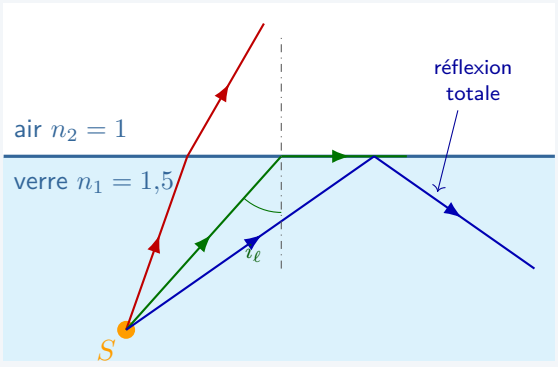
LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

01 OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Approximation de l'optique géométrique

Sources lumineuses et indice — Rayon lumineux — Lois de Snell-Descartes — Réflexion totale — Fibre optique — Prisme



> *La nature agit toujours par les voies les plus courtes.*
>
> — Pierre de Fermat, lettre à Cureau de la Chambre (1662)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Réfraction et réflexion totale »

O1 — Optique géométrique

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Caractériser une source lumineuse par son spectre ; relier longueur d'onde dans le vide et couleur.
- Définir l'indice d'un milieu transparent, connaître quelques ordres de grandeur et la loi de Cauchy.
- Énoncer les conditions de validité de l'optique géométrique (diffraction) et la notion de rayon lumineux.
- Établir et utiliser les lois de Snell-Descartes ; déterminer l'angle de réfraction limite.
- Établir la condition de réflexion totale et l'exploiter : fibre optique, ouverture numérique, dispersion intermodale.
- Étudier la déviation par un prisme et mesurer un indice par la méthode du minimum de déviation.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Réfraction et réflexion totale » permet de faire varier l'angle d'incidence et les indices pour observer en direct la réfraction, l'angle limite et l'apparition de la réflexion totale.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I La lumière : sources, spectre et indice . . . 3
I.1 Nature de la lumière . . . 3
I.2 Sources lumineuses . . . 3
I.3 Milieux transparents et indice optique . . . 4
II L'approximation de l'optique géométrique . . . 5
II.1 Le phénomène de diffraction . . . 5
II.2 Rayon lumineux et principes de l'optique géométrique . . . 6
II.3 Chemin optique et principe de Fermat . . . 7
III Lois de Snell-Descartes . . . 7
III.1 Énoncé . . . 7
III.2 Démonstration à partir du principe de Fermat . . . 8
III.3 Réfraction limite et réflexion totale . . . 9
IV Application : la fibre optique à saut d'indice . . . 11
IV.1 Principe du guidage . . . 11
IV.2 Cône d'acceptance et ouverture numérique . . . 11
IV.3 Dispersion intermodale . . . 11
V Le prisme . . . 13
V.1 Formules du prisme . . . 13
V.2 Minimum de déviation . . . 13
V.3 Dispersion et petits angles . . . 14
VI Synthèse . . . 15
VII Exercices d'approfondissement . . . 16
VIII Classiques des concours . . . 17

I La lumière : sources, spectre et indice

I.1 Nature de la lumière

La lumière est une **onde électromagnétique** : un champ électrique et un champ magnétique couplés qui se propagent, y compris dans le vide. Sa célérité dans le vide est une constante fondamentale, dont la valeur est fixée par la définition du mètre :

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \simeq 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Une onde lumineuse monochromatique est caractérisée par sa **fréquence** ν, imposée par la source : elle ne dépend *pas* du milieu traversé. On lui associe la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = c/\nu$.

Définition — Domaine visible R

L'œil humain est sensible aux radiations de longueur d'onde dans le vide comprise approximativement entre $400\,\mathrm{nm}$ (violet) et $800\,\mathrm{nm}$ (rouge). En deçà s'étend l'ultraviolet, au-delà l'infrarouge.

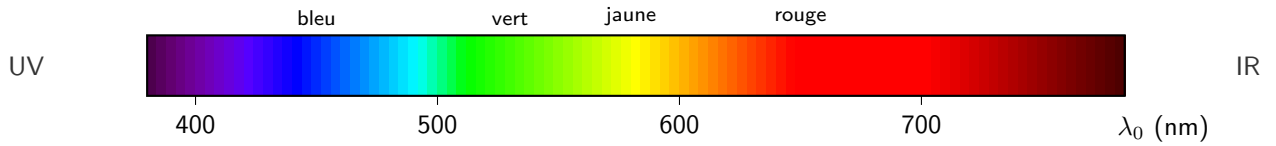


Fig. 1 : Spectre de la lumière visible (couleurs indicatives).

Le visible n'est qu'une petite fenêtre du spectre électromagnétique, qui s'étend sur plus de quinze ordres de grandeur de longueur d'onde :

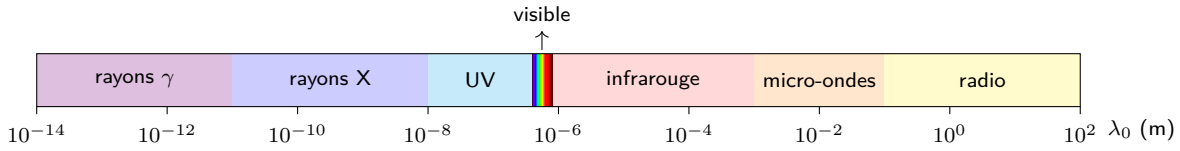


Fig. 2 : Le spectre électromagnétique (échelle logarithmique schématique).

I.2 Sources lumineuses

On distingue les sources **primaires**, qui produisent la lumière qu'elles émettent (Soleil, lampe, laser), et les sources **secondaires**, qui renvoient une partie de la lumière reçue (la Lune, un livre, un mur). Ce renvoi est **spéculaire** sur une surface polie (direction bien définie, comme sur un miroir) et **diffus** sur une surface rugueuse à l'échelle de la longueur d'onde (dans toutes les directions) : c'est la diffusion qui rend les objets visibles de partout. La couleur d'un objet éclairé en lumière blanche résulte de l'*absorption sélective* de certaines longueurs d'onde : une feuille verte absorbe le rouge et le bleu.

On classe les sources selon leur **spectre**, c'est-à-dire la répartition de la puissance émise en fonction de λ_0 :

- **sources thermiques** (Soleil, lampe à incandescence) : spectre *continu*, dont le maximum se déplace vers le bleu quand la température augmente (le Soleil, $T \simeq 5800\,\mathrm{K}$, a son maximum vers $500\,\mathrm{nm}$) ;
- **lampes spectrales** (vapeur de sodium, de mercure) : spectre de *raies*, chaque raie correspondant à une transition entre niveaux d'énergie de l'atome (doublet jaune du sodium à $589{,}0\,\mathrm{nm}$ et $589{,}6\,\mathrm{nm}$) ;
- **laser** : une raie unique très fine, faisceau très peu divergent et très intense ; c'est le modèle de la source *quasi monochromatique* ;
- **DEL** : spectre de largeur intermédiaire (quelques dizaines de nanomètres), centré sur une couleur.

Remarque

Une source « blanche » n'est pas monochromatique : elle contient tout le visible. Les phénomènes de dispersion (prisme, arc-en-ciel) séparent ses composantes.

I.3 Milieux transparents et indice optique

On travaille dans des milieux t.l.h.i. :

- **transparent** : la lumière le traverse sans être absorbée de façon notable (le contraire d'un milieu opaque) ;
- **linéaire** : la réponse du milieu est proportionnelle à l'onde ; en particulier la fréquence, donc la couleur, est conservée ;
- **homogène** : ses propriétés, et donc son indice, sont les mêmes en tout point ;
- **isotrope** : ses propriétés ne dépendent pas de la direction de propagation (ce n'est pas le cas de certains cristaux, comme la calcite).

L'air, l'eau et les verres optiques sont de bons exemples. La lumière s'y propage à une vitesse v inférieure à c.

Définition — Indice optique R

L'indice (absolu) d'un milieu transparent est

$$n = \frac{c}{v} \geqslant 1.$$

Pour une onde de fréquence ν, la longueur d'onde dans le milieu vaut $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{\lambda_0}{n}$: la fréquence (donc la couleur) est conservée, la longueur d'onde change.

Ordres de grandeur

Milieu	vide	air (CNTP)	eau	verre courant	verre flint	diamant
n	1	1,000 29	1,33	1,5	1,6 à 1,9	2,42

L'indice de l'air diffère de 1 de 3×10^{-4} : on prend $n_{\text{air}} = 1$ sauf dans l'étude des mirages ou de la réfraction atmosphérique.

Dispersion — loi de Cauchy R

L'indice d'un milieu dépend de la longueur d'onde : le milieu est **dispersif**. Dans le visible, pour un verre, on utilise la loi empirique de Cauchy

$$n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}, \qquad A > 1,\ B > 0.$$

L'indice *diminue* quand λ_0 augmente : le violet « voit » un indice plus grand que le rouge. Pour un verre courant, $A \simeq 1{,}5$ et $B \simeq 4 \times 10^3\,\text{nm}^2$; le vide n'est pas dispersif.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Lumière du sodium dans l'eau

Une lampe à vapeur de sodium émet à $\lambda_0 = 589\,\text{nm}$. Elle éclaire une cuve d'eau d'indice $n = 1{,}33$.

Q-1) Calculer la fréquence de l'onde et sa célérité dans l'eau.

Q-2) Calculer sa longueur d'onde dans l'eau. Un plongeur voit-il la lampe d'une autre couleur ?

Correction

Q-1) $\nu = c/\lambda_0 = 3{,}00\times10^8/589\times10^{-9} = 5{,}09\times10^{14}\,\text{Hz}$ et $v = c/n = 2{,}26\times10^8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Q-2) $\lambda = \lambda_0/n = 443\,\text{nm}$. La couleur est liée à la *fréquence*, qui est conservée : le plongeur voit toujours du jaune (c'est d'ailleurs la fréquence qui excite les récepteurs de la rétine, situés dans un milieu d'indice voisin de $1{,}34$).

EXERCICE 2 Coefficients de Cauchy d'un verre

On mesure l'indice d'un verre pour deux raies : $n_1 = 1{,}5170$ à $\lambda_1 = 486\,\text{nm}$ (bleu) et $n_2 = 1{,}5100$ à $\lambda_2 = 656\,\text{nm}$ (rouge).

Q-1) Déterminer A et B.

Q-2) En déduire l'indice pour la raie jaune $\lambda_3 = 589\,\text{nm}$.

Correction

Q-1) Par différence, $B = \dfrac{n_1 - n_2}{\lambda_1^{-2} - \lambda_2^{-2}} = \dfrac{0{,}0070}{4{,}234\times10^{-6} - 2{,}324\times10^{-6}}\ \text{nm}^2 = 3{,}66\times10^3\,\text{nm}^2$, puis $A = n_2 - B/\lambda_2^2 = 1{,}5100 - 0{,}0085 = 1{,}5015$.

Q-2) $n_3 = A + B/\lambda_3^2 = 1{,}5015 + 0{,}0106 = 1{,}5121$, bien compris entre n_2 et n_1.

II L'approximation de l'optique géométrique

II.1 Le phénomène de diffraction

Faisons passer un faisceau laser à travers une ouverture de taille a de plus en plus petite. Tant que a reste grande (quelques millimètres), le faisceau est simplement « découpé ». Lorsque a devient de l'ordre de quelques dizaines de longueurs d'onde, le faisceau s'élargit après l'ouverture : c'est la **diffraction**.

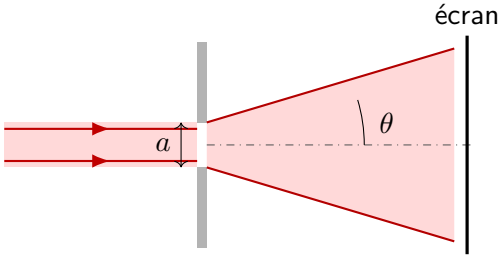


Fig. 3 : Élargissement d'un faisceau par diffraction sur une ouverture de largeur a.

Ordre de grandeur du demi-angle de diffraction R

Pour une onde de longueur d'onde λ traversant une ouverture de taille a, le faisceau diverge avec un demi-angle

$$\theta \sim \frac{\lambda}{a}.$$

La diffraction est négligeable dès que $a \gg \lambda$.

Ordres de grandeur

Pour $\lambda = 0{,}5\,\mu\mathrm{m}$: une fenêtre ($a = 1\,\mathrm{m}$) donne $\theta \sim 10^{-6}$ rad, totalement négligeable ; une pupille ($a = 3\,\mathrm{mm}$) donne $\theta \sim 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$, ce qui limite la finesse de la vision (cf. O3) ; un trou de $50\,\mu\mathrm{m}$ donne $\theta \sim 1 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad}$, effet bien visible sur un écran à $2\,\mathrm{m}$.

Remarque

Trois modèles de la lumière. Selon l'échelle des phénomènes, on décrit la lumière par des *rayons* (optique géométrique : instruments, arc-en-ciel), par une *onde* électromagnétique (optique ondulatoire : diffraction, interférences) ou par un flux de *photons* (optique quantique : effet photoélectrique, laser, cf. Q1). Chaque modèle est une approximation du suivant ; ce chapitre utilise le premier en connaissant ses limites.

II.2 Rayon lumineux et principes de l'optique géométrique

Définition — Approximation de l'optique géométrique R

Lorsque toutes les dimensions caractéristiques du problème (ouvertures, obstacles) sont grandes devant la longueur d'onde, on néglige la diffraction : c'est la limite formelle $\lambda \to 0$. La lumière est alors décrite par des **rayons lumineux** : des courbes orientées le long desquelles se propage l'énergie lumineuse. Un **faisceau** est un ensemble de rayons ; il est cylindrique (rayons parallèles), convergent ou divergent.

Les trois principes R

1. **Propagation rectiligne** : dans un milieu homogène, les rayons lumineux sont des droites.
2. **Indépendance des rayons** : les rayons d'un faisceau n'interagissent pas entre eux ; deux faisceaux qui se croisent ne se perturbent pas.
3. **Retour inverse** : le trajet suivi par la lumière ne dépend pas du sens de parcours.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Un rayon lumineux est un *modèle* : on ne peut pas isoler un rayon unique en diaphragmant un faisceau, car la diffraction finit par l'élargir.
- Le principe d'indépendance tombe en défaut lorsque des faisceaux issus d'une même source se superposent : c'est le phénomène d'*interférences*, qui sort de l'optique géométrique.
- Dans un milieu *inhomogène* (indice variable), les rayons sont courbes (mirages, exercice 11).

II.3 Chemin optique et principe de Fermat

Définition — Chemin optique R

Le long d'une courbe $\mathcal{C}$ allant de A à B dans un milieu d'indice $n(M)$, le chemin optique est

$$(AB) = \int_{\mathcal{C}} n(M)\,\mathrm{d}\ell.$$

Interprétation D. Sur l'élément $\mathrm{d}\ell$, la lumière met la durée $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\ell/v = n\,\mathrm{d}\ell/c$. Donc $(AB) = c\int \mathrm{d}t = c\,\Delta t$: le chemin optique est la distance que parcourrait la lumière *dans le vide* pendant la durée réelle du trajet de A à B.

Principe de Fermat R

Parmi tous les chemins voisins reliant A à B, la lumière suit celui dont le chemin optique (donc la durée de parcours) est **stationnaire** : $\mathrm{d}(AB) = 0$ au premier ordre pour toute petite déformation du trajet. Dans la plupart des situations, il s'agit d'un minimum (formulation historique : « la lumière suit le trajet le plus rapide »).

Ce principe redonne deux des postulats précédents : en milieu homogène, minimiser $(AB) = n\times$ longueur revient à minimiser la longueur, d'où la ligne droite ; la durée d'un trajet ne dépendant pas du sens de parcours, le retour inverse en découle. Il redonne aussi les lois de Snell-Descartes (§ III.2).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 **Le sténopé optimal** ✦✦✧✧✧

Une chambre noire (sténopé) est une boîte de profondeur $d = 10\,\mathrm{cm}$ percée d'un trou de diamètre D ; l'image d'un point lointain se forme sur le fond. On prend $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$.

Q-1) En optique géométrique, quelle est la taille de la tache image d'un point lointain ? Faut-il un trou petit ou grand ?

Q-2) Quelle est la taille de la tache due à la diffraction ? Conclure sur l'existence d'un diamètre optimal et l'estimer.

Correction

Q-1) Les rayons issus d'un point très lointain sont parallèles : la tache a la taille du trou, D. Un petit trou donne une image nette.

Q-2) La diffraction étale la lumière sur un demi-angle $\theta \sim \lambda/D$, d'où une tache de taille $\sim 2d\lambda/D$, qui *augmente* quand D diminue. La tache totale $D + 2\lambda d/D$ est minimale pour $D_{\text{opt}} \sim \sqrt{2\lambda d} = 0{,}33\,\mathrm{mm}$. Les sténopés réels ont bien des trous de quelques dixièmes de millimètre.

III Lois de Snell-Descartes

III.1 Énoncé

Un **dioptre** est une surface séparant deux milieux transparents d'indices différents n_1 et n_2. Un rayon incident qui le rencontre en I donne en général un rayon réfléchi et un rayon réfracté (transmis). On repère les rayons par leurs angles avec la **normale** au dioptre en I ; le plan contenant le rayon incident et la normale est le **plan d'incidence**.

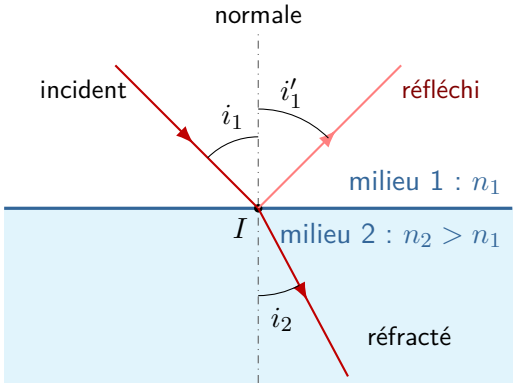


Fig. 4 : Réflexion et réfraction en un point I d'un dioptre.

Lois de Snell-Descartes R

1. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
2. **Réflexion** : $i'_1 = i_1$ (le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale).
3. **Réfraction** :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

☞ Méthode — Exploiter la loi de la réfraction M

- Si $n_2 > n_1$ (vers un milieu plus réfringent), $i_2 < i_1$: le rayon se **rapproche** de la normale ; il existe toujours un rayon réfracté.
- Si $n_2 < n_1$, $i_2 > i_1$: le rayon **s'écarte** de la normale ; le rayon réfracté peut ne pas exister.
- Sous incidence normale ($i_1 = 0$), le rayon n'est pas dévié.
- Pour petits angles : $n_1 i_1 \simeq n_2 i_2$ (loi de Kepler), utile dans les conditions de Gauss (O2).
- En différentiant : $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1} = \dfrac{n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2} > 0$: l'angle de réfraction est une fonction croissante de l'angle d'incidence.
- **Déviation** (angle entre les directions incidente et émergente) : $D = \pi - 2i_1$ pour la réflexion, $D = |i_1 - i_2|$ pour la réfraction.

III.2 Démonstration à partir du principe de Fermat

Loi de la réfraction déduite de Fermat D

Soit A dans le milieu 1 à la hauteur a au-dessus du dioptre plan et B dans le milieu 2 à la profondeur b, séparés horizontalement de d. La lumière passe par un point I d'abscisse x du dioptre ; le chemin optique vaut

$$L(x) = n_1\sqrt{x^2 + a^2} + n_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}.$$

Il est stationnaire pour $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = n_1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - n_2 \dfrac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$. Or $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin i_1$ et $\dfrac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin i_2$: on retrouve $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Réflexion. Si B est dans le milieu 1, à la hauteur b au-dessus du dioptre, $L(x) = n_1\left(\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(d-x)^2+b^2}\right)$ et la même dérivation donne $\sin i_1 = \sin i'_1$, soit $i'_1 = i_1$. La planéité

du trajet (rayons dans le plan d'incidence) vient de ce que tout écart hors de ce plan allongerait le chemin.

Remarque

Un peu d'histoire. La réfraction a été étudiée par Ptolémée (ii^{e} siècle), puis par Ibn Sahl, qui énonce dès 984 une loi équivalente à celle des sinus, et par Ibn al-Haytham, dont le *Traité d'optique* fonde l'optique expérimentale. La loi est retrouvée par Snell (1621) et publiée par Descartes dans *La Dioptrique* (1637) ; Fermat la déduit de son principe vers 1662.

III.3 Réfraction limite et réflexion totale

Angle limite et réflexion totale R D

- Si $n_1 < n_2$: quand i_1 varie de 0 à $\pi/2$, i_2 varie de 0 à l'angle de **réfraction limite** i_ℓ défini par $\sin i_\ell = n_1/n_2$.
- Si $n_1 > n_2$: la loi $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin i_1$ n'a de solution que si $\sin i_1 \leqslant n_2/n_1$. Au-delà de l'angle limite

$$i_\ell = \arcsin\frac{n_2}{n_1},$$

il n'y a plus de rayon réfracté : toute l'énergie est réfléchie, c'est la **réflexion totale**.

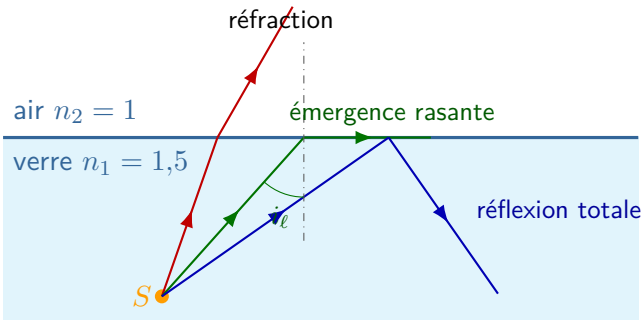


Fig. 5 : Rayons issus d'un point S dans le verre : au-delà de $i_\ell = 41{,}8°$, la lumière ne sort plus.

☞ Méthode — Éviter les erreurs sur l'angle limite M

On ne retient pas de formule par cœur : on écrit la loi de la réfraction et on fait $i = \pi/2$ (incidence ou émergence rasante) dans le milieu le *moins* réfringent. Vérification immédiate : l'argument d'un arcsin doit être inférieur à 1, donc c'est toujours $\arcsin\left(n_{\text{petit}}/n_{\text{grand}}\right)$.

Ordres de grandeur

Angles limites vers l'air : eau $i_\ell = 48{,}8°$; verre ($n = 1{,}5$) $i_\ell = 41{,}8°$; diamant $i_\ell = 24{,}4°$. La petitesse de ce dernier explique que la lumière entrée dans un diamant taillé y subisse de nombreuses réflexions totales avant de ressortir : c'est l'origine de son éclat.

Remarque

La réflexion totale est *réellement* totale (pas de perte, contrairement à un miroir métallique qui absorbe quelques pourcents) : on l'exploite dans les prismes de jumelles, les périscopes, les réfractomètres et

surtout les fibres optiques.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 La fenêtre de Snell

Un poisson nage à la profondeur $h = 1{,}00\,\mathrm{m}$ sous la surface plane d'un lac ($n = 1{,}33$). Il regarde vers le haut.

Q-1) Montrer qu'il voit tout le ciel à l'intérieur d'un cône dont on donnera le demi-angle au sommet.

Q-2) Calculer le rayon R du disque correspondant à la surface de l'eau. Que voit le poisson en dehors de ce disque ?

Correction

Q-1) Par retour inverse, un rayon venant du ciel sous l'incidence $i \in [0, \pi/2]$ se réfracte sous l'angle r tel que $\sin r = \sin i/n$, donc $r \leqslant i_\ell = \arcsin(1/n) = 48{,}8°$. Tout le ciel (hémisphère) est « comprimé » dans un cône de demi-angle i_ℓ.

Q-2) $R = h\tan i_\ell = 1{,}14\,\mathrm{m}$. Hors de ce disque, les rayons qui parviennent au poisson ne peuvent venir de l'air : ce sont des rayons venant du fond, *totalement réfléchis* par la surface, qui se comporte comme un miroir parfait.

EXERCICE 5 Lame à faces parallèles

Une vitre d'épaisseur $e = 5{,}0\,\mathrm{mm}$ et d'indice $n = 1{,}50$ est éclairée sous l'incidence $i = 45°$.

Q-1) Montrer que le rayon émergent est parallèle au rayon incident.

Q-2) Exprimer puis calculer le décalage latéral d entre ces deux rayons.

Q-3) Simplifier d pour une incidence faible. Comment en déduire l'indice de la lame à partir de mesures de e, i et d ?

Correction

Q-1) À l'entrée $\sin i = n\sin r$; les faces étant parallèles, l'incidence sur la face de sortie vaut r, et $n\sin r = \sin i'$ donne $i' = i$: rayons parallèles.

Q-2) Le trajet dans la lame a pour longueur $IJ = e/\cos r$ et fait l'angle $i - r$ avec la direction incidente, d'où $d = IJ\sin(i-r) = e\dfrac{\sin(i-r)}{\cos r}$. Avec $r = \arcsin(\sin 45°/1{,}5) = 28{,}1°$: $d = 1{,}65\,\mathrm{mm}$.

Q-3) Aux petits angles, $r \simeq i/n$, $\cos r \simeq 1$ et $d \simeq e(i-r) = \dfrac{n-1}{n}\,e\,i$. On en tire $n = \dfrac{ei}{ei - d}$. Pour une lame très mince ($e \to 0$), $d \to 0$: le rayon traverse sans déviation ni décalage, propriété utilisée pour le centre d'une lentille mince (O2).

EXERCICE 6 Prisme à réflexion totale

Un prisme de verre d'indice n a pour section un triangle rectangle isocèle. Un rayon pénètre normalement à l'une des faces de l'angle droit.

Q-1) Sous quelle incidence atteint-il l'hypoténuse ?

Q-2) À quelle condition sur n le prisme renvoie-t-il le rayon à angle droit sans perte ? Est-ce réalisable avec un verre usuel ?

Correction

Q-1) Le rayon n'est pas dévié à l'entrée ; il rencontre l'hypoténuse sous l'incidence $45°$.

Q-2) Il faut $45° > i_\ell$, soit $\sin 45° > 1/n$, c'est-à-dire $n > \sqrt{2} \simeq 1{,}41$. Un verre usuel ($n = 1{,}5$) convient : c'est le principe des prismes des jumelles.

IV Application : la fibre optique à saut d'indice

IV.1 Principe du guidage

Une fibre à saut d'indice est un cylindre de verre de rayon a (le **cœur**, d'indice n_c) entouré d'une **gaine** d'indice $n_g < n_c$. Un rayon qui frappe l'interface cœur-gaine avec une incidence supérieure à l'angle limite y subit une réflexion totale et reste piégé dans le cœur : la lumière est guidée, même si la fibre est (légèrement) courbée.

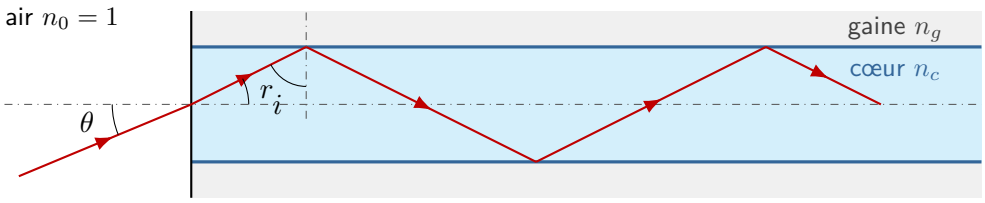


Fig. 6 : Rayon guidé par réflexions totales successives dans le cœur d'une fibre.

IV.2 Cône d'acceptance et ouverture numérique

Ouverture numérique D

Un rayon entre dans la fibre depuis l'air sous l'angle θ avec l'axe. À l'entrée, $\sin\theta = n_c \sin r$; sur l'interface cœur-gaine, l'incidence vaut $i = \frac{\pi}{2} - r$. Il y a réflexion totale si $\sin i \geqslant n_g/n_c$, soit $\cos r \geqslant n_g/n_c$. Alors

$$\sin\theta = n_c \sin r = n_c\sqrt{1-\cos^2 r} \leqslant \sqrt{n_c^2 - n_g^2}.$$

Le rayon est guidé s'il entre dans le cône de demi-angle θ_a tel que

$$\boxed{\mathrm{ON} = \sin\theta_a = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}.}$$

La quantité ON est l'**ouverture numérique** de la fibre.

IV.3 Dispersion intermodale

Tous les rayons guidés ne parcourent pas le même chemin : le rayon axial est le plus rapide, le rayon incliné à la limite de guidage le plus lent.

Élargissement d'une impulsion D

Sur une longueur L de fibre, le rayon axial met $t_{\min} = n_c L/c$. Le rayon limite parcourt $L/\sin i_\ell = L\,n_c/n_g$ à la vitesse c/n_c, soit $t_{\max} = n_c^2 L/(n_g c)$. Une impulsion brève injectée sous tous les angles

ressort donc étalée sur

$$\Delta t = \frac{n_c L}{c}\,\frac{n_c - n_g}{n_g}.$$

Deux impulsions successives ne sont distinguables que si elles sont espacées d'une durée $T > \Delta t$: la fréquence d'émission des bits est limitée à

$$f_{\max} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{c}{n_c L}\,\frac{n_g}{n_c - n_g}.$$

Le débit est d'autant meilleur que les indices sont proches, mais l'ouverture numérique diminue alors : l'injection de la lumière devient plus difficile. Il y a un compromis.

Ordres de grandeur

Pour $n_c = 1{,}50$ et $n_g = 1{,}48$: $\mathrm{ON} = 0{,}24$ ($\theta_a \simeq 14°$) et $\Delta t \simeq 68\,\mathrm{ns}$ par kilomètre, soit un débit limité à environ $15\,\mathrm{Mbit/s}$ sur $1\,\mathrm{km}$. En pratique, les fibres à saut d'indice atteignent quelques dizaines de $\mathrm{Mbit/s}$ sur de courtes distances ; les fibres à *gradient d'indice* (indice décroissant continûment du centre vers le bord, qui égalise les durées de parcours) dépassent le $\mathrm{Gbit/s}$ sur les réseaux locaux, et les liaisons longue distance utilisent des fibres *monomodes* (cœur de quelques micromètres, où l'optique géométrique ne s'applique plus).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 — Caractéristiques d'une fibre

★★☆☆☆

Une fibre à saut d'indice a un cœur d'indice $n_c = 1{,}456$ et une gaine d'indice $n_g = 1{,}410$.

Q-1) Calculer son ouverture numérique et le demi-angle d'acceptance θ_a dans l'air.

Q-2) Que devient θ_a si l'extrémité de la fibre plonge dans l'eau ($n_0 = 1{,}33$) ?

Q-3) Calculer l'élargissement d'une impulsion sur $1\,\mathrm{km}$.

Correction

Q-1) $\mathrm{ON} = \sqrt{1{,}456^2 - 1{,}410^2} = 0{,}363$ et $\theta_a = 21{,}3°$.

Q-2) La relation d'entrée devient $n_0 \sin\theta = n_c \sin r$, donc $\sin\theta_a = \mathrm{ON}/n_0 = 0{,}273$ et $\theta_a = 15{,}8°$: le cône se referme.

Q-3) $\Delta t = \dfrac{1{,}456 \times 10^3}{3{,}00 \times 10^8} \times \dfrac{0{,}046}{1{,}410} = 158\,\mathrm{ns}$.

V Le prisme

V.1 Formules du prisme

Un prisme est un milieu transparent d'indice n limité par deux faces planes formant un dièdre d'angle A (angle au sommet). On l'étudie dans un plan de section principale, perpendiculaire à l'arête, entouré d'air.

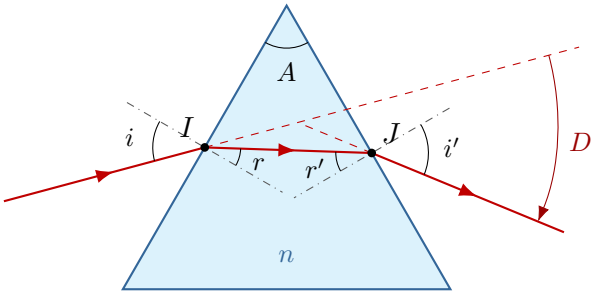


Fig. 7 : Marche d'un rayon dans un prisme d'angle A ; D est l'angle entre les directions incidente (pointillés) et émergente.

Formules du prisme R D

$$\sin i = n \sin r, \qquad \sin i' = n \sin r', \qquad A = r + r', \qquad D = i + i' - A.$$

Démonstration. Les deux premières sont les lois de Descartes en I et J. Les normales en I et J font entre elles l'angle A (angles à côtés perpendiculaires) ; dans le triangle formé par I, J et le point de concours des normales, la somme des angles donne $r + r' = A$. La déviation totale est la somme des déviations en I, $(i - r)$, et en J, $(i' - r')$: $D = i + i' - (r + r') = i + i' - A$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Le rayon peut ne pas émerger : il faut $r' \leqslant i_\ell = \arcsin(1/n)$, donc $r \geqslant A - i_\ell$. Comme $r \leqslant i_\ell$ aussi, deux conditions d'émergence en découlent :

$$A \leqslant 2 \arcsin \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad i \geqslant i_m \quad \text{avec} \quad \sin i_m = n \sin\left(A - \arcsin \frac{1}{n}\right).$$

  Si $A > 2i_\ell$, aucun rayon ne traverse le prisme.
- Un prisme dévie toujours la lumière vers sa **base**.

V.2 Minimum de déviation

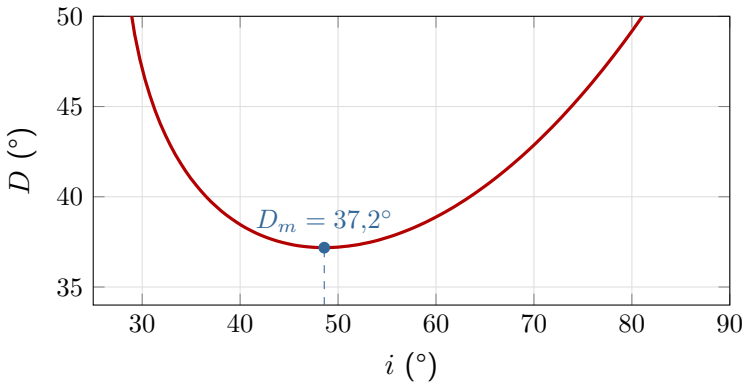


Fig. 8 : Déviation en fonction de l'incidence pour $A = 60°$ et $n = 1{,}5$.

Minimum de déviation R D

La déviation passe par un minimum D_m lorsque le trajet est symétrique : $i = i'$ et $r = r' = A/2$. Alors $i = \frac{A+D_m}{2}$ et

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

Justification qualitative. Par retour inverse, si (i, i') donne la déviation D, alors (i', i) donne la même déviation ; la courbe $D(i)$ prend donc deux fois chaque valeur, sauf en son minimum où nécessairement $i = i'$.

Démonstration analytique du minimum D

On différentie les quatre relations : $\cos i\,\mathrm{d}i = n\cos r\,\mathrm{d}r$, $\cos i'\,\mathrm{d}i' = n\cos r'\,\mathrm{d}r'$, $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}r'$ (car A est fixe) et $\mathrm{d}D = \mathrm{d}i + \mathrm{d}i'$. Il vient

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 - \frac{\cos i\,\cos r'}{\cos r\,\cos i'}.$$

Le minimum impose $\cos i\cos r' = \cos i'\cos r$. En élevant au carré et en éliminant les angles internes par $\cos^2 r = 1 - \sin^2 i/n^2$: $\cos^2 i\,(n^2 - \sin^2 i') = \cos^2 i'\,(n^2 - \sin^2 i)$, soit $(n^2-1)(\cos^2 i - \cos^2 i') = 0$. Comme $n \neq 1$ et que les angles sont dans $[0, \pi/2]$, $i = i'$ puis $r = r' = A/2$.

☞ Méthode — Mesurer un indice au goniomètre M

On éclaire le prisme avec une lampe spectrale, on tourne la plateforme jusqu'à ce que la raie observée dans la lunette « rebrousse chemin » : c'est le minimum de déviation. On repère D_m par différence avec la direction du faisceau non dévié, on mesure A par réflexion sur les deux faces, puis on applique la formule ci-dessus. Le minimum étant plat, la mesure est peu sensible à une erreur de réglage de i : c'est tout l'intérêt de la méthode.

V.3 Dispersion et petits angles

L'indice étant plus grand pour le violet, la déviation l'est aussi : un prisme **décompose** la lumière blanche, le violet étant plus dévié que le rouge. C'est le principe du spectroscope à prisme.

Prisme de petit angle R

Si A et i sont petits, tous les angles le sont et les sinus se confondent avec les angles : $i = nr$, $i' = nr'$, d'où

$$D \simeq (n-1)A,$$

indépendante de l'incidence. Ce résultat servira à comprendre les lentilles minces (O2) : un bord de lentille se comporte localement comme un petit prisme.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Trajet dans un prisme équilatéral

Un prisme d'angle $A = 60°$ et d'indice $n = 1{,}50$ reçoit un rayon sous l'incidence $i = 45°$.

Q-1) Calculer r, r', i' et la déviation D.

Q-2) Calculer la déviation minimale et l'incidence correspondante.

Q-3) Déterminer l'incidence minimale i_0 pour que le rayon émerge.

Correction

Q-1) $\sin r = \sin 45°/1{,}5$ donne $r = 28{,}1°$; $r' = A - r = 31{,}9°$; $\sin i' = 1{,}5 \sin 31{,}9° = 0{,}792$ donc $i' = 52{,}4°$; $D = i + i' - A = 37{,}4°$.

Q-2) $\sin \frac{A+D_m}{2} = n \sin 30° = 0{,}75$ donc $\frac{A+D_m}{2} = 48{,}6°$ et $D_m = 37{,}2°$, obtenue pour $i = 48{,}6°$. On vérifie que la déviation de la question 1 est légèrement supérieure.

Q-3) Il faut $r' \leqslant i_\ell = 41{,}8°$, soit $r \geqslant 18{,}2°$, donc $\sin i_0 = 1{,}5 \sin 18{,}2° = 0{,}468$ et $i_0 = 27{,}9°$.

EXERCICE 9 Petit prisme

Un prisme d'angle $A = 5°$ et d'indice $n = 1{,}52$ est éclairé sous incidence quasi normale. Calculer la déviation. Que devient-elle si le prisme est plongé dans l'eau ($n_e = 1{,}33$) ?

Correction

Dans l'air, $D = (n-1)A = 2{,}6°$. Dans l'eau, les lois de Descartes s'écrivent $n_e i = nr$, d'où $D = \left(\frac{n}{n_e} - 1\right) A = 0{,}71°$: seul compte l'indice *relatif* du prisme par rapport au milieu extérieur.

VI Synthèse

★ À retenir

- Visible : $\lambda_0 \in [400; 800]$ nm. Indice $n = c/v$; $\lambda = \lambda_0/n$, la fréquence est conservée ; loi de Cauchy $n = A + B/\lambda_0^2$.
- Diffraction : $\theta \sim \lambda/a$. L'optique géométrique est valable si toutes les dimensions sont grandes devant λ. Rayons rectilignes en milieu homogène, indépendants, retour inverse.
- Snell-Descartes : $i_1' = i_1$ et $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$; vers un milieu moins réfringent, réflexion totale au-delà de $i_\ell = \arcsin(n_2/n_1)$.
- Fibre : $\mathrm{ON} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$; $\Delta t = \frac{n_c L}{c} \frac{n_c - n_g}{n_g}$.
- Prisme : $A = r + r'$, $D = i + i' - A$; minimum de déviation pour $i = i'$: $n = \sin \frac{A+D_m}{2} / \sin \frac{A}{2}$; petit prisme $D \simeq (n-1)A$.
- Liens : les conditions de Gauss et les lentilles (O2), les instruments (O3), la diffraction et les interférences (programme de seconde année), la dualité onde-corpuscule (Q1).

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 10 L'arc-en-ciel

★★★☆☆

Le Soleil éclaire un rideau de gouttes de pluie sphériques d'indice $n = 1{,}33$. On étudie un rayon qui pénètre dans une goutte sous l'incidence i, subit *une* réflexion à l'intérieur puis ressort.

Q-1) Montrer que la déviation totale vaut $D(i) = \pi + 2i - 4r$ avec $\sin i = n \sin r$.

Q-2) Montrer que D est extrémale pour $\cos^2 i = \dfrac{n^2 - 1}{3}$ et calculer i et D_m.

Q-3) Expliquer pourquoi un observateur, dos au Soleil, voit un arc lumineux ; calculer son rayon angulaire. Quelle couleur est à l'extérieur de l'arc ?

Correction

Q-1) Le triangle formé par le centre et deux points d'impact successifs est isocèle : tous les angles internes valent r. Les déviations successives sont $i - r$ (entrée), $\pi - 2r$ (réflexion), $i - r$ (sortie) : $D = \pi + 2i - 4r$.

Q-2) $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 2 - 4\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$ avec $\cos i = n \cos r \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$. L'extremum impose $2\cos i = n \cos r$, donc $4\cos^2 i = n^2(1 - \sin^2 r) = n^2 - \sin^2 i = n^2 - 1 + \cos^2 i$, d'où $\cos^2 i = \frac{n^2-1}{3}$. Numériquement $i = 59{,}6°$, $r = 40{,}4°$ et $D_m = 137{,}5°$ (c'est un minimum).

Q-3) Au voisinage du minimum, D varie peu : beaucoup de rayons ressortent avec une déviation proche de D_m, d'où une accumulation de lumière dans cette direction. Les gouttes qui renvoient cette lumière vers l'œil sont vues sous l'angle $\pi - D_m = 42{,}5°$ autour de la direction anti-solaire : c'est un cercle. Le rouge (indice plus faible) a un D_m plus faible donc un rayon angulaire plus grand : il est à l'extérieur.

EXERCICE 11 Mirage sur une route chaude

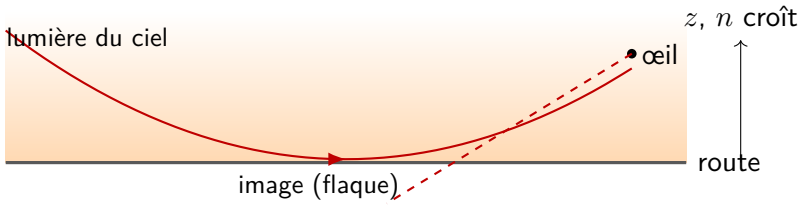
★★★★☆

Au-dessus d'une route surchauffée, l'air est plus chaud et moins dense près du sol ; on modélise l'indice par $n(z) = n_0 + kz$, avec $n_0 \simeq 1$ et $k = 2{,}4 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}$, z étant l'altitude.

Q-1) En découpant l'air en couches minces horizontales, montrer que $n(z)\cos\theta(z)$ est constant le long d'un rayon, θ étant l'angle du rayon avec l'horizontale.

Q-2) Un observateur dont l'œil est à $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ vise le sol devant lui. Quel est l'angle maximal θ_{lim} sous l'horizontale pour lequel il voit, au lieu du sol, l'image du ciel ?

Q-3) En se limitant aux petits angles, montrer que le rayon limite est une parabole ; à quelle distance de l'observateur semble se trouver la « flaque » ?



Correction

Q-1) À l'interface entre deux couches, la loi de Descartes s'écrit $n\sin i = \text{cste}$ avec i l'angle avec la verticale, soit $i = \frac{\pi}{2} - \theta$: $n\cos\theta$ est conservé de couche en couche, donc le long du rayon.

Q-2) Le rayon limite atteint le sol tangentiellement ($\theta = 0$ en $z = 0$) : $n_0 = (n_0 + kh)\cos\theta_{\text{lim}}$. Aux petits angles, $1 - \theta_{\text{lim}}^2/2 \simeq 1 - kh/n_0$ et $\theta_{\text{lim}} = \sqrt{2kh/n_0} = 8{,}5 \times 10^{-3}\,\text{rad} = 0{,}49°$. Tout rayon visé plus près de l'horizontale se recourbe avant le sol et provient du ciel : l'observateur voit un reflet bleuté, interprété comme de l'eau.

Q-3) En notant $z(x)$ le rayon, $\tan\theta = z'$ et $n\cos\theta = n_0$ donnent $n^2 = n_0^2(1 + z'^2)$. En dérivant : $2nk\,z' = 2n_0^2 z' z''$, soit $z'' = nk/n_0^2 \simeq k$. Le rayon tangent au sol est la parabole $z = \frac{k}{2}x^2$, l'origine étant au point de tangence. Elle passe par l'œil pour $x = \sqrt{2h/k} = 354\,\text{m}$: la flaque apparaît à environ $350\,\text{m}$, et recule quand on avance.

EXERCICE 12 Réfractomètre à angle limite

★★★☆☆

On dépose une goutte de liquide d'indice n inconnu sur la face horizontale d'un prisme d'indice $N = 1{,}700$ connu ($n < N$). On éclaire la goutte sous toutes les incidences, y compris rasantes.

Q-1) Montrer que, dans le prisme, les rayons réfractés sont contenus dans un cône limité par l'angle r_ℓ tel que $n = N\sin r_\ell$. Qu'observe-t-on dans une lunette visant ces rayons à travers une face latérale ?

Q-2) On mesure $r_\ell = 51{,}6°$. Calculer n ; quel peut être ce liquide ?

Q-3) Quelle précision sur r_ℓ faut-il pour obtenir n à 10^{-3} près ?

Correction

Q-1) En passant du liquide au prisme, $n\sin i = N\sin r$; l'incidence rasante $i = \pi/2$ donne la réfraction limite $\sin r_\ell = n/N$. Aucun rayon ne se propage dans le prisme au-delà de r_ℓ : la lunette voit un champ partagé en une zone claire et une zone sombre, la frontière nette repérant r_ℓ.

Q-2) $n = 1{,}700 \times \sin 51{,}6° = 1{,}332$: c'est de l'eau.

Q-3) $\Delta n = N\cos r_\ell\,\Delta r_\ell$ donne $\Delta r_\ell = 9{,}5 \times 10^{-4}\,\text{rad} \simeq 3'$ d'arc, précision accessible sans difficulté avec un vernier goniométrique.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 13 Transmission par fibre optique

★★★☆☆

Une fibre à saut d'indice de longueur L a un cœur d'indice n_1 et une gaine d'indice $n_2 < n_1$. Elle est placée dans l'air.

Q-1) Établir la condition sur l'angle d'entrée θ pour que le rayon soit guidé. Application : $n_1 = 1{,}456$, $n_2 = 1{,}410$.

Q-2) Exprimer la durée de parcours d'un rayon d'angle d'entrée θ en fonction de L, c, n_1 et de l'angle de réfraction r. En déduire l'élargissement Δt d'une impulsion contenant tous les rayons guidés.

Q-3) On code l'information par impulsions espacées de T. Quelle longueur maximale permet un débit de $10\,\text{Mbit/s}$? Comment améliorer la situation ?

Correction

Q-1) Guidage si $\sin\theta \leqslant \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0{,}363$, soit $\theta \leqslant 21{,}3°$ (démonstration du cours).

Q-2) Le rayon progresse de L le long de l'axe en parcourant $L/\cos r$ à la vitesse c/n_1 : $\tau(r) = \dfrac{n_1 L}{c\cos r}$. L'angle r varie de 0 à $r_{\max}$ avec $\cos r_{\max} = n_2/n_1$, d'où $\Delta t = \dfrac{n_1 L}{c}\left(\dfrac{n_1}{n_2} - 1\right)$, soit $158\,\text{ns}\cdot\text{km}^{-1}$.

Q-3) Il faut $\Delta t < T = 100\,\text{ns}$, donc $L < 630\,\text{m}$. On améliore en réduisant $n_1 - n_2$ (au prix d'une ouverture numérique plus faible), en utilisant une fibre à gradient d'indice, ou une fibre monomode.

EXERCICE 14 Spectroscope à prisme

★★★☆☆

Un prisme d'angle $A = 60{,}0°$ est éclairé par une lampe à hydrogène. Au minimum de déviation, on mesure $D_m = 38{,}0°$ pour la raie rouge ($\lambda_R = 656\,\text{nm}$) et $D_m = 38{,}9°$ pour la raie bleue ($\lambda_B = 486\,\text{nm}$).

Q-1) Calculer les indices n_R et n_B.

Q-2) En déduire les coefficients de Cauchy A_C et B_C du verre.

Q-3) Une raie inconnue donne $D_m = 38{,}6°$. Déterminer sa longueur d'onde.

Correction

Q-1) $n = \sin\frac{A+D_m}{2}/\sin 30° = 2\sin\frac{A+D_m}{2}$: $n_R = 2\sin 49{,}0° = 1{,}5094$ et $n_B = 2\sin 49{,}45° = 1{,}5197$.

Q-2) $B_C = \dfrac{n_B - n_R}{\lambda_B^{-2} - \lambda_R^{-2}} = \dfrac{0{,}0103}{4{,}234 - 2{,}324}\ \mu\text{m}^2 = 5{,}4\times10^{-3}\,\mu\text{m}^2$ et $A_C = n_R - B_C/\lambda_R^2 = 1{,}497$.

Q-3) $n = 2\sin 49{,}3° = 1{,}5163$, puis $\lambda = \sqrt{B_C/(n - A_C)} = \sqrt{5{,}4\times10^{-3}/0{,}0193}\ \mu\text{m} = 0{,}53\,\mu\text{m}$ (vert). La précision est limitée : une erreur de $1'$ sur D_m change n de 2×10^{-4} environ.

EXERCICE 15 Prisme immergé et réflexion totale

★★☆☆☆

Un prisme d'angle $A = 60°$ et d'indice $n = 1{,}50$ est plongé dans un liquide d'indice n_ℓ.

Q-1) Écrire les formules du prisme dans ce cas.

Q-2) Dans l'air, montrer qu'un rayon arrivant normalement sur la première face ne ressort pas par la seconde. Que se passe-t-il ?

Q-3) Quel doit être l'indice minimal du liquide pour que ce rayon émerge ?

Correction

Q-1) $n_\ell \sin i = n\sin r$, $n_\ell \sin i' = n\sin r'$, $A = r + r'$, $D = i + i' - A$ (la géométrie ne change pas).

Q-2) Sous incidence normale $r = 0$, donc $r' = A = 60° > i_\ell = 41{,}8°$: réflexion totale sur la seconde face ; le rayon est renvoyé vers la base.

Q-3) Il faut $n\sin 60° \leqslant n_\ell$, soit $n_\ell \geqslant 1{,}30$: dans l'eau ($n_\ell = 1{,}33$), le rayon émerge, avec $\sin i' = 1{,}30/1{,}33$, soit $i' = 77{,}7°$.