la RFSF projetée sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ et en déduire $P(r,z)$.

Q-2) Montrer que la surface libre est un paraboloïde de révolution. Calculer la dénivellation entre l'axe et la paroi pour $R = 10\,\mathrm{cm}$ et $\omega = 10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Correction

Q-1) $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$, d'où $P(r,z) = P_A + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g(z - z_A)$ où A est le point de la surface libre sur l'axe ($P_A = P_0$).

Q-2) Sur la surface libre $P = P_0$: $z = z_A + \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$, paraboloïde de révolution. Dénivellation : $\dfrac{\omega^2 R^2}{2g} = \dfrac{100\times 0{,}01}{2\times 9{,}81} = 5{,}1\,\mathrm{cm}$.

IX Classiques des concours

EXERCICE 12 Modèle de la troposphère

★★★☆☆

Dans la troposphère ($0 < z < 11\,\mathrm{km}$), la température décroît linéairement : $T(z) = T_0(1 - kz)$ avec $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ et $kT_0 = 6{,}5\,\mathrm{K\cdot km^{-1}}$. L'air est un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Q-1) Montrer que $P(z) = P_0(1 - kz)^\beta$ avec $\beta = \dfrac{Mg}{RT_0k}$. Calculer β.

Q-2) Calculer la pression à $11\,\mathrm{km}$ et comparer au modèle isotherme à T_0.

Q-3) Montrer que P et ρ sont liés par une relation $P\rho^{-\gamma'} = \text{cste}$ (atmosphère polytropique) ; exprimer et calculer γ'.

Q-4) Un ballon-sonde fournit un profil de pression bien ajusté par $P = P_0(1-bz)^\beta$ avec $b = 2{,}0\times10^{-5}\,\mathrm{m^{-1}}$ et $\beta = 5{,}8$. En déduire T_0, le gradient kT_0 et la température à $10\,\mathrm{km}$. Quelle « épaisseur » d'atmosphère ce modèle prévoit-il ?

Correction

Q-1) $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{MgP}{RT_0(1-kz)}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}P}{P} = -\dfrac{Mg}{RT_0}\dfrac{\mathrm{d}z}{1-kz}$. En intégrant : $\ln\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{Mg}{RT_0k}\ln(1-kz)$.
$\beta = \dfrac{29\times10^{-3}\times9{,}81}{8{,}314\times6{,}5\times10^{-3}} = 5{,}26$.

Q-2) $1 - kz = 1 - \dfrac{6{,}5\times11}{288} = 0{,}752$; $P = 0{,}752^{5{,}26}P_0 = 0{,}22\,P_0$. Modèle isotherme : $\mathrm{e}^{-11/8{,}4}P_0 = 0{,}27\,P_0$. L'air froid d'altitude étant plus dense, la pression diminue plus vite.

Q-3) $\rho = \dfrac{PM}{RT} \propto \dfrac{P}{1-kz} \propto P^{1-1/\beta}$, d'où $P \propto \rho^{\gamma'}$ avec $\gamma' = \dfrac{\beta}{\beta-1} = 1{,}23$.

Q-4) $b = k$ et $\beta = \dfrac{Mg}{RT_0k}$ donnent $kT_0 = \dfrac{Mg}{R\beta} = 5{,}9\times10^{-3}\,\mathrm{K\cdot m^{-1}}$ et $T_0 = \dfrac{kT_0}{b} = 295\,\mathrm{K}$. À $10\,\mathrm{km}$: $T = T_0(1-bz) = 236\,\mathrm{K}$, proche des $223\,\mathrm{K}$ observés : le modèle est raisonnable (le vent rompt l'équilibre hydrostatique). La pression s'annulerait pour $z = 1/b = 50\,\mathrm{km}$: ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère dans ce modèle (qui cesse en réalité d'être valable vers 11 km).

EXERCICE 13 La montgolfière

★★★☆☆

Une montgolfière a un volume $V = 2500\,\mathrm{m^3}$; enveloppe, nacelle et passagers ont une masse $m = 500\,\mathrm{kg}$ (volume négligé). L'air extérieur est à $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ et $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ au sol ; l'air intérieur, chauffé à T_i, communique avec l'extérieur par l'ouverture inférieure (même pression). L'air est un gaz parfait, $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Q-1) Calculer la masse volumique ρ_0 de l'air extérieur au sol.

Q-2) Écrire la condition de décollage et en déduire la température minimale T_i de l'air intérieur.

Q-3) En altitude (modèle isotherme), montrer qu'à T_i fixée la force ascensionnelle diminue. Quelle altitude atteint-on avec $T_i = 373\,\mathrm{K}$?

Correction

Q-1) $\rho_0 = \dfrac{P_0M}{RT_0} = \dfrac{1\times10^5\times29\times10^{-3}}{8{,}314\times293} = 1{,}19\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Q-2) La poussée doit compenser le poids de l'enveloppe et de l'air chaud : $\rho_0 V g \geqslant mg + \rho_i V g$ avec $\rho_i = \rho_0 T_0/T_i$. D'où $1 - \dfrac{T_0}{T_i} \geqslant \dfrac{m}{\rho_0 V} = 0{,}168$, soit $T_i \geqslant \dfrac{T_0}{0{,}832} = 352\,\mathrm{K}$ ($79\,^\circ\mathrm{C}$).

Q-3) Avec $P(z) = P_0 \mathrm{e}^{-z/H}$, ρ_{ext} et ρ_i décroissent comme $\mathrm{e}^{-z/H}$: la force nette $\rho_0 \mathrm{e}^{-z/H} V \left(1 - \dfrac{T_0}{T_i}\right) g - mg$ diminue. Équilibre pour $\mathrm{e}^{-z/H} = \dfrac{m}{\rho_0 V (1 - T_0/T_i)} = \dfrac{0{,}168}{0{,}214}$, soit $z = H \ln 1{,}28 \approx 2{,}1\,\mathrm{km}$ (avec $H = 8{,}6\,\mathrm{km}$ à $293\,\mathrm{K}$).

EXERCICE 14 — Force sur une paroi et équilibre d'un barrage-poids

★★☆☆☆

Un barrage-poids de section triangulaire rectangle (hauteur $H = 50\,\mathrm{m}$, base b, face amont verticale) en béton ($\rho_b = 2400\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) retient une hauteur d'eau H. On raisonne sur une tranche de largeur $L = 1\,\mathrm{m}$.

Q-1) Calculer la force exercée par l'eau et son moment par rapport à l'arête aval O de la base (pied du barrage).

Q-2) Le poids du barrage s'applique en son centre de gravité, situé à la distance $2b/3$ de O. Calculer son moment par rapport à O.

Q-3) En déduire la largeur minimale b assurant la stabilité vis-à-vis du basculement autour de O.

Correction

Q-1) $F = \frac{1}{2}\rho_e g L H^2 = 1{,}23 \times 10^7\,\mathrm{N}$, horizontale, appliquée à $H/3$ du fond : moment de renversement $\mathcal{M}_F = F\,H/3 = \frac{1}{6}\rho_e g L H^3 = 2{,}04 \times 10^8\,\mathrm{N \cdot m}$.

Q-2) Poids : $P = \rho_b g \frac{1}{2} b H L$, de moment stabilisant $\mathcal{M}_P = P \cdot \frac{2b}{3} = \frac{1}{3}\rho_b g L H b^2$.

Q-3) Stabilité si $\mathcal{M}_P \geqslant \mathcal{M}_F$: $b^2 \geqslant \dfrac{\rho_e}{2\rho_b} H^2$, soit $b \geqslant H\sqrt{\dfrac{1000}{4800}} = 23\,\mathrm{m}$. En pratique on prend une marge de sécurité et on tient compte des sous-pressions sous la fondation.