LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

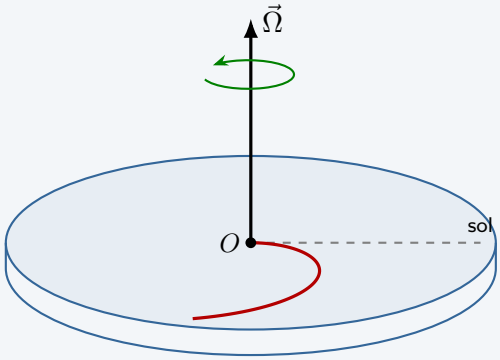
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M8

MÉCANIQUE

Dynamique dans un référentiel non galiléen

Vecteur rotation — Composition des vitesses et des accélérations — Forces d'inertie — Référentiel tournant — Poids, marées, Coriolis



trajectoire vue du manège

« *Vous êtes invité à venir voir tourner la Terre.*

— Léon Foucault, carton d'invitation à l'Observatoire de Paris (février 1851)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Référentiel tournant »

M8 — Référentiels non galiléens

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Caractériser le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre : translation, rotation uniforme autour d'un axe fixe ; vecteur rotation.
- Utiliser la relation de dérivation vectorielle et établir les lois de composition des vitesses et des accélérations ; définir le point coïncident.
- Écrire le PFD, le TMC et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen en introduisant les forces d'inertie.
- Exprimer la force d'inertie d'entraînement en translation et en rotation uniforme ; utiliser l'énergie potentielle centrifuge pour un équilibre relatif.
- Discuter le caractère galiléen approché des référentiels usuels ; interpréter le poids, les marées et les effets de la force de Coriolis.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Référentiel tournant » montre un projectile lancé sur un manège : sa trajectoire est rectiligne vue du sol, mais s'incurve sous l'effet de la force de Coriolis vue depuis le manège.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre . . . 3
I.1 Translation . . . 3
I.2 Rotation autour d'un axe fixe ; vecteur rotation . . . 3
I.3 Relation de dérivation vectorielle . . . 4
II Composition des mouvements . . . 4
II.1 Composition des vitesses . . . 4
II.2 Composition des accélérations . . . 5
III Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen . . . 6
III.1 Relativité galiléenne . . . 7
III.2 Forces d'inertie . . . 7
III.3 Théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique . . . 7
III.4 Référentiel en translation . . . 8
IV Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe . . . 9
IV.1 Force centrifuge et force de Coriolis . . . 9
IV.2 Équilibre relatif . . . 10
V Caractère galiléen des référentiels usuels et dynamique terrestre . . . 11
V.1 Les référentiels usuels . . . 11
V.2 Le poids . . . 12
V.3 Les marées . . . 12
V.4 Effets de la force de Coriolis terrestre . . . 13
VI Synthèse . . . 14
VII Exercices d'approfondissement . . . 14
VIII Classiques des concours . . . 16

I Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

Les lois de Newton (chapitre M2) ne sont valables que dans un référentiel **galiléen**. Or on observe souvent un mouvement depuis un référentiel qui accélère ou qui tourne : voiture, manège, Terre elle-même. Ce chapitre établit comment relier les descriptions dans deux référentiels, puis comment écrire les lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

On considère un référentiel $\mathcal{R}$ (dit **absolu**, d'origine O, de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$) et un référentiel $\mathcal{R}'$ (dit **relatif**, d'origine O', de base $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ liée à $\mathcal{R}'$). Le temps est le même dans les deux référentiels (mécanique classique).

I.1 Translation

Définition — Référentiel en translation R

$\mathcal{R}'$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}$ si les vecteurs de sa base gardent une direction fixe dans $\mathcal{R}$. Le mouvement de $\mathcal{R}'$ est alors entièrement décrit par celui de son origine O'.

- **Translation rectiligne** : O' décrit une droite (wagon sur une voie rectiligne, ascenseur) ; elle est **uniforme** si $\vec{v}(O'/\mathcal{R})$ est constant.
- **Translation circulaire** : O' décrit un cercle mais les axes gardent une direction fixe (nacelle de grande roue, référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique).

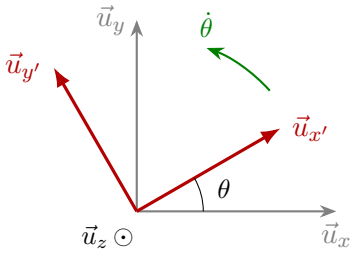
✗ Attention, erreurs fréquentes

Ne pas confondre translation circulaire et rotation : la nacelle d'une grande roue décrit un cercle, mais elle reste horizontale ; ses axes ne tournent pas.

I.2 Rotation autour d'un axe fixe ; vecteur rotation

On suppose maintenant que $O' = O$ et que $\mathcal{R}'$ tourne autour de l'axe $(O\vec{u}_z)$, fixe dans les deux référentiels ($\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$). On repère l'orientation de $\mathcal{R}'$ par l'angle $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{u}_{x'})$. Les vecteurs $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ jouent le rôle de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ de la base polaire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\,\vec{u}_{y'} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{x'}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_{x'} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_{y'}.$$



Définition — Vecteur rotation instantanée R

Le vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\,\vec{u}_z$$

Sa direction est l'axe de rotation, sa norme $\left|\dot{\theta}\right|$ la vitesse angulaire, son sens donné par la règle de la main droite. Pour tout vecteur $\vec{u}$ fixe dans $\mathcal{R}'$: $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$. En translation, $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

I.3 Relation de dérivation vectorielle

Formule de dérivation vectorielle (formule de Bour) R

Pour tout vecteur $\vec{A}(t)$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}$$

Justification D *:* on décompose $\vec{A} = A_{x'}\vec{u}_{x'} + A_{y'}\vec{u}_{y'} + A_{z'}\vec{u}_{z'}$. Dans $\mathcal{R}'$, seules les composantes varient : $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \dot{A}_{x'}\vec{u}_{x'} + \dot{A}_{y'}\vec{u}_{y'} + \dot{A}_{z'}\vec{u}_{z'}$. Dans $\mathcal{R}$, il faut aussi dériver les vecteurs de base, ce qui ajoute $A_{x'}\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{x'} + A_{y'}\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{y'} + A_{z'}\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_{z'} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}$.

Remarque

Propriétés utiles : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, et pour trois référentiels, $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3}$ (relation de Chasles). De plus $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$; et la dérivée d'un vecteur ne dépend du référentiel que si celui-ci tourne. En translation, les deux dérivées sont égales.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 **Vecteur rotation de bases usuelles** ✦✧✧✧✧

Q-1) Un point M est repéré en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Quel est le vecteur rotation, par rapport à $\mathcal{R}$, de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$? Retrouver $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}$.

Q-2) Calculer la norme du vecteur rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique (jour sidéral $86\,164\,\mathrm{s}$) et de la Terre autour du Soleil.

Correction

Q-1) La base tourne autour de $\vec{u}_z$ de l'angle θ : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$. Alors $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$: on retrouve les résultats du chapitre M1.

Q-2) $\Omega_T = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}29 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Le référentiel géocentrique est, lui, en translation (quasi circulaire) par rapport au référentiel héliocentrique : son vecteur rotation est nul, bien que son centre tourne autour du Soleil à $\frac{2\pi}{3{,}16\times10^7\,\mathrm{s}} = 2{,}0 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

II Composition des mouvements

II.1 Composition des vitesses

On note $\vec{v}_a = \vec{v}(M/\mathcal{R})$ la vitesse **absolue** et $\vec{v}_r = \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ la vitesse **relative**.

Composition des vitesses R D

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad \text{avec} \qquad \vec{v}_e = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Démonstration : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, et on dérive dans $\mathcal{R}$ en utilisant la formule de dérivation vectorielle pour $\overrightarrow{O'M}$: $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

Définition — Point coïncident R

Le **point coïncident** P est le point **fixe dans** $\mathcal{R}'$ qui coïncide avec M à l'instant t. La vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ est la vitesse de P dans $\mathcal{R}$: c'est la vitesse qu'aurait M s'il était « entraîné » par $\mathcal{R}'$ sans bouger dans $\mathcal{R}'$.

II.2 Composition des accélérations

Composition des accélérations R D

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

- accélération d'entraînement (accélération du point coïncident) : $\vec{a}_e = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \dfrac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$;
- accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

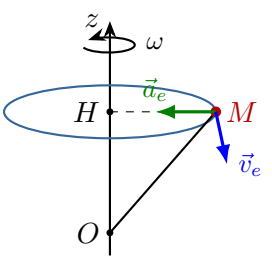
Démonstration. On dérive $\vec{v}_a = \vec{v}(O'/\mathcal{R}) + \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ dans $\mathcal{R}$, terme à terme :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{a}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right).$$

En regroupant, le terme $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ apparaît **deux fois** : c'est l'origine du facteur 2 de l'accélération de Coriolis.

	Translation	**Rotation uniforme autour de** (Oz), $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$
$\vec{v}_e$	$\vec{v}(O'/\mathcal{R})$	$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\,\vec{u}_\theta$
$\vec{a}_e$	$\vec{a}(O'/\mathcal{R})$	$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega^2\overrightarrow{HM}$ (H projeté de M sur l'axe)
$\vec{a}_c$	$\vec{0}$	$2\omega\vec{u}_z \wedge \vec{v}_r$

Démonstration du cas de la rotation D : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{OH}$ colinéaire à $\vec{u}_z$, donc $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{HM}$, vecteur orthoradial de norme ωHM. En appliquant à nouveau $\omega\vec{u}_z\wedge$ à ce vecteur orthoradial, on obtient $-\omega^2\overrightarrow{HM}$: le point coïncident décrit un cercle de centre H à vitesse angulaire ω, son accélération est **centripète**.



✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\vec{a}_e$ n'est **pas** la dérivée de $\vec{v}_e$, et $\vec{a}_r$ n'est pas la dérivée de $\vec{v}_r$ dans $\mathcal{R}$: seule la décomposition complète $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ est correcte.
- L'accélération de Coriolis est nulle si $\mathcal{R}'$ est en translation, ou si M est immobile dans $\mathcal{R}'$, ou si $\vec{v}_r$ est parallèle à $\vec{\Omega}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 Traversée d'une rivière ✦✦✧✧✧

Une rivière de largeur $d = 100\,\text{m}$ coule à la vitesse uniforme $u = 1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Un nageur nage à $v = 1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ par rapport à l'eau.

Q-1) Il nage perpendiculairement au courant (par rapport à l'eau). Calculer la durée de la traversée et la dérive.

Q-2) Dans quelle direction doit-il nager pour arriver juste en face de son point de départ ? Durée ?

Q-3) Quelle direction minimise la durée de la traversée ? Est-il toujours possible d'arriver juste en face ?

Correction

Le référentiel de l'eau est en translation rectiligne uniforme par rapport à la berge : $\vec{v}_{/\text{berge}} = \vec{v}_{/\text{eau}} + \vec{u}$.

Q-1) La composante de vitesse perpendiculaire aux berges vaut v : $t = \frac{d}{v} = 67\,\text{s}$; dérive $ut = 67\,\text{m}$.

Q-2) Il faut que la composante de $\vec{v}$ parallèle au courant compense u : il nage vers l'amont en faisant l'angle α avec la perpendiculaire, $\sin\alpha = \frac{u}{v}$, soit $\alpha = 42°$; $t = \frac{d}{v\cos\alpha} = 89\,\text{s}$.

Q-3) La durée $\frac{d}{v\cos\alpha}$ est minimale pour $\alpha = 0$ (cas 1). Arriver en face exige $v > u$.

EXERCICE 3 Point sur un plateau tournant : deux calculs ✦✦✧✧✧

Un plateau tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz). Un point M se déplace sur un rayon du plateau à vitesse constante v_0 par rapport au plateau : $r = v_0 t$.

Q-1) Calculer $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$ directement en coordonnées polaires dans $\mathcal{R}$ ($\dot{\theta} = \omega$).

Q-2) Retrouver ces résultats par la composition des mouvements et identifier chaque terme.

Correction

Q-1) $\vec{v}_a = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v_0\vec{u}_r + r\omega\vec{u}_\theta$; $\vec{a}_a = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\omega + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -r\omega^2\vec{u}_r + 2v_0\omega\vec{u}_\theta$.

Q-2) $\vec{v}_r = v_0\vec{u}_r$, $\vec{v}_e = \omega\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r = r\omega\vec{u}_\theta$. $\vec{a}_r = \vec{0}$, $\vec{a}_e = -\omega^2 r\vec{u}_r$ (centripète), $\vec{a}_c = 2\omega\vec{u}_z \wedge v_0\vec{u}_r = 2\omega v_0\vec{u}_\theta$: la somme redonne $\vec{a}_a$. Le terme $2\dot{r}\dot{\theta}$ des polaires est l'accélération de Coriolis.

III Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen

III.1 Relativité galiléenne

Référentiels galiléens R

Les forces d'interaction (gravitation, forces électromagnétiques, contact) ne dépendent pas du référentiel en mécanique classique. Si $\mathcal{R}$ est galiléen et si $\mathcal{R}'$ est en **translation rectiligne uniforme** par rapport à $\mathcal{R}$, alors $\vec{a}_e = \vec{0}$, $\vec{a}_c = \vec{0}$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_r$: $\mathcal{R}'$ est aussi galiléen. Réciproquement, deux référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Aucune expérience de mécanique réalisée à l'intérieur d'un référentiel galiléen ne permet de mettre en évidence son mouvement de translation uniforme : c'est le **principe de relativité** de Galilée (le passager d'un bateau naviguant sur une mer calme ne peut déceler son mouvement).

III.2 Forces d'inertie

PFD dans un référentiel non galiléen R D

Si $\mathcal{R}$ est galiléen et $\mathcal{R}'$ en mouvement connu par rapport à $\mathcal{R}$:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

avec la **force d'inertie d'entraînement** $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ et la **force d'inertie de Coriolis** $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$.

Démonstration : PFD dans $\mathcal{R}$ galiléen, $m\vec{a}_a = \sum \vec{F}$, puis $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Les forces d'inertie ne traduisent **aucune interaction** : elles n'ont pas de « réaction » au sens de la troisième loi de Newton. Elles n'existent que dans le référentiel non galiléen.
- On les écrit soit dans $\mathcal{R}'$ (avec forces d'inertie), soit dans $\mathcal{R}$ (sans) : jamais les deux à la fois.
- Dans $\mathcal{R}$, il n'y a pas de « force centrifuge » : un objet en mouvement circulaire subit une force réelle **centripète**.

III.3 Théorèmes du moment cinétique et de l'énergie cinétique

TMC et TEC dans un référentiel non galiléen R D

Pour un point A fixe dans $\mathcal{R}'$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A(M/\mathcal{R}')}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ic})$$

$$\frac{\mathrm{d}E_c(M/\mathcal{R}')}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}') + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie}/\mathcal{R}')$$

La force de Coriolis **ne travaille pas** dans $\mathcal{R}'$: $\vec{f}_{ic} \cdot \vec{v}_r = -2m(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r = 0$.

Démonstration : on reprend les démonstrations des chapitres M4 et M6 dans $\mathcal{R}'$, à partir du PFD avec forces d'inertie.

III.4 Référentiel en translation

En translation, $\vec{\Omega} = \vec{0}$:

$$\vec{f}_{ie} = -m\,\vec{a}(O'/\mathcal{R}) \qquad \vec{f}_{ic} = \vec{0}$$

La force d'inertie est **opposée à l'accélération du référentiel** : c'est la sensation d'être plaqué contre son siège quand une voiture accélère, ou projeté vers l'avant quand elle freine. Pour une translation d'accélération constante, $\vec{f}_{ie}$ est uniforme et constante, comme un poids supplémentaire : elle dérive de $E_p = m\,\vec{a}(O') \cdot \overrightarrow{O'M}$.

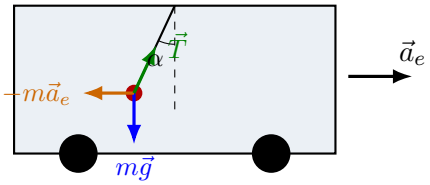


Fig. 1 : Pendule dans un véhicule qui accélère : équilibre relatif pour $\tan\alpha = a_e/g$, le pendule penche vers l'arrière.

Remarque

Impesanteur. Dans un référentiel en chute libre (cabine d'ascenseur dont le câble a cassé, station spatiale en orbite), l'accélération d'entraînement est égale au champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$: la force d'inertie $-m\vec{\mathcal{G}}$ compense exactement l'attraction. Les objets y « flottent » bien que la gravitation soit encore, pour l'ISS, égale à environ $90\,\%$ de sa valeur au sol.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Pèse-personne dans un ascenseur ✦✧✧✧✧

Une personne de masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ se tient sur un pèse-personne (gradué en kilogrammes avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) dans un ascenseur. Quelle masse indique la balance lorsque l'ascenseur (a) monte à vitesse constante, (b) démarre vers le haut avec une accélération de $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, (c) freine en descendant avec une décélération de $2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, (d) est en chute libre ?

Correction

Dans le référentiel de l'ascenseur (translation verticale d'accélération a_z, axe vers le haut), la personne est en équilibre sous son poids, la réaction R du pèse-personne et la force d'inertie $-ma_z\vec{u}_z$: $R = m(g + a_z)$, et la balance affiche R/g. (a) $a_z = 0$: $70\,\mathrm{kg}$. (b) et (c) : dans les deux cas l'accélération est dirigée vers le **haut**, $a_z = +2{,}0$: $R = 70 \times 11{,}81 = 827\,\mathrm{N}$, affichage $84\,\mathrm{kg}$. (d) $a_z = -g$: $R = 0$, impesanteur.

EXERCICE 5 Pendule dans un wagon ✦✦✧✧✧

Un pendule simple (masse m, longueur ℓ) est suspendu au plafond d'un wagon qui accélère horizontalement avec $a = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-1) Déterminer l'angle α du fil avec la verticale à l'équilibre relatif. De quel côté penche-t-il ?

Q-2) Montrer que tout se passe comme si le pendule était soumis à une pesanteur effective $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$. En déduire la période des petites oscillations autour de l'équilibre relatif.

Correction

Q-1) Équilibre dans le wagon : $\vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} = \vec{0}$, donc le fil est aligné avec $\vec{g} - \vec{a}$: $\tan\alpha = \frac{a}{g}$, $\alpha = 11{,}5°$, vers l'**arrière**.

Q-2) Les deux forces $m\vec{g}$ et $-m\vec{a}$ sont uniformes et constantes : leur somme est $m\vec{g}'$. La période est celle d'un pendule dans le champ $g' = \sqrt{g^2 + a^2} = 10{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: $T = 2\pi\sqrt{\ell/g'}$, légèrement plus courte qu'à l'arrêt.

EXERCICE 6 Le pendule simple vu depuis son fil

✦✦✧✧✧

On reprend le pendule simple (O fixe, longueur ℓ, angle $\theta(t)$ avec la verticale descendante) et on l'étudie dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au fil, en rotation autour de $(O\vec{u}_z)$ avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ (rotation **non uniforme**).

Q-1) Que valent $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$ et la force de Coriolis ?

Q-2) Calculer l'accélération d'entraînement de M et la force d'inertie d'entraînement.

Q-3) En écrivant l'équilibre de M dans $\mathcal{R}'$, retrouver l'équation du mouvement et la tension du fil.

Correction

Q-1) M est fixe dans $\mathcal{R}'$: $\vec{v}_r = \vec{0}$, $\vec{a}_r = \vec{0}$ et $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$.

Q-2) $\vec{a}_e = \vec{a}(O) + \ddot{\theta}\vec{u}_z \wedge \ell\vec{u}_r + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge (\dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \ell\vec{u}_r) = \ell\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$ (c'est l'accélération de M dans $\mathcal{R}$, ce qui est normal puisque M est son propre point coïncident). $\vec{f}_{ie} = -m\ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + m\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r$.

Q-3) $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}_{ie}$. Sur $\vec{u}_\theta$: $-mg\sin\theta - m\ell\ddot{\theta} = 0$, soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$. Sur $\vec{u}_r$: $mg\cos\theta - T + m\ell\dot{\theta}^2 = 0$, d'où $T = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2$. La méthode est correcte mais n'apporte rien ici : on préfère le référentiel galiléen.

IV Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

IV.1 Force centrifuge et force de Coriolis

Forces d'inertie en rotation uniforme R D

Pour $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$ constant et $O' = O$ sur l'axe :

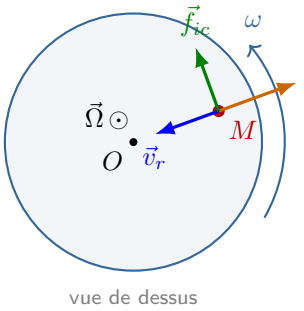
$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2\,\overrightarrow{HM} \qquad \vec{f}_{ic} = -2m\,\omega\vec{u}_z \wedge \vec{v}_r$$

La force d'inertie d'entraînement, perpendiculaire à l'axe et dirigée vers l'extérieur, est la **force centrifuge**. Elle est conservative, d'**énergie potentielle centrifuge**

$$E_{p,\mathrm{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

où $r = HM$ est la distance à l'axe.

Démonstration : en coordonnées cylindriques d'axe (Oz), $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 r\vec{u}_r$ et $\delta W = \vec{f}_{ie}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = m\omega^2 r\,\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)$.



vue de dessus

Sur un manège tournant dans le sens direct (vu de dessus), un objet qui se déplace vers le centre est dévié par la force de Coriolis **vers la droite** de son mouvement relatif. De façon générale, pour $\vec{\Omega}$ dirigé vers le haut, la force de Coriolis dévie tout mouvement horizontal vers la droite.

IV.2 Équilibre relatif

☞ Méthode — Étudier un équilibre relatif dans un référentiel tournant M

1. Se placer dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ et faire le bilan : forces réelles, force centrifuge, force de Coriolis.
2. À l'équilibre relatif $\vec{v}_r = \vec{0}$: la force de Coriolis est nulle. Elle ne travaille jamais, donc ne modifie ni les positions d'équilibre ni l'énergie.
3. Pour un système à un degré de liberté, écrire l'énergie potentielle totale $E_p^{\text{tot}} = E_p + E_{p,\text{cf}}$: les équilibres relatifs sont ses extrema, et un **minimum** correspond à un équilibre **stable**.

Ordres de grandeur

- Manège tournant à un tour en $6\,\text{s}$: $\omega = 1{,}05\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour une personne de $60\,\text{kg}$ à $3\,\text{m}$ de l'axe, force centrifuge $m\omega^2 r = 197\,\text{N}$; si elle marche à $1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, force de Coriolis $2m\omega v = 126\,\text{N}$: du même ordre !
- Centrifugeuse de laboratoire à $10\,000$ tours par minute, $r = 10\,\text{cm}$: $\omega^2 r \approx 1{,}1\times10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 10^4\,g$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 — Anneau sur une tige tournante ✦✦✧✧✧

Une tige horizontale tourne autour d'un axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante ω. Un anneau M de masse m glisse sans frottement sur la tige ; on note $r = OM$. À $t = 0$, $r = r_0$ et $\dot{r} = 0$.

Q-1) Faire le bilan des forces dans le référentiel de la tige. Établir l'équation du mouvement et la résoudre.

Q-2) Déterminer la réaction de la tige. Quelle force la composante orthoradiale compense-t-elle ?

Q-3) Retrouver l'équation du mouvement par l'énergie dans le référentiel de la tige.

Correction

Q-1) Poids $-mg\vec{u}_z$, réaction $\vec{R} = R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{u}_z$ (perpendiculaire à la tige, sans frottement), force centrifuge $m\omega^2 r\vec{u}_r$, force de Coriolis $-2m\omega\vec{u}_z \wedge \dot{r}\vec{u}_r = -2m\omega\dot{r}\vec{u}_\theta$. Sur $\vec{u}_r$: $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$, d'où $r(t) = r_0\cosh(\omega t)$: l'anneau est éjecté.

Q-2) Sur $\vec{u}_\theta$: $R_\theta = 2m\omega\dot{r} = 2m\omega^2 r_0\sinh(\omega t)$, qui compense la force de Coriolis ; sur $\vec{u}_z$: $R_z = mg$. Vu du sol, c'est cette composante orthoradiale qui met l'anneau en rotation de plus en plus rapide.

Q-3) Seule la force centrifuge travaille : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2$. En dérivant : $\ddot{r} = \omega^2 r$.

EXERCICE 8 Ressort sur une tige tournante ✦✦✦✧✧

L'anneau précédent est maintenant relié à O par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

Q-1) Écrire l'énergie potentielle totale dans le référentiel de la tige. Déterminer la position d'équilibre relatif r_e et sa condition d'existence.

Q-2) Étudier sa stabilité et calculer la pulsation des petites oscillations.

Correction

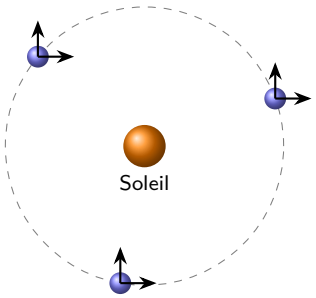
Q-1) $E_p^{\text{tot}}(r) = \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ (le poids ne travaille pas). $\dfrac{\mathrm{d}E_p^{\text{tot}}}{\mathrm{d}r} = k(r-\ell_0) - m\omega^2 r = 0$ donne $r_e = \dfrac{k\ell_0}{k-m\omega^2}$, qui n'existe ($r_e > 0$) que si $\omega < \sqrt{k/m}$.

Q-2) $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p^{\text{tot}}}{\mathrm{d}r^2} = k - m\omega^2 > 0$: équilibre stable. Petites oscillations : $m\ddot{\varepsilon} = -(k-m\omega^2)\varepsilon$, pulsation $\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$. Plus la rotation est rapide, plus le « ressort effectif » est mou.

V Caractère galiléen des référentiels usuels et dynamique terrestre

V.1 Les référentiels usuels

- **Copernic** : centre de masse du système solaire, axes vers trois étoiles lointaines. Galiléen avec une excellente approximation.
- **Héliocentrique (Kepler)** : centre du Soleil, axes parallèles à ceux de Copernic ; quasiment confondu avec lui.
- **Géocentrique** : centre de la Terre, axes parallèles à ceux de Copernic ; en translation quasi circulaire (période $1\,\text{an}$). Galiléen pour des durées courtes devant l'année, à l'effet de marée près.
- **Terrestre** : lié à la Terre, en rotation uniforme par rapport au géocentrique autour de l'axe des pôles, à $\Omega = 7{,}29\times10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Galiléen pour des expériences brèves et de faible extension.



référentiel géocentrique : axes de directions fixes

☞ Méthode — Choisir le référentiel d'étude M

Un référentiel peut être considéré comme galiléen si la durée de l'expérience est petite devant la période de son mouvement par rapport à un référentiel galiléen, ou plus précisément si les forces d'inertie sont négligeables devant les autres forces. Étude d'un satellite : géocentrique ; d'une planète : héliocentrique ; d'une expérience de laboratoire : terrestre, sauf si l'on cherche les effets de la rotation de la Terre (Foucault, déviation vers l'est).

V.2 Le poids

Définition — Poids R

Le poids d'un corps est l'opposé de la force qu'exerce sur lui un fil à plomb qui le maintient immobile dans le référentiel terrestre. La direction du fil à plomb définit la **verticale** du lieu.

À l'équilibre dans le référentiel terrestre ($\vec{v}_r = \vec{0}$, Coriolis nulle), le géocentrique étant supposé galiléen :

$$m\vec{g} = m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\Omega^2\overrightarrow{HM}$$

Le poids inclut l'attraction terrestre et la force centrifuge due à la rotation propre. On utilise ici l'égalité de la masse **grave** (qui intervient dans la gravitation) et de la masse **inerte** (qui intervient dans $m\vec{a}$ et dans les forces d'inertie) : sans elle, la direction du fil à plomb dépendrait de la nature du corps.

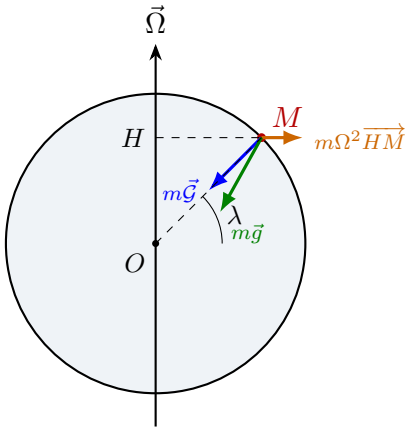


Fig. 2 : Le terme centrifuge est exagéré ici.

- Le terme centrifuge vaut au plus $\Omega^2 R_T = 0{,}034\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, soit $0{,}3\,\%$ de g, à l'équateur ; il est nul aux pôles.
- g dépend donc de la latitude : $g_{\text{pôle}} = 9{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $g_{\text{équateur}} = 9{,}78\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (l'aplatissement de la Terre renforce l'effet).
- La verticale ne passe pas exactement par le centre de la Terre : l'écart maximal, à $45°$ de latitude, vaut $\frac{\Omega^2 R_T}{2g} \approx 1{,}7\times10^{-3}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}1°$.

V.3 Les marées

Le référentiel géocentrique n'est pas rigoureusement galiléen : il est en translation, avec l'accélération du centre T de la Terre, $\vec{a}(T) = \vec{\mathcal{G}}_L(T) + \vec{\mathcal{G}}_S(T) + \dots$ due aux astres extérieurs. Dans ce référentiel, un point M subit, en plus de l'attraction terrestre, l'attraction de la Lune et la force d'inertie $-m\vec{\mathcal{G}}_L(T)$. Leur somme est le **terme de marée** :

$$\vec{C}(M) = m\left[\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)\right]$$

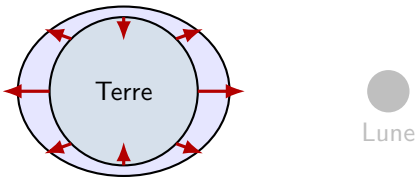


Fig. 3 : Terme de marée : deux bourrelets opposés.

Ce terme est dirigé vers la Lune au point le plus proche, et dans la direction **opposée** au point diamétralement opposé (la Lune y attire moins que le centre de la Terre) : d'où **deux bourrelets** et deux marées hautes par jour lunaire (période $\approx 12\,\mathrm{h}\,25\,\mathrm{min}$). Sur l'axe Terre–Lune, à la distance d, $\left\|\vec{C}\right\| \approx \dfrac{2\mathcal{G}M_L m\,R_T}{d^3}$: la décroissance en $1/d^3$ explique que l'effet de la Lune soit environ $2{,}2$ fois celui du Soleil, bien plus massif mais plus lointain. Marées de vives-eaux quand les deux astres sont alignés (nouvelle et pleine lune), de mortes-eaux en quadrature.

V.4 Effets de la force de Coriolis terrestre

Ordres de grandeur

Pour une vitesse relative v, $\frac{f_{ic}}{mg} \sim \frac{2\Omega v}{g}$: environ $1{,}5 \times 10^{-4}$ pour $v = 10\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pour une voiture à $108\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ à $45°$ de latitude, la composante horizontale vaut $2\Omega v \sin\lambda \approx 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Effet négligeable au laboratoire, mais essentiel à grande échelle et sur des durées longues.

- **Vents et cyclones** : dans l'hémisphère nord, les masses d'air allant vers une dépression sont déviées vers la droite, d'où un enroulement dans le sens trigonométrique autour des dépressions (sens inverse dans l'hémisphère sud).
- **Pendule de Foucault** (1851) : le plan d'oscillation tourne par rapport au sol à la vitesse angulaire $\Omega \sin\lambda$ (sens horaire dans l'hémisphère nord). Il fait un tour en $32\,\mathrm{h}$ à Paris ($49°$ N) et en $43\,\mathrm{h}$ à Casablanca ($33{,}6°$ N).
- **Déviation vers l'est** d'un corps en chute libre (voir les classiques des concours).
- L'écoulement d'un lavabo n'est **pas** gouverné par la force de Coriolis : il est dominé par les mouvements résiduels de l'eau.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 9 — **Poids et verticale du lieu** ✦✦✧✧✧

On note $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$ et $\mathcal{G}_0 = 9{,}83\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ la valeur (supposée uniforme en surface) du champ de gravitation terrestre ; λ est la latitude.

Q-1) Exprimer les composantes du poids selon la direction radiale et selon la direction orthogonale (vers le nord), en fonction de λ.

Q-2) En déduire g à l'équateur et l'angle entre la verticale et la direction du centre de la Terre à $\lambda = 45°$.

Correction

Q-1) $HM = R_T \cos\lambda$; le terme centrifuge $m\Omega^2 R_T \cos\lambda$ est perpendiculaire à l'axe. Sa composante radiale (vers l'extérieur) vaut $m\Omega^2 R_T \cos^2\lambda$, sa composante vers le sud $m\Omega^2 R_T \cos\lambda \sin\lambda$. Donc $g_{\text{rad}} = \mathcal{G}_0 - \Omega^2 R_T \cos^2\lambda$ (vers le centre) et $g_\perp = \Omega^2 R_T \sin\lambda\cos\lambda$ (vers l'équateur).

Q-2) Équateur : $g = 9{,}83 - 0{,}034 = 9{,}80\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (la valeur réelle, $9{,}78\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, inclut l'aplatissement). Angle : $\alpha \approx \frac{g_\perp}{g} = \frac{0{,}034 \times 0{,}5}{9{,}81} = 1{,}7 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad} = 0{,}1°$.

EXERCICE 10 — **Lune ou Soleil ?** ✦✧✧✧✧

Comparer les termes de marée dus à la Lune ($M_L = 7{,}35 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$, $d_L = 3{,}84 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$) et au Soleil ($M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $d_S = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$). Calculer l'ordre de grandeur de l'accélération de marée lunaire et la comparer à g.

Correction

$\frac{C_L}{C_S} = \frac{M_L}{M_S}\left(\frac{d_S}{d_L}\right)^3 = \frac{7{,}35\times10^{22}}{2{,}0\times10^{30}} \times \left(\frac{1{,}5\times10^{11}}{3{,}84\times10^{8}}\right)^3 \approx 2{,}2$: la Lune l'emporte. $\frac{2\mathcal{G}M_L R_T}{d_L^3} = \frac{2\times6{,}67\times10^{-11}\times7{,}35\times10^{22}\times6{,}37\times10^{6}}{(3{,}84\times10^{8})^3} = 1{,}1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \approx 1 \times 10^{-7}\,g$: effet minuscule localement, mais qui s'exerce sur tout l'océan.

VI Synthèse

★ À retenir

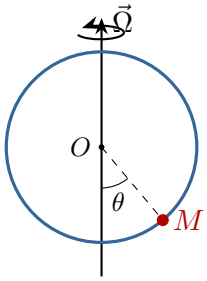
Dérivation vectorielle	$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right\|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right\|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A}$
Vitesses	$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad \vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$
Accélérations	$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$
PFD dans $\mathcal{R}'$	$m\vec{a}_r = \sum\vec{F} - m\vec{a}_e - 2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$
Translation	$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O'), \quad \vec{f}_{ic} = \vec{0}$
Rotation uniforme	$\vec{f}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM}, \quad E_{p,\mathrm{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad \mathcal{P}(\vec{f}_{ic}) = 0$
Poids	$m\vec{g} = m\vec{\mathcal{G}}_T + m\Omega^2\overrightarrow{HM}$
Marée	$\vec{C} = m\left[\vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)\right], \quad C \approx \frac{2\mathcal{G}M_L m R_T}{d^3}$

- Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.
- Les forces d'inertie ne sont pas des interactions ; on ne les écrit que dans le référentiel non galiléen.
- Copernic ≈ héliocentrique (excellent) ; géocentrique (durées $\ll 1\,\mathrm{an}$) ; terrestre (durées $\ll 1\,\mathrm{jour}$).

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 11 Perle sur un cerceau tournant (régulateur de Watt) ✦✦✦✧✧

Une perle de masse m glisse sans frottement sur un cerceau vertical de centre O et de rayon R, qui tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de son diamètre vertical. On repère la perle par l'angle θ avec la verticale descendante.



Q-1) Exprimer l'énergie potentielle totale dans le référentiel du cerceau.

Q-2) Déterminer les positions d'équilibre relatif et discuter leur stabilité selon la valeur de ω par rapport à $\omega_c = \sqrt{g/R}$.

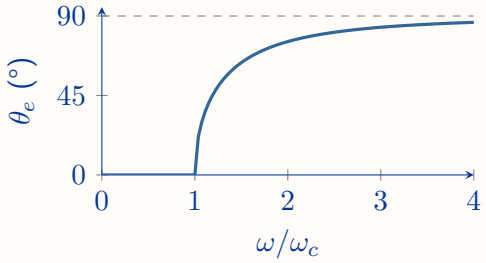
Q-3) Tracer l'allure de $\theta_e(\omega)$. Expliquer le principe du régulateur à boules de Watt.

Correction

Q-1) La distance à l'axe est $R\sin\theta$: $E_p^{\mathrm{tot}} = -mgR\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta$ (la réaction du cerceau et la force de Coriolis ne travaillent pas).

Q-2) $\dfrac{\mathrm{d}E_p^{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}\theta} = mR\sin\theta\,(g - R\omega^2\cos\theta)$: équilibres $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et, si $\omega > \omega_c$, $\pm\theta_e$ avec $\cos\theta_e = \frac{g}{R\omega^2}$. $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p^{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}\theta^2}(0) = mR(g - R\omega^2)$: $\theta = 0$ est stable si $\omega < \omega_c$, instable sinon ; $\theta = \pi$ est toujours instable ; pour $\omega > \omega_c$, $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p^{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_e) = mR^2\omega^2\sin^2\theta_e > 0$: $\pm\theta_e$ sont stables.

Q-3) $\theta_e = 0$ jusqu'à ω_c, puis $\theta_e = \arccos\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ croît vers $\frac{\pi}{2}$: c'est une **bifurcation**. Dans le régulateur, l'écartement des boules, qui croît avec la vitesse de la machine, commande la fermeture de l'admission de vapeur et stabilise la vitesse.



EXERCICE 12 Rondelle sur une demi-sphère accélérée

Une rondelle ponctuelle est posée au sommet d'une demi-sphère fixe de rayon R, solidaire d'une plate-forme qui démarre avec une accélération horizontale constante $\vec{a}$. On néglige les frottements et on repère la rondelle par l'angle θ avec la verticale.

Q-1) Dans le référentiel de la plate-forme, faire le bilan des forces. Dans quel sens la rondelle glisse-t-elle ?

Q-2) Établir $R\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, puis la réaction normale $N(\theta)$.

Q-3) Déterminer l'angle de décollage pour $a = g$. Comparer au cas $a = 0$ (rondelle légèrement poussée).

Correction

Q-1) Poids, réaction normale et force d'inertie $-m\vec{a}$, horizontale opposée à $\vec{a}$: la rondelle part vers l'**arrière**.

Q-2) La force d'inertie, uniforme et constante, est conservative. Énergie dans le référentiel de la plate-forme : $\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = mgR(1-\cos\theta)+maR\sin\theta$. PFD radial : $-mR\dot{\theta}^2 = N-mg\cos\theta+ma\sin\theta$, d'où $N = mg(3\cos\theta-2)-3ma\sin\theta$.

Q-3) Décollage pour $N = 0$. Avec $a = g$: $3(\cos\theta-\sin\theta) = 2$, soit $3\sqrt{2}\cos(\theta+45°) = 2$ et $\theta = 16{,}9°$. Pour $a = 0$: $\cos\theta = \frac{2}{3}$, $\theta = 48{,}2°$: l'accélération fait décoller la rondelle beaucoup plus tôt.

EXERCICE 13 Pendule conique et tachymètre

Un pendule simple de longueur ℓ est accroché sur l'axe d'un rotor vertical qui tourne à la vitesse angulaire ω constante.

Q-1) Dans le référentiel du rotor, montrer qu'il existe, si $\omega > \sqrt{g/\ell}$, une position d'équilibre relatif inclinée de α avec $\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$. Comparer à l'étude du pendule conique du chapitre M6.

Q-2) Pour $\ell = 10\,\text{cm}$, à quelle vitesse de rotation (en tours par minute) correspond $\alpha = 60°$? Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

Correction

Q-1) C'est la situation de la perle sur le cerceau avec $R \to \ell$ (le fil joue le rôle du cerceau, la tension celui de la réaction) : $E_p^{\text{tot}} = -mg\ell\cos\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\alpha$, minimum en $\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$. On retrouve la relation du pendule conique, obtenue au chapitre M6 par le TMC dans le référentiel galiléen : l'équilibre relatif dans $\mathcal{R}'$ est un mouvement circulaire uniforme dans $\mathcal{R}$.

Q-2) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}05}} = 14{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, soit $134\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$. L'angle d'inclinaison mesure la vitesse de rotation : c'est un tachymètre.

EXERCICE 14 Expression du terme de marée

★★★★☆

On assimile la Lune à un point de masse M_L situé en L, à la distance $d = TL$ du centre T de la Terre (rayon $R \ll d$). Pour un point M de la surface terrestre, on pose $\overrightarrow{TM} = R\vec{u}_r$ et $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$, où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire de T vers L.

Q-1) Exprimer le terme de marée par unité de masse $\vec{c} = \vec{\mathcal{G}}_L(M) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)$.

Q-2) Montrer qu'au premier ordre en $\frac{R}{d}$: $\vec{c} \approx \dfrac{\mathcal{G}M_L R}{d^3}\,(3\cos\theta\,\vec{u}_x - \vec{u}_r)$.

Q-3) Calculer $\vec{c}$ aux points A ($\theta = 0$), B ($\theta = \frac{\pi}{2}$), C ($\theta = \pi$), D ($\theta = -\frac{\pi}{2}$). Interpréter : où sont les marées hautes et basses ? Quel est l'intervalle entre deux marées hautes ?

Correction

Q-1) $\vec{c} = \mathcal{G}M_L\left[\dfrac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} - \dfrac{\overrightarrow{TL}}{d^3}\right]$ avec $\overrightarrow{TL} = d\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{ML} = d\vec{u}_x - R\vec{u}_r$.

Q-2) $ML^2 = d^2 - 2dR\cos\theta + R^2$, donc $ML^{-3} \approx d^{-3}\left(1 + \frac{3R}{d}\cos\theta\right)$. Alors $\frac{\overrightarrow{ML}}{ML^3} \approx \frac{1}{d^3}\,(d\vec{u}_x - R\vec{u}_r + 3R\cos\theta\,\vec{u}_x)$ au premier ordre, et en retranchant $\frac{\vec{u}_x}{d^2}$: $\vec{c} \approx \frac{\mathcal{G}M_L R}{d^3}(3\cos\theta\,\vec{u}_x - \vec{u}_r)$.

Q-3) En A : $\vec{u}_r = \vec{u}_x$, $\vec{c} = \frac{2\mathcal{G}M_L R}{d^3}\vec{u}_x$ (vers la Lune) ; en C : $\vec{u}_r = -\vec{u}_x$, $\vec{c} = -\frac{2\mathcal{G}M_L R}{d^3}\vec{u}_x$ (à l'opposé de la Lune) ; en B et D : $\vec{c} = -\frac{\mathcal{G}M_L R}{d^3}\vec{u}_r$ (vers le centre de la Terre). L'eau est soulevée en A et C (marées hautes) et abaissée en B et D (marées basses) ; l'effet radial est deux fois plus fort aux marées hautes. La Terre tournant sous ce double bourrelet, deux marées hautes se succèdent toutes les $12\,\mathrm{h}\,25\,\mathrm{min}$ environ (la Lune avance sur son orbite pendant ce temps), séparées de marées basses décalées d'environ $6\,\mathrm{h}$.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 15 Déviation vers l'est

★★★★☆

On lâche sans vitesse initiale, du haut d'une tour de hauteur $h = 150\,\mathrm{m}$ située à la latitude $\lambda = 45°$ nord, une bille de masse m. On travaille dans le référentiel terrestre, sans frottement, avec le repère local $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: $\vec{u}_x$ vers l'est, $\vec{u}_y$ vers le nord, $\vec{u}_z$ vers le haut. Alors $\vec{\Omega} = \Omega(\cos\lambda\,\vec{u}_y + \sin\lambda\,\vec{u}_z)$, avec $\Omega = 7{,}29\times10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Q-1) Écrire le PFD dans le référentiel terrestre. Pourquoi la force centrifuge n'apparaît-elle pas explicitement ?

Q-2) À l'ordre zéro en Ω, donner $\vec{v}_0(t)$ et la durée de chute. Calculer la force de Coriolis à l'ordre 1 en remplaçant $\vec{v}$ par $\vec{v}_0$.

Q-3) En déduire que la bille est déviée vers l'est de $x(t) = \frac{1}{3}\Omega g\cos\lambda\,t^3$; calculer la déviation au sol.

Q-4) Montrer qu'à l'ordre 1 il n'y a pas de déviation vers le sud. Pourquoi l'expérience (Reich, 1831, dans un puits de mine) est-elle délicate ?

Correction

Q-1) $m\vec{a} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$: la force centrifuge, qui ne dépend que de la position, est incluse dans le poids $m\vec{g}$ (supposé uniforme sur la hauteur de la tour).

Q-2) $\vec{v}_0 = -gt\,\vec{u}_z$, durée $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5{,}53\,\text{s}$. $-2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_0 = 2mgt\,\Omega\,(\cos\lambda\,\vec{u}_y\wedge\vec{u}_z + \sin\lambda\,\vec{u}_z\wedge\vec{u}_z) = 2mg\Omega t\cos\lambda\,\vec{u}_x$: force dirigée vers l'est.

Q-3) $\ddot{x} = 2g\Omega\cos\lambda\,t$ avec $x(0) = \dot{x}(0) = 0$: $x = \frac{1}{3}g\Omega\cos\lambda\,t^3$. Au sol : $x = \frac{1}{3}\times 9{,}81\times 7{,}29\times 10^{-5}\times 0{,}707\times 5{,}53^3 = 2{,}9\,\text{cm}$.

Q-4) À l'ordre 1, la force de Coriolis calculée avec $\vec{v}_0$ est purement selon $\vec{u}_x$: $\ddot{y} = 0$. Une déviation vers le sud n'apparaît qu'à l'ordre 2 en Ω (et elle est en partie compensée par la variation du terme centrifuge). L'effet est minuscule et facilement masqué par les courants d'air et les vibrations : il faut un puits abrité et de nombreuses répétitions.

EXERCICE 16 Pesanteur artificielle d'une station spatiale

Une station spatiale en forme d'anneau de rayon $R = 100\,\text{m}$ tourne autour de son axe à vitesse angulaire Ω constante, dans un référentiel galiléen où elle est isolée (on néglige la gravitation).

Q-1) Quelle doit être Ω pour que les occupants, debout sur la face interne de l'anneau, ressentent une pesanteur égale à g ? Période de rotation ?

Q-2) Un occupant mesure $2\,\text{m}$: quelle différence relative de pesanteur ressent-il entre ses pieds et sa tête ?

Q-3) Il lance une balle « verticalement » (vers l'axe) à $v = 5{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer la force de Coriolis par unité de masse et la comparer à la pesanteur artificielle. La balle retombera-t-elle dans sa main ?

Q-4) Décrire le mouvement de la balle dans le référentiel galiléen.

Q-5) Pourquoi a-t-on intérêt à construire des stations de grand rayon ?

Correction

Q-1) Dans le référentiel de la station, la force centrifuge $m\Omega^2 R$ joue le rôle du poids, dirigée vers l'extérieur (le « bas ») : $\Omega = \sqrt{g/R} = 0{,}31\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 20\,\text{s}$.

Q-2) À la tête, $g' = \Omega^2(R-2) = 0{,}98\,g$: 2 % de moins qu'aux pieds. Les mouvements rapides de la tête créent en outre des effets de Coriolis, sources de nausées.

Q-3) $2\Omega v = 3{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, du même ordre que g : la balle est fortement déviée (vers l'avant, dans le sens de rotation de la station, quand elle monte vers l'axe) et ne retombe pas dans la main.

Q-4) Une fois lâchée, la balle n'est soumise à aucune force : dans le référentiel galiléen, elle suit une droite à vitesse constante (vitesse de lancement plus vitesse d'entraînement ΩR), pendant que la station tourne « sous elle ».

Q-5) Pour une même pesanteur, $\Omega = \sqrt{g/R}$ diminue quand R augmente : les effets de Coriolis ($\propto\Omega$) et le gradient de pesanteur ($\propto 1/R$) sont réduits.

EXERCICE 17 Le pendule de Foucault

★★★★☆

Un pendule simple de longueur ℓ, de masse m, oscille avec une faible amplitude au voisinage de la verticale, à la latitude λ. On utilise le repère local du premier exercice et on se limite au mouvement horizontal (x, y), la vitesse verticale étant négligeable. On pose $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

Q-1) Montrer que la force de Coriolis horizontale s'écrit $-2m\Omega\sin\lambda\,\vec{u}_z\wedge\vec{v}$ et que les équations du mouvement sont $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega_z\dot{y}$ et $\ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega_z\dot{x}$, avec $\Omega_z = \Omega\sin\lambda$.

Q-2) On pose $\underline{Z} = x + \mathrm{i}y$. Établir l'équation vérifiée par $\underline{Z}$ et, en utilisant $\Omega_z \ll \omega_0$, montrer que $\underline{Z}(t) \approx \underline{Z}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}\cos(\omega_0 t)$ pour un lâcher sans vitesse.

Q-3) Interpréter : le plan d'oscillation tourne. Dans quel sens ? Calculer la durée d'un tour à Paris ($48{,}8°$ N), à Casablanca ($33{,}6°$ N), au pôle et à l'équateur.

Correction

Q-1) $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$; la composante $\Omega\cos\lambda\,\vec{u}_y$ de $\vec{\Omega}$ donne $\vec{u}_y\wedge\vec{v}$ selon $\vec{u}_z$ (vertical), compensé par la tension. Reste $-2m\Omega\sin\lambda\,\vec{u}_z\wedge(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y) = -2m\Omega_z(\dot{x}\vec{u}_y - \dot{y}\vec{u}_x)$. Pour les petites oscillations, la tension et le poids donnent la force de rappel $-m\omega_0^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$, d'où les deux équations.

Q-2) En combinant (première) $+\,\mathrm{i}\times$(seconde) : $\ddot{\underline{Z}} + 2\mathrm{i}\Omega_z\dot{\underline{Z}} + \omega_0^2\underline{Z} = 0$. Les racines de $r^2 + 2\mathrm{i}\Omega_z r + \omega_0^2 = 0$ sont $r = -\mathrm{i}\Omega_z \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 + \Omega_z^2} \approx -\mathrm{i}\Omega_z \pm \mathrm{i}\omega_0$. Donc $\underline{Z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\right)$, et avec $\underline{Z}(0) = \underline{Z}_0$, $\dot{\underline{Z}}(0) = 0$ (au premier ordre en Ω_z/ω_0) : $A = B = \frac{\underline{Z}_0}{2}$, soit $\underline{Z} \approx \underline{Z}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}\cos(\omega_0 t)$.

Q-3) Le pendule oscille dans un plan vertical dont la direction tourne à la vitesse angulaire $-\Omega_z$: sens **horaire** vu de dessus dans l'hémisphère nord. Période $T = \frac{2\pi}{\Omega\sin\lambda} = \frac{23{,}93\,\mathrm{h}}{\sin\lambda}$: $31{,}8\,\mathrm{h}$ à Paris, $43{,}2\,\mathrm{h}$ à Casablanca, $23{,}93\,\mathrm{h}$ au pôle (la Terre tourne sous le pendule), infinie à l'équateur.