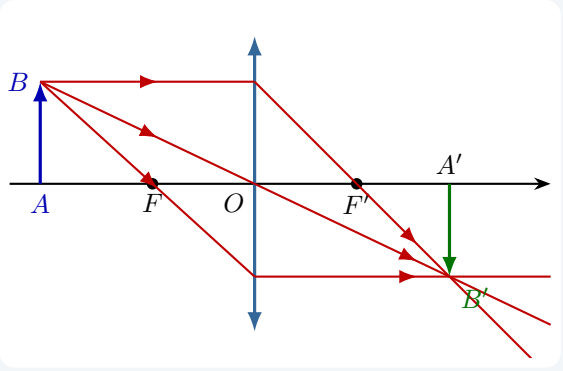
LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

02 OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Formation des images dans les conditions de Gauss

Stigmatisme et aplanétisme — Miroir plan — Approximation de Gauss — Lentilles minces — Miroirs sphériques



« *Toute la conduite de notre vie dépend de nos sens, entre lesquels celui de la vue étant le plus universel et le plus noble, il n'y a point de doute que les inventions qui servent à augmenter sa puissance ne soient des plus utiles qui puissent être.*

— René Descartes, *La Dioptrique* (1637)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Lentille mince »

O2 — Conditions de Gauss

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Distinguer objet et image, réels ou virtuels ; définir stigmatisme et aplanétisme.
- Construire l'image d'un objet par un miroir plan et établir ses propriétés.
- Énoncer les conditions de Gauss et les relier au stigmatisme et à l'aplanétisme approchés ; connaître les aberrations.
- Définir foyers, plans focaux, distance focale et vergence d'une lentille mince ; construire l'image d'un objet (réel ou virtuel, à distance finie ou infinie).
- Exploiter les relations de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton ; établir la condition $D \geqslant 4f'$.
- Étudier une association de lentilles et utiliser les miroirs sphériques dans les conditions de Gauss.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Lentille mince » permet de déplacer l'objet et de changer la distance focale pour suivre en direct la position, la nature et la taille de l'image.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Systèmes optiques, objets et images . . . 3
I.1 Système optique centré . . . 3
I.2 Objets et images . . . 3
I.3 Stigmatisme et aplanétisme . . . 4
II Le miroir plan . . . 4
III L'approximation de Gauss . . . 5
III.1 Conditions de Gauss . . . 5
III.2 Aberrations . . . 6
III.3 Le dioptre plan : un stigmatisme approché . . . 6
IV Les lentilles minces . . . 7
IV.1 Description et foyers . . . 7
IV.2 Construction des images . . . 8
IV.3 Relations de conjugaison et de grandissement . . . 10
IV.4 Projection d'une image : la condition $D \geqslant 4f'$ . . . 12
IV.5 Association de lentilles . . . 12
V Les miroirs sphériques . . . 13
V.1 Éléments caractéristiques . . . 13
VI Synthèse . . . 15
VII Exercices d'approfondissement . . . 15
VIII Classiques des concours . . . 16

I Systèmes optiques, objets et images

I.1 Système optique centré

Définition — Système optique R

Un **système optique** est une succession de milieux transparents séparés par des dioptres, éventuellement associés à des miroirs. Il est **centré** s'il admet un axe de symétrie de révolution, appelé **axe optique**. On distingue les systèmes **dioptriques** (dioptres seuls : lentilles), **catoptriques** (miroirs seuls) et **catadioptriques** (les deux, comme un télescope à lentille correctrice).

Les surfaces qui le composent sont soit des **dioptres** (plans, sphériques, parfois paraboliques ou asphériques), soit des **miroirs** (plans ou sphériques le plus souvent).

On oriente l'axe optique dans le sens de propagation de la lumière incidente (de gauche à droite sur les schémas) et l'on utilise des **grandeurs algébriques** : $\overline{OA} < 0$ si A est à gauche de O.

I.2 Objets et images

Définition — Objet et image, réels ou virtuels R

- Un **point objet** A est le point de concours des rayons *incidents* (ou de leurs prolongements). Il est **réel** si les rayons incidents divergent réellement à partir de A, situé avant la face d'entrée ; il est **virtuel** si les rayons incidents convergent vers A, situé après la face d'entrée (la convergence est interrompue par le système).
- Un **point image** A' est le point de concours des rayons *émergents* (ou de leurs prolongements). Il est **réel** si les rayons émergents y convergent réellement : on peut le recueillir sur un écran. Il est **virtuel** si les rayons émergents semblent seulement en provenir : on le voit à travers le système mais aucun écran ne le recueille.

Remarque

- L'œil (et le cerveau) interprète toujours la lumière qu'il reçoit comme venant *en ligne droite* : il « voit » le point d'où les rayons semblent provenir, qu'il soit réel ou virtuel. C'est ce qui permet de voir une image virtuelle à travers une loupe ou dans un miroir.
- Un objet virtuel n'existe jamais seul : c'est toujours l'image (non encore formée) donnée par un premier système, dont les rayons convergents sont interceptés par le second.

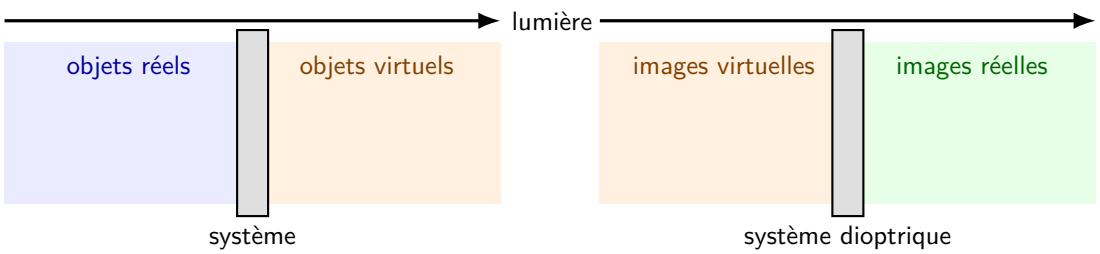


Fig. 1 : Espaces objet et image pour un système dioptrique (pour un miroir, l'espace image réel est du côté de la lumière incidente).

I.3 Stigmatisme et aplanétisme

Définition — Stigmatisme et aplanétisme R

- Un système est **rigoureusement stigmatique** pour le couple de points (A, A') si *tous* les rayons issus de A passent, après traversée, par A'. Les points A et A' sont dits **conjugués**.
- Un système est **aplanétique** pour le couple (A, A') (situés sur l'axe) s'il est stigmatique pour (A, A') et si l'image de tout point B voisin de A dans le plan de front de A est un point B' du plan de front de A' : l'image d'un petit objet plan perpendiculaire à l'axe est plane et perpendiculaire à l'axe.

Remarque

Le stigmatisme rigoureux est exceptionnel : seuls le miroir plan (pour tous les points) et quelques couples particuliers (centre d'un miroir sphérique, foyer d'un miroir parabolique) le réalisent. En pratique, il suffit d'un **stigmatisme approché** : l'image d'un point est une petite tache, jugée ponctuelle si elle est plus petite que le grain du récepteur. On appelle **cercle de confusion** la plus grande tache acceptable : de l'ordre de la taille d'un pixel pour un capteur (quelques micromètres) ou de l'écart entre deux cellules de la rétine.

II Le miroir plan

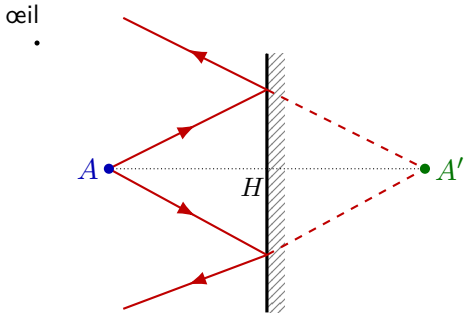


Fig. 2 : Image d'un point par un miroir plan : les rayons réfléchis semblent tous provenir de A'.

Miroir plan R D

L'image d'un point A par un miroir plan est le point A' **symétrique** de A par rapport au plan du miroir :

$$\overline{HA'} = -\overline{HA}, \qquad \gamma = +1.$$

Le miroir plan est rigoureusement stigmatique et aplanétique pour tout point de l'espace. L'image d'un objet réel est virtuelle, droite et de même taille, mais elle est « inversée » (une main droite devient une main gauche).

Démonstration. Un rayon issu de A frappe le miroir en I ; d'après la loi de la réflexion, le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale, donc son prolongement passe par le symétrique A' de A, quel que soit I. Aucune approximation n'a été faite : le stigmatisme est rigoureux.

Remarque

- L'objet et l'image sont de natures opposées : un objet réel a une image virtuelle, un objet virtuel une image réelle.
- Si le miroir se translate de d le long de sa normale, l'image se déplace de $2d$; s'il tourne d'un angle

α, le rayon réfléchi tourne de 2α (exercice ci-dessous).

- Un objet à l'infini a son image à l'infini : le miroir plan est un système **afocal**. C'est aussi la limite d'un miroir sphérique de rayon infini.
- Un bon miroir métallique ou diélectrique réfléchit de $90\,\%$ à plus de $99{,}9\,\%$ de l'énergie incidente.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 **Se voir en entier** ✦✦✧✧✧

Une personne de taille $h = 1{,}80\,\mathrm{m}$, dont les yeux sont à $10\,\mathrm{cm}$ sous le sommet du crâne, se regarde dans un miroir plan vertical.

Q-1) Quelle hauteur minimale doit avoir le miroir pour qu'elle se voie entièrement ? À quelle hauteur placer son bord inférieur ?

Q-2) Ce résultat dépend-il de la distance au miroir ?

EXERCICE 2 **Rotation d'un miroir** ✦✦✧✧✧

Un rayon fixe se réfléchit sur un miroir plan. Montrer que si le miroir tourne d'un angle α autour d'un axe perpendiculaire au plan d'incidence, le rayon réfléchi tourne de 2α. Citer une application.

III L'approximation de Gauss

III.1 Conditions de Gauss

Conditions de Gauss R

Un système centré donne d'un objet plan perpendiculaire à l'axe une image approximativement stigmatique et aplanétique si les rayons sont **paraxiaux**, c'est-à-dire :

- **peu inclinés** sur l'axe optique ;
- **proches** de l'axe optique lors de la traversée du système.

On réalise ces conditions en **diaphragmant** le système (on limite la taille utile des lentilles) et en utilisant des objets **petits** ou **éloignés**.

Dans les conditions de Gauss, les angles θ sont petits : $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$ (développements limités à l'ordre 1, θ en *radians*). La loi de la réfraction se linéarise en $n_1 i_1 = n_2 i_2$; c'est cette linéarisation qui conduit aux relations de conjugaison simples établies plus loin.

Ordres de grandeur

L'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ commet une erreur relative de $0{,}5\,\%$ à $10°$, $1{,}5\,\%$ à $17°$ et $4{,}5\,\%$ à $30°$. Pour $\tan\theta \simeq \theta$, l'erreur atteint déjà $1\,\%$ vers $10°$: on considère en pratique qu'un rayon est paraxial s'il est incliné de moins de $10°$ environ.

III.2 Aberrations

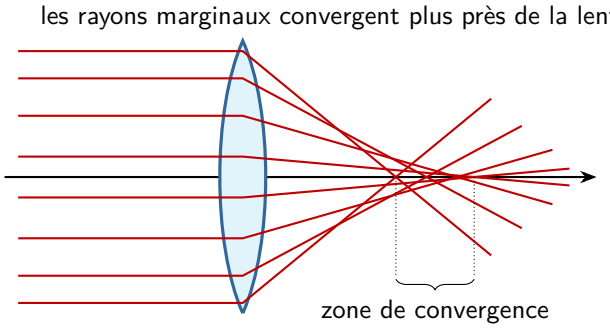


Fig. 3 : Aberration sphérique : hors des conditions de Gauss, l'image d'un point est une tache.

Remarque

- **Aberrations géométriques** : hors des conditions de Gauss, l'image d'un point devient une tache (aberration sphérique, coma, astigmatisme) et l'image d'un quadrillage se déforme (distorsion en « barillet » ou en « coussinet »).
- **Aberrations chromatiques** : l'indice du verre dépendant de la longueur d'onde (O1), la distance focale d'une lentille aussi ; le foyer bleu est plus proche de la lentille que le foyer rouge, et l'image d'un objet blanc est bordée d'irisations. On les corrige avec des doublets achromatiques (exercice d'approfondissement).
- Diaphragmer améliore la netteté mais réduit la luminosité et augmente la diffraction : c'est un compromis.

III.3 Le dioptre plan : un stigmatisme approché

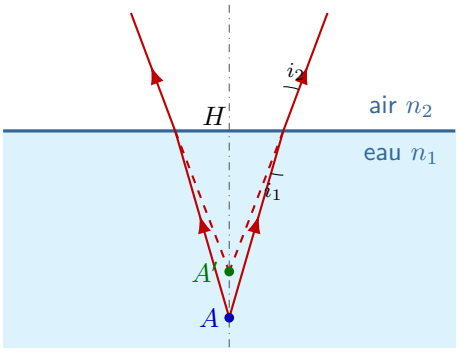


Fig. 4 : Profondeur apparente : vu de l'air, le point A semble remonté en A'.

Dioptre plan dans les conditions de Gauss D

Un rayon issu de A (milieu n_1) frappe le dioptre en I tel que $HI = \overline{HA}\tan i_1 = \overline{HA'}\tan i_2$ en valeur absolue, où A' est le point où le prolongement du rayon émergent recoupe la normale (HA). Comme $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, la position de A' dépend de i_1 : il n'y a pas de stigmatisme rigoureux. Pour des rayons paraxiaux, $\tan i \simeq \sin i \simeq i$ et

$$\frac{\overline{HA'}}{n_2} = \frac{\overline{HA}}{n_1}.$$

Ordres de grandeur

Un caillou au fond d'une rivière de $1{,}0\,\mathrm{m}$, vu à la verticale depuis l'air, semble à $1{,}0\,\mathrm{m}/1{,}33 = 75\,\mathrm{cm}$ de profondeur : on sous-estime la profondeur d'environ un quart.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 **Aquarium** ✦✧✧✧✧

Un poisson est à $20\,\mathrm{cm}$ derrière la vitre (d'épaisseur négligeable) d'un aquarium rempli d'eau ($n = 1{,}33$). On l'observe de face, près de la normale.

Q-1) À quelle distance de la vitre le voit-on ?

Q-2) Le poisson voit un enfant situé à $60\,\mathrm{cm}$ de la vitre. À quelle distance le voit-il ?

IV Les lentilles minces

IV.1 Description et foyers

Une **lentille** est un milieu transparent limité par deux dioptres dont l'un au moins est sphérique. Elle est **mince** si son épaisseur $e = S_1S_2$ est petite devant les rayons de courbure R_1, R_2 de ses faces et devant $|R_2 - R_1|$: ses deux sommets sont alors confondus en un point O, le **centre optique**. Les lentilles à bords minces (biconvexe, plan-convexe, ménisque convergent) sont convergentes ; les lentilles à bords épais (biconcave, plan-concave, ménisque divergent) sont divergentes.



Fig. 5 : Formes usuelles et symboles des lentilles minces.

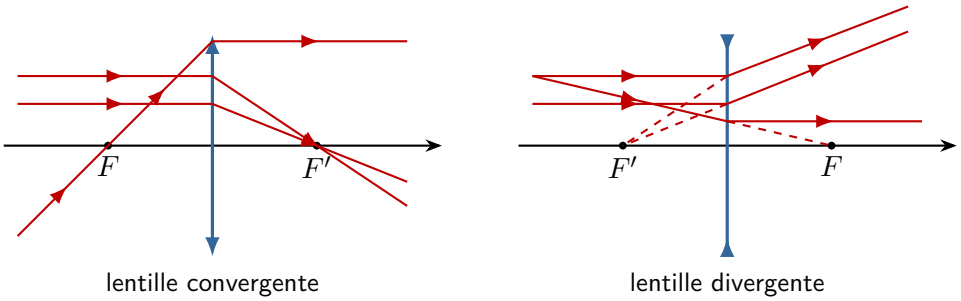
Définition — Foyers et plans focaux R

- Le **foyer principal image** F' est l'image d'un point objet à l'infini sur l'axe : un faisceau incident parallèle à l'axe émerge en passant (réellement ou virtuellement) par F'.
- Le **foyer principal objet** F est le point objet dont l'image est à l'infini sur l'axe : un faisceau passant par F émerge parallèlement à l'axe.
- Les **plans focaux** objet et image sont les plans de front passant par F et F' ; leurs points hors de l'axe sont des **foyers secondaires**.
- Un système est **afocal** s'il n'a pas de foyer : l'image d'un objet à l'infini est à l'infini (lunette réglée, O3).

Lentille mince dans les conditions de Gauss R

1. Un rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié.
2. Un rayon incident parallèle à l'axe émerge en passant (réellement ou virtuellement) par F'.
3. Un rayon incident passant (réellement ou virtuellement) par F émerge parallèlement à l'axe.

4. F et F' sont symétriques par rapport à O. La **distance focale image** est $f' = \overline{OF'} = -\overline{OF}$; $f' > 0$ pour une lentille convergente, $f' < 0$ pour une divergente.
5. La **vergence** est $V = 1/f'$; elle s'exprime en dioptries ($1\,\delta = 1\,\mathrm{m}^{-1}$). Si les milieux objet et image ont des indices n et n' différents (lentille de l'œil, objectif de plongée), on montre que $V = \dfrac{n'}{f'} = -\dfrac{n}{f}$ avec $f = \overline{OF}$: les distances focales objet et image ne sont plus opposées.



lentille convergente lentille divergente

Fig. 6 : Rayons particuliers : parallèles à l'axe, passant par F ou dirigés vers F.

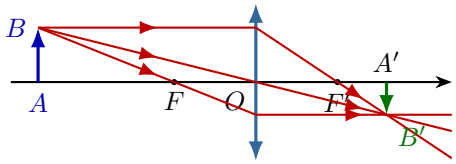
Ordres de grandeur

Verres correcteurs : de -10 à $+5\,\delta$; loupe : $+8$ à $+20\,\delta$; objectif d'appareil photo standard : $f' = 50\,\mathrm{mm}$ ($V = 20\,\delta$) ; œil au repos : environ $60\,\delta$.

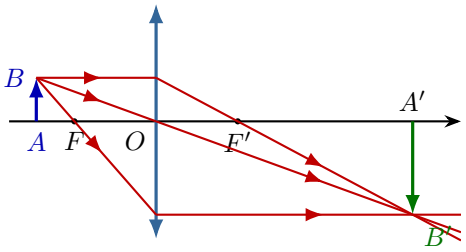
IV.2 Construction des images

☞ Méthode — Construire l'image d'un objet AB M

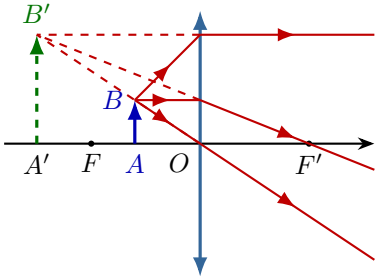
1. Placer O, F, F' ; tracer l'objet AB perpendiculaire à l'axe, A sur l'axe.
2. Tracer deux des trois rayons particuliers issus de B : par O (non dévié), parallèle à l'axe (émerge par F'), passant par F (émerge parallèle).
3. Leur intersection (ou celle de leurs prolongements, en pointillés) donne B' ; A' est son projeté sur l'axe (aplanétisme).
4. Conclure : nature (réelle ou virtuelle), sens (droite ou renversée), taille (agrandie ou réduite). Vérifier ensuite par le calcul.



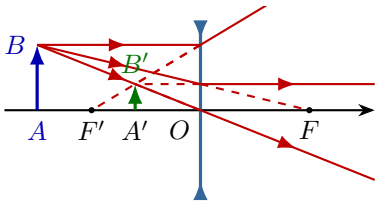
(a) objet avant $2F$: image réelle, renversée, réduite



(b) objet entre $2F$ et F : image réelle, renversée, agrandie



(c) objet entre F et O : image virtuelle, droite, agrandie (loupe)



(d) lentille divergente : image virtuelle, droite, réduite

Fig. 7 : Les principaux cas de construction pour un objet réel.

Position de l'objet ($f' > 0$)	Image	Grandissement
réel, avant le point $\overline{OA} = -2f'$	réelle, renversée	$-1 < \gamma < 0$
réel, entre $-2f'$ et F	réelle, renversée	$\gamma < -1$
réel, dans le plan focal objet	à l'infini, vue sous $\alpha' = AB/f'$	—
réel, entre F et O	virtuelle, droite	$\gamma > 1$
virtuel ($\overline{OA} > 0$)	réelle, droite	$0 < \gamma < 1$
Position de l'objet ($f' < 0$)	**Image**	**Grandissement**
réel	virtuelle, droite	$0 < \gamma < 1$
virtuel, entre O et F	réelle, droite	$\gamma > 1$
virtuel, au-delà de F	virtuelle, renversée	$\gamma < 0$

Tab. 1 : Bilan des cas pour une lentille convergente puis divergente. Une lentille convergente ne donne une image virtuelle que d'un objet réel situé entre F et O ; une lentille divergente ne donne une image réelle que d'un objet virtuel situé entre O et F.

☞ Méthode — Tracer un rayon quelconque M

Pour prolonger après la lentille un rayon incident quelconque : on trace le rayon *parallèle* passant par O (non dévié) ; il coupe le plan focal image en un foyer secondaire φ'. Les deux rayons, parallèles avant la lentille, convergent après elle en φ' : le rayon cherché émerge en passant (réellement ou virtuellement) par φ'. Dans l'autre sens, un rayon émergent quelconque provient d'un foyer secondaire objet, intersection du plan focal objet avec la parallèle passant par O.

☞ Méthode — Objet virtuel ; objet à l'infini M

- **Objet virtuel** : les rayons incidents convergent vers B, situé après la lentille. On trace les rayons incidents *dirigés vers* B (prolongements en pointillés au-delà de la lentille) et l'on applique les mêmes règles.

► **Objet à l'infini** vu sous l'angle α : le faisceau incident est parallèle, incliné de α. L'image est dans le plan focal image, au foyer secondaire φ' situé sur le rayon non dévié passant par O :

$$\overline{F'\varphi'} = f' \tan\alpha \simeq f'\alpha.$$

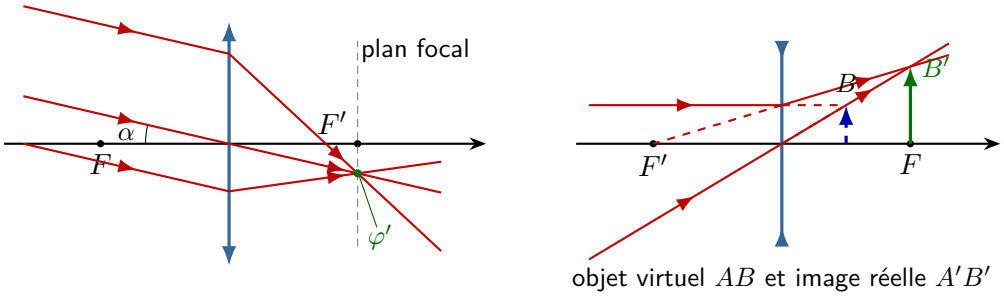


Fig. 8 : À gauche : un faisceau parallèle incliné converge en un foyer secondaire φ'. À droite : lentille divergente recevant un faisceau convergent.

IV.3 Relations de conjugaison et de grandissement

Relations des lentilles minces R

Pour un objet AB perpendiculaire à l'axe et son image $A'B'$, dans les conditions de Gauss :

► **Descartes** (origine au centre) :

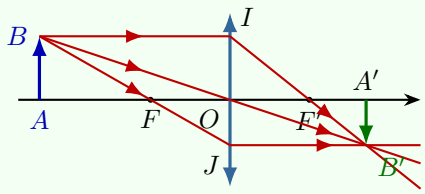
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V, \qquad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

► **Newton** (origines aux foyers) :

$$\overline{FA}\cdot\overline{F'A'} = -f'^2, \qquad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}.$$

Démonstration géométrique D

On utilise le rayon BI parallèle à l'axe, qui émerge par F', le rayon BO non dévié et le rayon BF qui émerge en J parallèlement à l'axe.



► Triangles OAB et $OA'B'$: $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

► Triangles $F'OI$ et $F'A'B'$, avec $\overline{OI} = \overline{AB}$: $\gamma = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}$.

► Triangles FAB et FOJ, avec $\overline{OJ} = \overline{A'B'}$: $\gamma = \dfrac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \dfrac{f'}{\overline{FA}}$.

L'égalité des deux dernières expressions donne la relation de Newton. En écrivant $\overline{F'A'} = \overline{OA'} - f'$ dans la deuxième et en l'égalant à la première, on obtient $\overline{OA'}\,f' = -\overline{OA}\,(\overline{OA'} - f')$, soit, en divisant par $\overline{OA}\,\overline{OA'}\,f'$, la relation de Descartes.

Image	droite	renversée	agrandie	réduite
grandissement transversal γ	$\gamma > 0$	$\gamma < 0$	$\lvert\gamma\rvert > 1$	$\lvert\gamma\rvert < 1$

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Les relations sont *algébriques* : un objet réel a $\overline{OA} < 0$. Oublier un signe est l'erreur la plus fréquente ; vérifier systématiquement par une construction.
- $\gamma < 0$: image renversée ; $|\gamma| > 1$: image agrandie. Une image réelle d'un objet réel par une lentille est toujours renversée.
- Une lentille divergente donne toujours une image virtuelle d'un objet réel.
- La relation de Newton montre que $\overline{FA}$ et $\overline{F'A'}$ sont toujours de signes contraires : si l'objet est avant F, l'image est après F', et réciproquement.

Remarque

Grandissement angulaire. Un rayon issu de A faisant l'angle α avec l'axe émerge vers A' sous l'angle α' ; dans les conditions de Gauss, $\alpha \simeq \overline{OI}/\overline{AO}$ et $\alpha' \simeq \overline{OI}/\overline{A'O}$, donc $G = \alpha'/\alpha = \overline{OA}/\overline{OA'} = 1/\gamma$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Conjugaison et grandissement ✦✧✧✧✧

Une lentille mince donne d'un objet réel AB une image réelle $A'B'$ deux fois plus grande, sur un écran situé à $90\,\text{cm}$ de l'objet.

Q-1) Préciser la nature de la lentille et le signe du grandissement.

Q-2) Calculer $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ et f'.

EXERCICE 5 Une série de cas ✦✦✧✧✧

Une lentille convergente a pour distance focale $f' = 20\,\text{cm}$.

Q-1) Objet réel à $\overline{OA} = -10\,\text{cm}$: position, nature et grandissement de l'image.

Q-2) Objet virtuel à $\overline{OA} = 20\,\text{cm}$: même question.

Q-3) Vérifier la relation de Newton pour un objet à $\overline{OA} = -30\,\text{cm}$.

EXERCICE 6 Discussion générale pour une lentille convergente ✦✦✦✧✧

On considère une lentille convergente de distance focale f' et un objet réel AB.

Q-1) À l'aide de la relation de Descartes, montrer que l'image est réelle si et seulement si $\overline{OA} < -f'$.

Q-2) À l'aide de la relation de Newton, montrer que l'image est agrandie si et seulement si $|\overline{FA}| < f'$.

Q-3) En déduire que, dans un projecteur, l'image est agrandie lorsque la lentille est plus proche de l'objet que de l'écran.

EXERCICE 7 Lentille divergente ✦✦✧✧✧

Un objet AB de $2{,}0\,\text{cm}$ est à $15\,\text{cm}$ avant une lentille divergente de distance focale $f' = -10\,\text{cm}$.

Q-1) Construire l'image à l'aide de deux rayons.

Q-2) Calculer sa position, sa taille, et préciser sa nature.

IV.4 Projection d'une image : la condition $D \geqslant 4f'$

Distance objet-écran minimale D

Pour former sur un écran l'image réelle d'un objet réel avec une lentille convergente, la distance D entre l'objet et l'écran doit vérifier

$$D \geqslant 4f'.$$

Si $D > 4f'$, il existe deux positions de la lentille, distantes de $d = \sqrt{D(D-4f')}$.

Démonstration. Posons $x = \overline{OA} < 0$; alors $\overline{OA'} = D + x$. La relation de Descartes $\frac{1}{D+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ conduit à $x^2 + Dx + Df' = 0$, qui a des racines réelles si et seulement si son discriminant $D^2 - 4Df'$ est positif. Les deux racines diffèrent de $\sqrt{D^2 - 4Df'}$ et leur somme vaut $-D$: les deux positions sont symétriques par rapport au milieu de $[AA']$, ce qu'exprime aussi le retour inverse (échanger objet et écran échange les deux positions). L'une donne une image agrandie, l'autre une image réduite.

☞ Méthode — Focométrie M

- **Bessel** : à D fixé, on mesure l'écart d entre les deux positions de netteté : $f' = \dfrac{D^2 - d^2}{4D}$.
- **Silbermann** : on cherche la plus petite distance objet-écran donnant une image nette : $D_{\text{min}} = 4f'$, et alors $\gamma = -1$.
- **Autocollimation** : un miroir plan placé derrière la lentille renvoie la lumière ; l'image se forme dans le plan de l'objet lorsque celui-ci est dans le plan focal objet. On lit f' directement.

IV.5 Association de lentilles

On traite une association en cherchant l'image intermédiaire : $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$. L'image A_1 donnée par L_1 sert d'objet, réel ou virtuel, pour L_2, et le grandissement total est le produit $\gamma = \gamma_1\gamma_2$.

Lentilles accolées R D

Deux lentilles minces accolées (même centre O) équivalent à une lentille mince de vergence

$$V = V_1 + V_2.$$

Démonstration. En notant A_1 l'image intermédiaire : $\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = V_1$ et $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_1} = V_2$; on additionne.

Remarque

Pour deux lentilles distantes de $e = \overline{O_1O_2}$, on montre la formule de Gullstrand $V = V_1 + V_2 - eV_1V_2$. Si $e = f'_1 + f'_2$, $V = 0$: le système est afocal, c'est le principe de la lunette (O3).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Méthode de Bessel ✦✦✧✧✧

Un objet et un écran sont fixés à $D = 1{,}000\,\text{m}$ l'un de l'autre. On obtient deux positions de netteté de la lentille, distantes de $d = 0{,}600\,\text{m}$.

Q-1) Calculer f'.

Q-2) Calculer les deux grandissements et vérifier que leur produit vaut 1. Interpréter.

EXERCICE 9 Doublet de lentilles ✦✦✧✧✧

Deux lentilles convergentes L_1 ($f_1' = 30\,\text{cm}$) et L_2 ($f_2' = 10\,\text{cm}$) sont séparées de $e = \overline{O_1O_2} = 20\,\text{cm}$.

Q-1) Déterminer la position du foyer image F' du doublet.

Q-2) Retrouver la vergence du doublet par la formule de Gullstrand.

V Les miroirs sphériques

V.1 Éléments caractéristiques

Un miroir sphérique est une calotte sphérique réfléchissante de centre C et de sommet S. Il est **concave** si sa face réfléchissante est tournée vers C, **convexe** sinon. Dans les conditions de Gauss, il est approximativement stigmatique et aplanétique ; ses foyers objet et image sont **confondus** au milieu de $[SC]$:

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}.$$

Un miroir concave est convergent (foyer réel), un miroir convexe divergent (foyer virtuel).

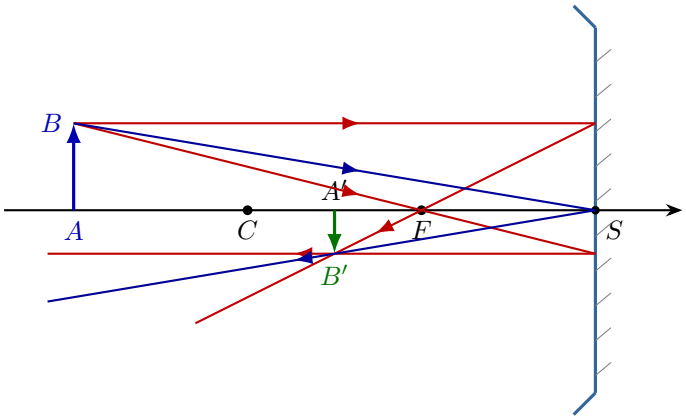


Fig. 9 : Miroir concave ($\overline{SC} = -4$) : image réelle et renversée d'un objet placé avant C.

Relations des miroirs sphériques R

Avec un axe orienté dans le sens de la lumière incidente :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}, \qquad \gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \qquad \text{(origine au sommet)}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}, \qquad \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \qquad \text{(origine au centre)}$$

$$\overline{FA}\cdot\overline{FA'}=\overline{SF}^{\,2},\qquad \gamma=-\frac{\overline{FA'}}{\overline{SF}}=-\frac{\overline{SF}}{\overline{FA}}\qquad\text{(Newton)}.$$

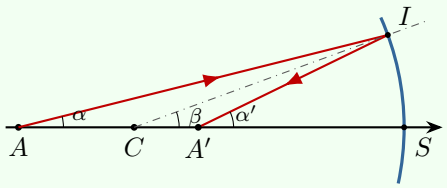
On retrouve le miroir plan en faisant tendre le rayon de courbure vers l'infini : $\overline{SA'}=-\overline{SA}$ et $\gamma=1$.

Démonstration de la relation au sommet D

Un rayon issu de A (sur l'axe) frappe le miroir en I, à la hauteur h, et repart vers A'. La normale en I est la droite (CI). Notons α, α' et β les angles (non orientés) que font (AI), $(A'I)$ et (CI) avec l'axe. Dans les triangles AIC et CIA' : $i=\beta-\alpha$ et $i'=\alpha'-\beta$, et la loi de la réflexion ($i=i'$) donne

$$\alpha+\alpha'=2\beta.$$

Dans les conditions de Gauss, I est presque en S et les angles sont petits : $\alpha\simeq h/|SA|$, $\alpha'\simeq h/|SA'|$, $\beta\simeq h/|SC|$. Avec les signes ($\overline{SA}$, $\overline{SA'}$ et $\overline{SC}$ sont négatifs pour un miroir concave et un objet réel), on obtient la relation de conjugaison au sommet, indépendante de h : c'est le stigmatisme approché.



Rayons particuliers R

Un rayon passant par C est réfléchi sur lui-même ; un rayon parallèle à l'axe est réfléchi en passant par F ; un rayon passant par F est réfléchi parallèlement à l'axe ; un rayon arrivant en S est réfléchi symétriquement par rapport à l'axe.

☞ Méthode — Focométrie d'un miroir sphérique M

- **Miroir concave** : on place le miroir de sorte que l'image d'un objet se forme dans le plan même de l'objet. D'après la relation au centre, cela se produit quand l'objet est en C ($\gamma=-1$) : on mesure $SC=2f$.
- **Miroir convexe** : son foyer est virtuel ; on forme d'abord avec une lentille convergente l'image réelle A_1 d'un objet, puis on intercale le miroir entre la lentille et A_1 de sorte que la lumière revienne former une image nette dans le plan de l'objet : A_1 est alors au centre du miroir et $|SA_1|=|\overline{SC}|$.
- Pour une lentille, on peut aussi pointer objet et image avec un **viseur** (lunette de visée à courte distance montée sur un banc gradué).

✗ Attention, erreurs fréquentes

Pour un miroir, la lumière repart dans l'autre sens : une image *réelle* est située *devant* le miroir (du côté de la lumière incidente), une image virtuelle derrière. Avec l'axe orienté dans le sens de la lumière incidente, une image réelle a donc $\overline{SA'}<0$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 10 Miroir grossissant ✦✧✧✧✧

Un miroir concave de rayon $60\,\text{cm}$ est utilisé pour se raser : le visage est à $15\,\text{cm}$ du sommet.

Q-1) Déterminer la position, la nature et le grandissement de l'image.

Q-2) Pourquoi ce miroir doit-il être concave et le visage placé entre F et S ?

EXERCICE 11 Image de la Lune par un miroir de télescope ✦✦✧✧✧

Le miroir primaire concave d'un télescope a un rayon de courbure de $2{,}4\,\text{m}$. La Lune est vue sous le diamètre apparent $\alpha = 9{,}3 \times 10^{-3}\,\text{rad}$.

Q-1) Où se forme l'image de la Lune ? Quelle est sa taille ?

Q-2) Quel serait le diamètre de l'image donnée par l'objectif d'un appareil photo de focale $50\,\text{mm}$?

VI Synthèse

★ À retenir

- Objet (image) réel ou virtuel selon que les rayons incidents (émergents) passent réellement ou non par le point. Stigmatisme : un point a pour image un point ; aplanétisme : un plan de front a pour image un plan de front.
- Miroir plan : image symétrique, $\gamma = +1$, stigmatisme rigoureux.
- Conditions de Gauss : rayons peu inclinés et proches de l'axe $\Rightarrow$ stigmatisme et aplanétisme approchés. Aberrations géométriques et chromatiques.
- Lentille mince : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$, $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$; Newton $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$; $V = 1/f'$; trois rayons particuliers.
- Projection : $D \geqslant 4f'$; Bessel $f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$. Lentilles accolées : $V = V_1 + V_2$.
- Miroir sphérique : $F = F'$ milieu de $[SC]$; $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$, $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$.
- Liens : modèle des instruments (O3) ; lois de Snell-Descartes (O1).

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 12 Le téléobjectif ✦✦✦✧✧

Un téléobjectif est formé d'une lentille convergente L_1 ($f'_1 = 10\,\text{cm}$) suivie, à $e = 7{,}5\,\text{cm}$, d'une lentille divergente L_2 ($f'_2 = -3{,}0\,\text{cm}$).

Q-1) Déterminer la position du foyer image F' du système.

Q-2) Un objet très éloigné a un diamètre apparent $\alpha = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{rad}$. Calculer la taille de son image. Quelle serait la distance focale d'une lentille unique donnant la même image ?

Q-3) Quel est l'intérêt du dispositif ?

EXERCICE 13 Focométrie d'une lentille divergente

On veut mesurer la distance focale f' d'une lentille divergente L. On l'accole à une lentille convergente L_1 ($f'_1 = 10{,}0\,\text{cm}$). Par autocollimation, l'ensemble donne une image nette dans le plan de l'objet lorsque celui-ci est à $25{,}0\,\text{cm}$ des lentilles.

Q-1) En déduire f'.

Q-2) Pourquoi ne peut-on pas réaliser l'autocollimation avec la lentille divergente seule ? Quelle condition doit vérifier L_1 ?

EXERCICE 14 Profondeur apparente hors des conditions de Gauss

Un nageur regarde le fond d'une piscine de profondeur $h = 2{,}0\,\text{m}$ ($n = 1{,}33$).

Q-1) À quelle profondeur voit-il le fond s'il regarde à la verticale ?

Q-2) Il regarde maintenant sous l'angle i avec la verticale. En considérant deux rayons voisins, issus d'un même point du fond et émergeant sous i et $i+\mathrm{d}i$, montrer que l'image se trouve à la profondeur $h' = h\dfrac{\cos^3 i}{n\cos^3 r}$. Calculer h' pour $i = 45°$ et conclure.

EXERCICE 15 Le doublet achromatique

La vergence d'une lentille mince s'écrit $V = (n-1)K$, où K ne dépend que des rayons de courbure. On caractérise un verre par sa constringence $\nu = \dfrac{n_D - 1}{n_F - n_C}$ (n_F, n_D, n_C : indices pour le bleu, le jaune et le rouge).

Q-1) Montrer que la variation de vergence entre le bleu et le rouge vaut $\Delta V = V_D/\nu$, où V_D est la vergence pour le jaune.

Q-2) On accole une lentille en verre crown ($\nu_1 = 60$) et une lentille en verre flint ($\nu_2 = 36$). Montrer que le doublet est achromatique si $\dfrac{V_1}{\nu_1} + \dfrac{V_2}{\nu_2} = 0$.

Q-3) Calculer V_1 et V_2 pour un doublet de vergence $5{,}0\,\delta$.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 16 Focométrie : autocollimation et Bessel

On dispose d'un objet lumineux, d'un écran, d'un miroir plan et d'une lentille mince convergente de distance focale f' inconnue.

Q-1) **Autocollimation.** Le miroir est accolé derrière la lentille ; on déplace l'ensemble jusqu'à obtenir une image nette dans le plan de l'objet. Montrer que l'objet est alors dans le plan focal objet. Préciser le grandissement.

Q-2) **Bessel.** L'écran est à la distance D fixe de l'objet. Établir $f' = \dfrac{D^2 - d^2}{4D}$.

Q-3) Avec $D = 1{,}000\,\text{m}$ et $d = 0{,}600\,\text{m}$, mesurés chacun à $\pm 2\,\text{mm}$, calculer f' et son incertitude. Pourquoi cette méthode est-elle plus précise qu'une mesure directe de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$?

EXERCICE 17 Le télescope de Cassegrain

★★★★☆

Le miroir primaire M_1, concave, de sommet S_1, a un rayon de courbure de $2{,}00\,\text{m}$; il est percé en son centre. Le secondaire M_2, convexe, de sommet S_2, est placé à $0{,}80\,\text{m}$ devant M_1, du côté des objets observés. On oriente l'axe dans le sens de la lumière incidente, de sorte que $\overline{S_2S_1} = 0{,}80\,\text{m}$.

Q-1) Où se formerait l'image A_1 d'une étoile par M_1 seul ?

Q-2) L'image A_1 sert d'objet à M_2. Est-il réel ou virtuel ? Calculer $\overline{S_2A_1}$.

Q-3) L'image finale A' doit se former $10\,\text{cm}$ derrière S_1, à travers le trou du primaire. Calculer $\overline{S_2C_2}$ et vérifier que M_2 est convexe.

Q-4) Calculer le grandissement γ_2 du secondaire, la focale équivalente du télescope et la taille de l'image de la Lune ($\alpha = 9{,}3 \times 10^{-3}\,\text{rad}$). Intérêt du montage ?

EXERCICE 18 Projecteur de diapositives

★★★☆☆

Un projecteur forme sur un écran situé à $D = 5{,}0\,\text{m}$ de la diapositive ($24\,\text{mm} \times 36\,\text{mm}$) une image de $1{,}20\,\text{m} \times 1{,}80\,\text{m}$.

Q-1) Calculer le grandissement, puis $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ et la distance focale de l'objectif.

Q-2) Vérifier la condition $D \geqslant 4f'$. Pourquoi place-t-on la diapositive à l'envers ?

Q-3) On recule l'écran de $1{,}0\,\text{m}$. De combien faut-il déplacer l'objectif pour retrouver une image nette ? La nouvelle image est-elle plus grande ?