LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

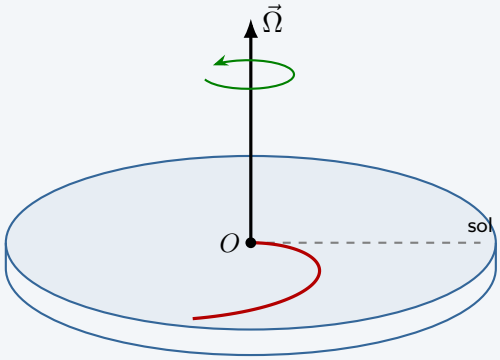
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M8

MÉCANIQUE

Dynamique dans un référentiel non galiléen

Vecteur rotation — Composition des vitesses et des accélérations — Forces d'inertie — Référentiel tournant — Poids, marées, Coriolis



trajectoire vue du manège

« *Vous êtes invité à venir voir tourner la Terre.*

— Léon Foucault, carton d'invitation à l'Observatoire de Paris (février 1851)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Référentiel tournant »

M8 — Référentiels non galiléens

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Caractériser le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre : translation, rotation uniforme autour d'un axe fixe ; vecteur rotation.
- Utiliser la relation de dérivation vectorielle et établir les lois de composition des vitesses et des accélérations ; définir le point coïncident.
- Écrire le PFD, le TMC et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen en introduisant les forces d'inertie.
- Exprimer la force d'inertie d'entraînement en translation et en rotation uniforme ; utiliser l'énergie potentielle centrifuge pour un équilibre relatif.
- Discuter le caractère galiléen approché des référentiels usuels ; interpréter le poids, les marées et les effets de la force de Coriolis.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Référentiel tournant » montre un projectile lancé sur un manège : sa trajectoire est rectiligne vue du sol, mais s'incurve sous l'effet de la force de Coriolis vue depuis le manège.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre . . . 3
I.1 Translation . . . 3
I.2 Rotation autour d'un axe fixe ; vecteur rotation . . . 3
I.3 Relation de dérivation vectorielle . . . 4
II Composition des mouvements . . . 4
II.1 Composition des vitesses . . . 4
II.2 Composition des accélérations . . . 5
III Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen . . . 6
III.1 Relativité galiléenne . . . 6
III.2 Forces d'inertie . . . 6
III.3 Théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique . . . 7
III.4 Référentiel en translation . . . 7
IV Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe . . . 9
IV.1 Force centrifuge et force de Coriolis . . . 9
IV.2 Équilibre relatif . . . 9
V Caractère galiléen des référentiels usuels et dynamique terrestre . . . 10
V.1 Les référentiels usuels . . . 10
V.2 Le poids . . . 11
V.3 Les marées . . . 11
V.4 Effets de la force de Coriolis terrestre . . . 12
VI Synthèse . . . 12
VII Exercices d'approfondissement . . . 13
VIII Classiques des concours . . . 14

I Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

Les lois de Newton (chapitre M2) ne sont valables que dans un référentiel **galiléen**. Or on observe souvent un mouvement depuis un référentiel qui accélère ou qui tourne : voiture, manège, Terre elle-même. Ce chapitre établit comment relier les descriptions dans deux référentiels, puis comment écrire les lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

On considère un référentiel $\mathcal{R}$ (dit **absolu**, d'origine O, de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$) et un référentiel $\mathcal{R}'$ (dit **relatif**, d'origine O', de base $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ liée à $\mathcal{R}'$). Le temps est le même dans les deux référentiels (mécanique classique).

I.1 Translation

Définition — Référentiel en translation R

$\mathcal{R}'$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}$ si les vecteurs de sa base gardent une direction fixe dans $\mathcal{R}$. Le mouvement de $\mathcal{R}'$ est alors entièrement décrit par celui de son origine O'.

- **Translation rectiligne** : O' décrit une droite (wagon sur une voie rectiligne, ascenseur) ; elle est **uniforme** si $\vec{v}(O'/\mathcal{R})$ est constant.
- **Translation circulaire** : O' décrit un cercle mais les axes gardent une direction fixe (nacelle de grande roue, référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique).

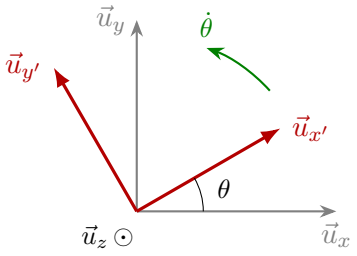
✗ Attention, erreurs fréquentes

Ne pas confondre translation circulaire et rotation : la nacelle d'une grande roue décrit un cercle, mais elle reste horizontale ; ses axes ne tournent pas.

I.2 Rotation autour d'un axe fixe ; vecteur rotation

On suppose maintenant que $O' = O$ et que $\mathcal{R}'$ tourne autour de l'axe $(O\vec{u}_z)$, fixe dans les deux référentiels ($\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$). On repère l'orientation de $\mathcal{R}'$ par l'angle $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{u}_{x'})$. Les vecteurs $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ jouent le rôle de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ de la base polaire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\,\vec{u}_{y'} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{x'}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_{x'} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{y'}.$$



Définition — Vecteur rotation instantanée R

Le vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\,\vec{u}_z$$

Sa direction est l'axe de rotation, sa norme $\left|\dot{\theta}\right|$ la vitesse angulaire, son sens donné par la règle de la main droite. Pour tout vecteur $\vec{u}$ fixe dans $\mathcal{R}'$: $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$. En translation, $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

I.3 Relation de dérivation vectorielle

Formule de dérivation vectorielle (formule de Bour) R

Pour tout vecteur $\vec{A}(t)$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}$$

Justification D *:* on décompose $\vec{A} = A_{x'}\vec{u}_{x'} + A_{y'}\vec{u}_{y'} + A_{z'}\vec{u}_{z'}$. Dans $\mathcal{R}'$, seules les composantes varient : $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \dot{A}_{x'}\vec{u}_{x'} + \dot{A}_{y'}\vec{u}_{y'} + \dot{A}_{z'}\vec{u}_{z'}$. Dans $\mathcal{R}$, il faut aussi dériver les vecteurs de base, ce qui ajoute $A_{x'}\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_{x'} + A_{y'}\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_{y'} + A_{z'}\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_{z'} = \vec{\Omega}\wedge\vec{A}$.

Remarque

Propriétés utiles : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, et pour trois référentiels, $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3}$ (relation de Chasles). De plus $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$; et la dérivée d'un vecteur ne dépend du référentiel que si celui-ci tourne. En translation, les deux dérivées sont égales.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 **Vecteur rotation de bases usuelles** ✦✧✧✧✧

Q-1) Un point M est repéré en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Quel est le vecteur rotation, par rapport à $\mathcal{R}$, de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$? Retrouver $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}$.

Q-2) Calculer la norme du vecteur rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique (jour sidéral $86\,164\,\mathrm{s}$) et de la Terre autour du Soleil.

II Composition des mouvements

II.1 Composition des vitesses

On note $\vec{v}_a = \vec{v}(M/\mathcal{R})$ la vitesse **absolue** et $\vec{v}_r = \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ la vitesse **relative**.

Composition des vitesses R D

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad \text{avec} \qquad \vec{v}_e = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

Démonstration : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, et on dérive dans $\mathcal{R}$ en utilisant la formule de dérivation vectorielle pour $\overrightarrow{O'M}$: $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}_r + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$.

Définition — Point coïncident R

Le **point coïncident** P est le point **fixe dans** $\mathcal{R}'$ qui coïncide avec M à l'instant t. La vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ est la vitesse de P dans $\mathcal{R}$: c'est la vitesse qu'aurait M s'il était « entraîné »

par $\mathcal{R}'$ sans bouger dans $\mathcal{R}'$.

II.2 Composition des accélérations

Composition des accélérations R D

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

- accélération d'entraînement (accélération du point coïncident) : $\vec{a}_e = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \dfrac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$;
- accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

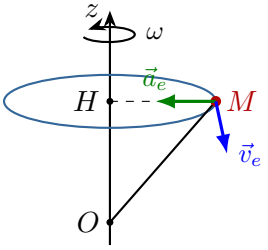
Démonstration. On dérive $\vec{v}_a = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ dans $\mathcal{R}$, terme à terme :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{a}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right).$$

En regroupant, le terme $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ apparaît **deux fois** : c'est l'origine du facteur 2 de l'accélération de Coriolis.

	Translation	**Rotation uniforme autour de** (Oz)**,** $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$
$\vec{v}_e$	$\vec{v}(O'/\mathcal{R})$	$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\,\vec{u}_\theta$
$\vec{a}_e$	$\vec{a}(O'/\mathcal{R})$	$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega^2\overrightarrow{HM}$ (H projeté de M sur l'axe)
$\vec{a}_c$	$\vec{0}$	$2\omega\vec{u}_z \wedge \vec{v}_r$

Démonstration du cas de la rotation D : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{OH}$ colinéaire à $\vec{u}_z$, donc $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{HM}$, vecteur orthoradial de norme ωHM. En appliquant à nouveau $\omega\vec{u}_z\wedge$ à ce vecteur orthoradial, on obtient $-\omega^2\overrightarrow{HM}$: le point coïncident décrit un cercle de centre H à vitesse angulaire ω, son accélération est **centripète**.



✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\vec{a}_e$ n'est **pas** la dérivée de $\vec{v}_e$, et $\vec{a}_r$ n'est pas la dérivée de $\vec{v}_r$ dans $\mathcal{R}$: seule la décomposition complète $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ est correcte.
- L'accélération de Coriolis est nulle si $\mathcal{R}'$ est en translation, ou si M est immobile dans $\mathcal{R}'$, ou si $\vec{v}_r$ est parallèle à $\vec{\Omega}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 Traversée d'une rivière ✦✦✧✧✧

Une rivière de largeur $d = 100\,\mathrm{m}$ coule à la vitesse uniforme $u = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Un nageur nage à $v = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par rapport à l'eau.

Q-1) Il nage perpendiculairement au courant (par rapport à l'eau). Calculer la durée de la traversée et la dérive.

Q-2) Dans quelle direction doit-il nager pour arriver juste en face de son point de départ ? Durée ?

Q-3) Quelle direction minimise la durée de la traversée ? Est-il toujours possible d'arriver juste en face ?

EXERCICE 3 Point sur un plateau tournant : deux calculs ✦✦✧✧✧

Un plateau tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz). Un point M se déplace sur un rayon du plateau à vitesse constante v_0 par rapport au plateau : $r = v_0 t$.

Q-1) Calculer $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$ directement en coordonnées polaires dans $\mathcal{R}$ ($\dot{\theta} = \omega$).

Q-2) Retrouver ces résultats par la composition des mouvements et identifier chaque terme.

III Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen

III.1 Relativité galiléenne

Référentiels galiléens R

Les forces d'interaction (gravitation, forces électromagnétiques, contact) ne dépendent pas du référentiel en mécanique classique. Si $\mathcal{R}$ est galiléen et si $\mathcal{R}'$ est en **translation rectiligne uniforme** par rapport à $\mathcal{R}$, alors $\vec{a}_e = \vec{0}$, $\vec{a}_c = \vec{0}$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_r$: $\mathcal{R}'$ est aussi galiléen. Réciproquement, deux référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Aucune expérience de mécanique réalisée à l'intérieur d'un référentiel galiléen ne permet de mettre en évidence son mouvement de translation uniforme : c'est le **principe de relativité** de Galilée (le passager d'un bateau naviguant sur une mer calme ne peut déceler son mouvement).

III.2 Forces d'inertie

PFD dans un référentiel non galiléen R D

Si $\mathcal{R}$ est galiléen et $\mathcal{R}'$ en mouvement connu par rapport à $\mathcal{R}$:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

avec la **force d'inertie d'entraînement** $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ et la **force d'inertie de Coriolis** $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$.

Démonstration : PFD dans $\mathcal{R}$ galiléen, $m\vec{a}_a = \sum \vec{F}$, puis $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Les forces d'inertie ne traduisent **aucune interaction** : elles n'ont pas de « réaction » au sens de la troisième loi de Newton. Elles n'existent que dans le référentiel non galiléen.

- On les écrit soit dans $\mathcal{R}'$ (avec forces d'inertie), soit dans $\mathcal{R}$ (sans) : jamais les deux à la fois.
- Dans $\mathcal{R}$, il n'y a pas de « force centrifuge » : un objet en mouvement circulaire subit une force réelle **centripète**.

III.3 Théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique

TMC et TEC dans un référentiel non galiléen R D

Pour un point A fixe dans $\mathcal{R}'$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A(M/\mathcal{R}')}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ic})$$

$$\frac{\mathrm{d}E_c(M/\mathcal{R}')}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}') + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}/\mathcal{R}')$$

La force de Coriolis **ne travaille pas** dans $\mathcal{R}'$: $\vec{f}_{ic}\cdot\vec{v}_r = -2m(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r)\cdot\vec{v}_r = 0$.

Démonstration : on reprend les démonstrations des chapitres M4 et M6 dans $\mathcal{R}'$, à partir du PFD avec forces d'inertie.

III.4 Référentiel en translation

En translation, $\vec{\Omega} = \vec{0}$:

$$\vec{f}_{ie} = -m\,\vec{a}(O'/\mathcal{R}) \qquad \vec{f}_{ic} = \vec{0}$$

La force d'inertie est **opposée à l'accélération du référentiel** : c'est la sensation d'être plaqué contre son siège quand une voiture accélère, ou projeté vers l'avant quand elle freine. Pour une translation d'accélération constante, $\vec{f}_{ie}$ est uniforme et constante, comme un poids supplémentaire : elle dérive de $E_p = m\,\vec{a}(O')\cdot\overrightarrow{O'M}$.

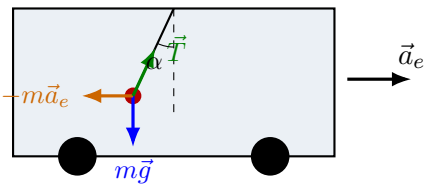


Fig. 1 : Pendule dans un véhicule qui accélère : équilibre relatif pour $\tan\alpha = a_e/g$, le pendule penche vers l'arrière.

Remarque

Impesanteur. Dans un référentiel en chute libre (cabine d'ascenseur dont le câble a cassé, station spatiale en orbite), l'accélération d'entraînement est égale au champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$: la force d'inertie $-m\vec{\mathcal{G}}$ compense exactement l'attraction. Les objets y « flottent » bien que la gravitation soit encore, pour l'ISS, égale à environ $90\,\%$ de sa valeur au sol.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Pèse-personne dans un ascenseur

Une personne de masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ se tient sur un pèse-personne (gradué en kilogrammes avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) dans un ascenseur. Quelle masse indique la balance lorsque l'ascenseur (a) monte à vitesse constante, (b) démarre vers le haut avec une accélération de $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, (c) freine en descendant avec une décélération de $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, (d) est en chute libre ?

EXERCICE 5 Pendule dans un wagon

Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) est suspendu au plafond d'un wagon qui accélère horizontalement avec $a = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-1) Déterminer l'angle α du fil avec la verticale à l'équilibre relatif. De quel côté penche-t-il ?

Q-2) Montrer que tout se passe comme si le pendule était soumis à une pesanteur effective $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$. En déduire la période des petites oscillations autour de l'équilibre relatif.

EXERCICE 6 Le pendule simple vu depuis son fil

On reprend le pendule simple (O fixe, longueur ℓ, angle $\theta(t)$ avec la verticale descendante) et on l'étudie dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au fil, en rotation autour de $(O\vec{u}_z)$ avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ (rotation **non uniforme**).

Q-1) Que valent $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$ et la force de Coriolis ?

Q-2) Calculer l'accélération d'entraînement de M et la force d'inertie d'entraînement.

Q-3) En écrivant l'équilibre de M dans $\mathcal{R}'$, retrouver l'équation du mouvement et la tension du fil.

IV Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

IV.1 Force centrifuge et force de Coriolis

Forces d'inertie en rotation uniforme R D

Pour $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$ constant et $O' = O$ sur l'axe :

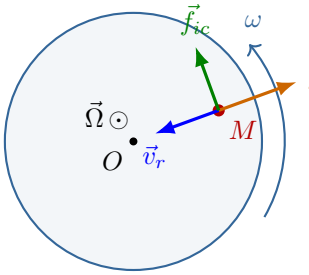
$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2\,\overrightarrow{HM} \qquad \vec{f}_{ic} = -2m\,\omega\vec{u}_z \wedge \vec{v}_r$$

La force d'inertie d'entraînement, perpendiculaire à l'axe et dirigée vers l'extérieur, est la **force centrifuge**. Elle est conservative, d'**énergie potentielle centrifuge**

$$E_{p,\text{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

où $r = HM$ est la distance à l'axe.

Démonstration : en coordonnées cylindriques d'axe (Oz), $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r\vec{u}_r$ et $\delta W = \vec{f}_{ie}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = m\omega^2 r\,\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)$.



vue de dessus

Sur un manège tournant dans le sens direct (vu de dessus), un objet qui se déplace vers le centre est dévié par la force de Coriolis **vers la droite** de son mouvement relatif. De façon générale, pour $\vec{\Omega}$ dirigé vers le haut, la force de Coriolis dévie tout mouvement horizontal vers la droite.

IV.2 Équilibre relatif

☞ Méthode — Étudier un équilibre relatif dans un référentiel tournant M

1. Se placer dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ et faire le bilan : forces réelles, force centrifuge, force de Coriolis.
2. À l'équilibre relatif $\vec{v}_r = \vec{0}$: la force de Coriolis est nulle. Elle ne travaille jamais, donc ne modifie ni les positions d'équilibre ni l'énergie.
3. Pour un système à un degré de liberté, écrire l'énergie potentielle totale $E_p^{\text{tot}} = E_p + E_{p,\text{cf}}$: les équilibres relatifs sont ses extrema, et un **minimum** correspond à un équilibre **stable**.

Ordres de grandeur

- Manège tournant à un tour en $6\,\text{s}$: $\omega = 1{,}05\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour une personne de $60\,\text{kg}$ à $3\,\text{m}$ de l'axe, force centrifuge $m\omega^2 r = 197\,\text{N}$; si elle marche à $1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, force de Coriolis $2m\omega v = 126\,\text{N}$: du même ordre !
- Centrifugeuse de laboratoire à $10\,000$ tours par minute, $r = 10\,\text{cm}$: $\omega^2 r \approx 1{,}1\times10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 10^4\,g$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 **Anneau sur une tige tournante** ✦✦✧✧✧

Une tige horizontale tourne autour d'un axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante ω. Un anneau M de masse m glisse sans frottement sur la tige ; on note $r = OM$. À $t = 0$, $r = r_0$ et $\dot{r} = 0$.

Q-1) Faire le bilan des forces dans le référentiel de la tige. Établir l'équation du mouvement et la résoudre.

Q-2) Déterminer la réaction de la tige. Quelle force la composante orthoradiale compense-t-elle ?

Q-3) Retrouver l'équation du mouvement par l'énergie dans le référentiel de la tige.

EXERCICE 8 **Ressort sur une tige tournante** ✦✦✦✧✧

L'anneau précédent est maintenant relié à O par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

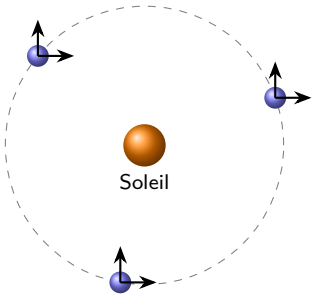
Q-1) Écrire l'énergie potentielle totale dans le référentiel de la tige. Déterminer la position d'équilibre relatif r_e et sa condition d'existence.

Q-2) Étudier sa stabilité et calculer la pulsation des petites oscillations.

V Caractère galiléen des référentiels usuels et dynamique terrestre

V.1 Les référentiels usuels

- **Copernic** : centre de masse du système solaire, axes vers trois étoiles lointaines. Galiléen avec une excellente approximation.
- **Héliocentrique (Kepler)** : centre du Soleil, axes parallèles à ceux de Copernic ; quasiment confondu avec lui.
- **Géocentrique** : centre de la Terre, axes parallèles à ceux de Copernic ; en translation quasi circulaire (période $1\,\mathrm{an}$). Galiléen pour des durées courtes devant l'année, à l'effet de marée près.
- **Terrestre** : lié à la Terre, en rotation uniforme par rapport au géocentrique autour de l'axe des pôles, à $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Galiléen pour des expériences brèves et de faible extension.



référentiel géocentrique : axes de directions fixes

☞ Méthode — Choisir le référentiel d'étude M

Un référentiel peut être considéré comme galiléen si la durée de l'expérience est petite devant la période de son mouvement par rapport à un référentiel galiléen, ou plus précisément si les forces d'inertie sont négligeables devant les autres forces. Étude d'un satellite : géocentrique ; d'une planète : héliocentrique ; d'une expérience de laboratoire : terrestre, sauf si l'on cherche les effets de la rotation de la Terre (Foucault, déviation vers l'est).

V.2 Le poids

Définition — Poids R

Le poids d'un corps est l'opposé de la force qu'exerce sur lui un fil à plomb qui le maintient immobile dans le référentiel terrestre. La direction du fil à plomb définit la **verticale** du lieu.

À l'équilibre dans le référentiel terrestre ($\vec{v}_r = \vec{0}$, Coriolis nulle), le géocentrique étant supposé galiléen :

$$m\vec{g} = m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\Omega^2\overrightarrow{HM}$$

Le poids inclut l'attraction terrestre et la force centrifuge due à la rotation propre. On utilise ici l'égalité de la masse **grave** (qui intervient dans la gravitation) et de la masse **inerte** (qui intervient dans $m\vec{a}$ et dans les forces d'inertie) : sans elle, la direction du fil à plomb dépendrait de la nature du corps.

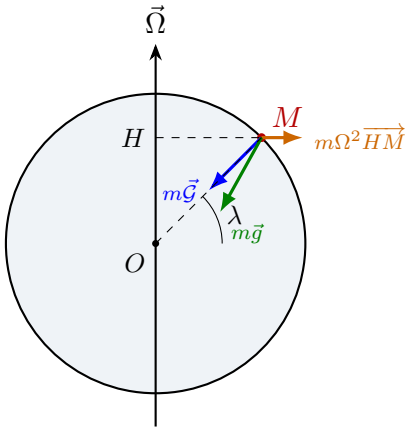


Fig. 2 : Le terme centrifuge est exagéré ici.

- Le terme centrifuge vaut au plus $\Omega^2 R_T = 0{,}034\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, soit $0{,}3\,\%$ de g, à l'équateur ; il est nul aux pôles.
- g dépend donc de la latitude : $g_{\text{pôle}} = 9{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $g_{\text{équateur}} = 9{,}78\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (l'aplatissement de la Terre renforce l'effet).
- La verticale ne passe pas exactement par le centre de la Terre : l'écart maximal, à $45°$ de latitude, vaut $\frac{\Omega^2 R_T}{2g} \approx 1{,}7\times10^{-3}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}1°$.

V.3 Les marées

Le référentiel géocentrique n'est pas rigoureusement galiléen : il est en translation, avec l'accélération du centre T de la Terre, $\vec{a}(T) = \vec{\mathcal{G}}_L(T) + \vec{\mathcal{G}}_S(T) + \dots$ due aux astres extérieurs. Dans ce référentiel, un point M subit, en plus de l'attraction terrestre, l'attraction de la Lune et la force d'inertie $-m\vec{\mathcal{G}}_L(T)$. Leur somme est le **terme de marée** :

$$\vec{C}(M) = m\left[\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)\right]$$

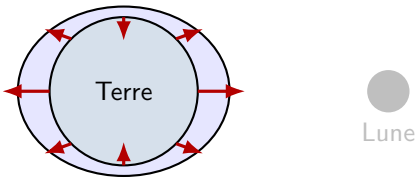


Fig. 3 : Terme de marée : deux bourrelets opposés.

Ce terme est dirigé vers la Lune au point le plus proche, et dans la direction **opposée** au point diamétralement opposé (la Lune y attire moins que le centre de la Terre) : d'où **deux bourrelets** et deux marées hautes par jour lunaire (période $\approx 12\,\mathrm{h}\,25\,\mathrm{min}$). Sur l'axe Terre–Lune, à la distance d, $\left\|\vec{C}\right\| \approx \dfrac{2\mathcal{G}M_L m\,R_T}{d^3}$: la décroissance en $1/d^3$ explique que l'effet de la Lune soit environ $2{,}2$ fois celui du Soleil, bien plus massif mais plus lointain. Marées de vives-eaux quand les deux astres sont alignés (nouvelle et pleine lune), de mortes-eaux en quadrature.

V.4 Effets de la force de Coriolis terrestre

Ordres de grandeur

Pour une vitesse relative v, $\frac{f_{ic}}{mg} \sim \frac{2\Omega v}{g}$: environ $1{,}5 \times 10^{-4}$ pour $v = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pour une voiture à $108\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ à $45°$ de latitude, la composante horizontale vaut $2\Omega v \sin\lambda \approx 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Effet négligeable au laboratoire, mais essentiel à grande échelle et sur des durées longues.

- **Vents et cyclones** : dans l'hémisphère nord, les masses d'air allant vers une dépression sont déviées vers la droite, d'où un enroulement dans le sens trigonométrique autour des dépressions (sens inverse dans l'hémisphère sud).
- **Pendule de Foucault** (1851) : le plan d'oscillation tourne par rapport au sol à la vitesse angulaire $\Omega \sin\lambda$ (sens horaire dans l'hémisphère nord). Il fait un tour en $32\,\mathrm{h}$ à Paris ($49°$ N) et en $43\,\mathrm{h}$ à Casablanca ($33{,}6°$ N).
- **Déviation vers l'est** d'un corps en chute libre (voir les classiques des concours).
- L'écoulement d'un lavabo n'est **pas** gouverné par la force de Coriolis : il est dominé par les mouvements résiduels de l'eau.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 9 **Poids et verticale du lieu** ✦✦✧✧✧

On note $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$ et $\mathcal{G}_0 = 9{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ la valeur (supposée uniforme en surface) du champ de gravitation terrestre ; λ est la latitude.

Q-1) Exprimer les composantes du poids selon la direction radiale et selon la direction orthogonale (vers le nord), en fonction de λ.

Q-2) En déduire g à l'équateur et l'angle entre la verticale et la direction du centre de la Terre à $\lambda = 45°$.

EXERCICE 10 **Lune ou Soleil ?** ✦✧✧✧✧

Comparer les termes de marée dus à la Lune ($M_L = 7{,}35 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$, $d_L = 3{,}84 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$) et au Soleil ($M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $d_S = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$). Calculer l'ordre de grandeur de l'accélération de marée lunaire et la comparer à g.

VI Synthèse

★ À retenir

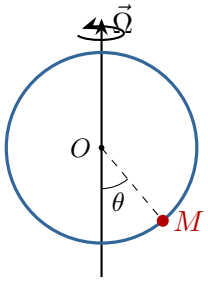
Dérivation vectorielle	$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right\|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right\|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$
Vitesses	$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad \vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$
Accélérations	$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$
PFD dans $\mathcal{R}'$	$m\vec{a}_r = \sum \vec{F} - m\vec{a}_e - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$
Translation	$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O'), \quad \vec{f}_{ic} = \vec{0}$
Rotation uniforme	$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}, \quad E_{p,\mathrm{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) = 0$
Poids	$m\vec{g} = m\vec{\mathcal{G}}_T + m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$
Marée	$\vec{C} = m\left[\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)\right], \quad C \approx \frac{2\mathcal{G}M_L m R_T}{d^3}$

- Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.
- Les forces d'inertie ne sont pas des interactions ; on ne les écrit que dans le référentiel non galiléen.
- Copernic ≈ héliocentrique (excellent) ; géocentrique (durées $\ll 1\,\text{an}$) ; terrestre (durées $\ll 1\,\text{jour}$).

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 11 Perle sur un cerceau tournant (régulateur de Watt)

Une perle de masse m glisse sans frottement sur un cerceau vertical de centre O et de rayon R, qui tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical. On repère la perle par l'angle θ avec la verticale descendante.



Q-1) Exprimer l'énergie potentielle totale dans le référentiel du cerceau.

Q-2) Déterminer les positions d'équilibre relatif et discuter leur stabilité selon la valeur de ω par rapport à $\omega_c = \sqrt{g/R}$.

Q-3) Tracer l'allure de $\theta_e(\omega)$. Expliquer le principe du régulateur à boules de Watt.

EXERCICE 12 Rondelle sur une demi-sphère accélérée

Une rondelle ponctuelle est posée au sommet d'une demi-sphère fixe de rayon R, solidaire d'une plate-forme qui démarre avec une accélération horizontale constante $\vec{a}$. On néglige les frottements et on repère la rondelle par l'angle θ avec la verticale.

Q-1) Dans le référentiel de la plate-forme, faire le bilan des forces. Dans quel sens la rondelle glisse-t-elle ?

Q-2) Établir $R\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, puis la réaction normale $N(\theta)$.

Q-3) Déterminer l'angle de décollage pour $a = g$. Comparer au cas $a = 0$ (rondelle légèrement poussée).

EXERCICE 13 Pendule conique et tachymètre

Un pendule simple de longueur ℓ est accroché sur l'axe d'un rotor vertical qui tourne à la vitesse angulaire ω constante.

Q-1) Dans le référentiel du rotor, montrer qu'il existe, si $\omega > \sqrt{g/\ell}$, une position d'équilibre relatif inclinée de α avec $\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$. Comparer à l'étude du pendule conique du chapitre M6.

Q-2) Pour $\ell = 10\,\text{cm}$, à quelle vitesse de rotation (en tours par minute) correspond $\alpha = 60°$? Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

EXERCICE 14 Expression du terme de marée

On assimile la Lune à un point de masse M_L situé en L, à la distance $d = TL$ du centre T de la Terre (rayon $R \ll d$). Pour un point M de la surface terrestre, on pose $\overrightarrow{TM} = R\vec{u}_r$ et $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$, où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire de T vers L.

Q-1) Exprimer le terme de marée par unité de masse $\vec{c} = \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)$.

Q-2) Montrer qu'au premier ordre en $\frac{R}{d}$: $\vec{c} \approx \dfrac{\mathcal{G}M_L R}{d^3}\,(3\cos\theta\,\vec{u}_x - \vec{u}_r)$.

Q-3) Calculer $\vec{c}$ aux points A ($\theta = 0$), B ($\theta = \frac{\pi}{2}$), C ($\theta = \pi$), D ($\theta = -\frac{\pi}{2}$). Interpréter : où sont les marées hautes et basses ? Quel est l'intervalle entre deux marées hautes ?

VIII Classiques des concours

EXERCICE 15 Déviation vers l'est

★★★★☆

On lâche sans vitesse initiale, du haut d'une tour de hauteur $h = 150\,\mathrm{m}$ située à la latitude $\lambda = 45°$ nord, une bille de masse m. On travaille dans le référentiel terrestre, sans frottement, avec le repère local $(O;\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$: $\vec{u}_x$ vers l'est, $\vec{u}_y$ vers le nord, $\vec{u}_z$ vers le haut. Alors $\vec{\Omega} = \Omega(\cos\lambda\,\vec{u}_y + \sin\lambda\,\vec{u}_z)$, avec $\Omega = 7{,}29\times10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Q-1) Écrire le PFD dans le référentiel terrestre. Pourquoi la force centrifuge n'apparaît-elle pas explicitement ?

Q-2) À l'ordre zéro en Ω, donner $\vec{v}_0(t)$ et la durée de chute. Calculer la force de Coriolis à l'ordre 1 en remplaçant $\vec{v}$ par $\vec{v}_0$.

Q-3) En déduire que la bille est déviée vers l'est de $x(t) = \frac{1}{3}\Omega g\cos\lambda\,t^3$; calculer la déviation au sol.

Q-4) Montrer qu'à l'ordre 1 il n'y a pas de déviation vers le sud. Pourquoi l'expérience (Reich, 1831, dans un puits de mine) est-elle délicate ?

EXERCICE 16 Pesanteur artificielle d'une station spatiale

★★★★☆

Une station spatiale en forme d'anneau de rayon $R = 100\,\mathrm{m}$ tourne autour de son axe à vitesse angulaire Ω constante, dans un référentiel galiléen où elle est isolée (on néglige la gravitation).

Q-1) Quelle doit être Ω pour que les occupants, debout sur la face interne de l'anneau, ressentent une pesanteur égale à g ? Période de rotation ?

Q-2) Un occupant mesure $2\,\mathrm{m}$: quelle différence relative de pesanteur ressent-il entre ses pieds et sa tête ?

Q-3) Il lance une balle « verticalement » (vers l'axe) à $v = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer la force de Coriolis par unité de masse et la comparer à la pesanteur artificielle. La balle retombera-t-elle dans sa main ?

Q-4) Décrire le mouvement de la balle dans le référentiel galiléen.

Q-5) Pourquoi a-t-on intérêt à construire des stations de grand rayon ?

EXERCICE 17 Le pendule de Foucault

★★★★☆

Un pendule simple de longueur ℓ, de masse m, oscille avec une faible amplitude au voisinage de la verticale, à la latitude λ. On utilise le repère local du premier exercice et on se limite au mouvement horizontal (x,y), la vitesse verticale étant négligeable. On pose $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

Q-1) Montrer que la force de Coriolis horizontale s'écrit $-2m\Omega\sin\lambda\,\vec{u}_z\wedge\vec{v}$ et que les équations du mouvement sont $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega_z\dot{y}$ et $\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega_z\dot{x}$, avec $\Omega_z = \Omega\sin\lambda$.

Q-2) On pose $\underline{Z} = x + \mathrm{i}y$. Établir l'équation vérifiée par $\underline{Z}$ et, en utilisant $\Omega_z \ll \omega_0$, montrer que $\underline{Z}(t) \approx \underline{Z}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}\cos(\omega_0 t)$ pour un lâcher sans vitesse.

Q-3) Interpréter : le plan d'oscillation tourne. Dans quel sens ? Calculer la durée d'un tour à Paris ($48{,}8°$ N), à Casablanca ($33{,}6°$ N), au pôle et à l'équateur.