LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

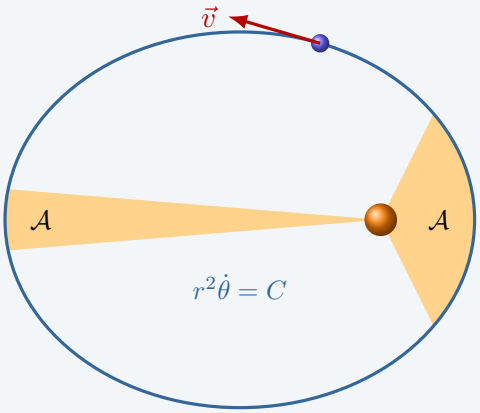
FICHE RÉSUMÉ

M7

MÉCANIQUE

Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives

Loi des aires — Énergie potentielle effective — Champ newtonien — Lois de Kepler — Satellites



> *Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie.*
>
> — Blaise Pascal, *Pensées* (1670)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Mouvement képlérien »

M7 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Une force **centrale** de centre O fixe a un moment nul en O : le moment cinétique $\vec{L}_O$ est conservé, le mouvement est **plan** et suit la **loi des aires** $r^2\dot{\theta} = C$. Si elle est de plus **conservative**, la conservation de l'énergie ramène l'étude à un problème radial à une dimension dans l'**énergie potentielle effective** $\frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$. Pour le champ newtonien en $1/r^2$ (gravitation, Coulomb), les trajectoires sont des coniques dont la nature est fixée par le signe de E_m ; les lois de Kepler et le mouvement des satellites en découlent.

I Forces centrales conservatives

Définition — Force centrale, force centrale conservative R

- $\vec{F}$ est **centrale** de centre O (fixe dans le référentiel galiléen d'étude) si sa droite d'action passe constamment par O : $\vec{F} = F(M)\,\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/OM$; attractive si $F < 0$, répulsive si $F > 0$.
- Si F ne dépend que de $r = OM$, elle est **conservative** :

$$\vec{F} = F(r)\,\vec{u}_r \qquad F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$$

car $\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F(r)\,\mathrm{d}r$ (démonstration D).

Champ newtonien R

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad E_p(r) = -\frac{K}{r} \qquad (E_p \to 0 \text{ à l'infini})$$

Interaction	Force sur M	E_p	K
Gravitationnelle (masse M_0 en O)	$-\dfrac{\mathcal{G}M_0m}{r^2}\vec{u}_r$	$-\dfrac{\mathcal{G}M_0m}{r}$	$\mathcal{G}M_0m > 0$ (attractif)
Coulombienne (charge q_0 en O)	$\dfrac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\vec{u}_r$	$\dfrac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0r}$	$-\dfrac{q_0q}{4\pi\varepsilon_0}$ (signe de $-q_0q$)

Le centre de force (astre $M_0 \gg m$, noyau lourd) est supposé **fixe** dans un référentiel galiléen.

II Conservation du moment cinétique et loi des aires

Conséquences d'une force centrale R D

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge F\vec{u}_r = \vec{0}$, donc (TMC) $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = \vec{L}_0$ est **constant** :

- si $\vec{L}_0 \neq \vec{0}$, le mouvement est **plan** : plan passant par O, perpendiculaire à $\vec{L}_0$, défini par O, M_0 et $\vec{v}_0$; si $\vec{L}_0 = \vec{0}$, il est rectiligne sur une droite passant par O ;

- en polaires dans ce plan, $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$: **constante des aires** et **loi des aires**

$$C = r^2\dot{\theta} = \frac{L_O}{m} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

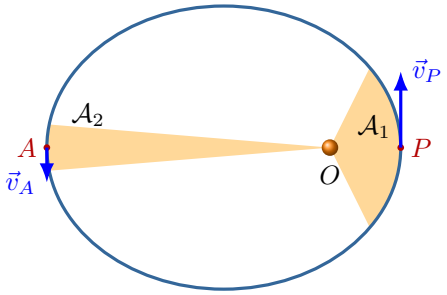
$\dot{\theta}$ garde un signe constant ; le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des durées égales.

☞ Méthode — Exploiter la constante des aires M

- En général $|C| = r\,v\,|\sin\alpha| = b\,v$ (α : angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$, b : paramètre d'impact).
- Là où $\vec{v} \perp \overrightarrow{OM}$ (péricentre P, apocentre A, cercle) : $|C| = rv$, d'où

$$r_P v_P = r_A v_A$$

- Aire de l'ellipse balayée en une période : $\pi ab = \frac{C}{2}T$.



$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ pour des durées égales : on va plus vite au péricentre.

III Énergie potentielle effective

Définition — Énergie potentielle effective R D

Avec $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ et $r\dot{\theta} = C/r$, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r) = \text{cte} \qquad E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

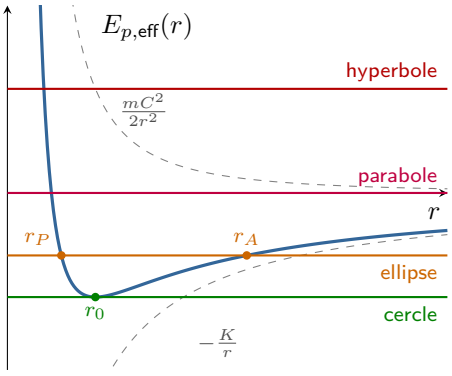
$r(t)$ évolue comme un point fictif à une dimension dans $E_{p,\text{eff}}$; le terme $\frac{mC^2}{2r^2}$ (énergie cinétique orthoradiale) est une **barrière centrifuge**. Le mouvement n'est possible que là où $E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_m$.

Cas newtonien attractif ($K > 0$) : $E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$ est minimale en

$$r_0 = \frac{mC^2}{K} \qquad E_{\min} = -\frac{K}{2r_0} = -\frac{K^2}{2mC^2}$$

- $E_m = E_{\min}$: $r = r_0$, mouvement **circulaire** uniforme ;
- $E_{\min} < E_m < 0$: $r \in [r_P, r_A]$, **état lié** ; en r_P et r_A, $\dot{r} = 0$ (vitesse orthoradiale, non nulle) ;
- $E_m \geq 0$: r non borné, **état de diffusion**.

Cas répulsif ($K < 0$) : $E_{p,\text{eff}} > 0$ décroissante, seulement des états de diffusion (distance minimale d'approche).



IV Trajectoires dans un champ newtonien

Nature des trajectoires (admis) R

La trajectoire est une **conique** de **foyer** O, de paramètre p et d'excentricité $e \geq 0$:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad p = \frac{mC^2}{K} \qquad E_m = \frac{K}{2p}\left(e^2 - 1\right) = \frac{K^2}{2mC^2}\left(e^2 - 1\right)$$

★ À retenir

Énergie mécanique	Excentricité	Trajectoire	État
$E_m = E_{\min} = -\dfrac{K}{2r_0}$	$e = 0$	cercle de rayon $r_0 = p$	lié
$E_{\min} < E_m < 0$	$0 < e < 1$	ellipse, $E_m = -\dfrac{K}{2a}$	lié
$E_m = 0$	$e = 1$	parabole	diffusion ($v \to 0$ à l'infini)
$E_m > 0$	$e > 1$	branche d'hyperbole	diffusion

Cas répulsif ($K < 0$) : toujours une branche d'hyperbole, O étant le foyer situé du côté convexe :

$$r = \frac{|p|}{e\cos(\theta - \theta_0) - 1}.$$

Remarque

Rutherford (1911). Particules α envoyées sur une feuille d'or : interaction coulombienne répulsive, trajectoires hyperboliques ; la rétrodiffusion de quelques particules montre que la charge positive est concentrée dans un **noyau** de taille inférieure à $10^{-14}\,\mathrm{m}$ (distance minimale d'approche en choc frontal : $d_{\min} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E_c}$). **Formules de Binet** (hors programme) : avec $u = 1/r$ et $\dot\theta = Cu^2$, $v^2 = C^2\left[u'^2 + u^2\right]$ et $\vec a = -C^2u^2\left(u'' + u\right)\vec u_r$; on en déduit $u'' + u = 1/p$, d'où la conique.

V Orbites circulaires, ellipses et lois de Kepler

Orbite circulaire autour d'un astre de masse M_0 R D

Loi des aires avec r constant : mouvement **uniforme** ; PFD sur $\vec u_r$: $mr\dot\theta^2 = \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}$, d'où

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r}} \qquad E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r} = -E_c = \frac{E_p}{2} \qquad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}$$

Soit $2E_c + E_p = 0$. Plus le satellite est haut, plus il est lent et plus son énergie est grande ; m n'intervient pas (masse inerte = masse grave).

Lois de Kepler (1609–1619) R

1. Les planètes décrivent des **ellipses** dont le Soleil occupe un **foyer**.
2. Le rayon vecteur Soleil–planète balaie des **aires égales** pendant des durées égales.

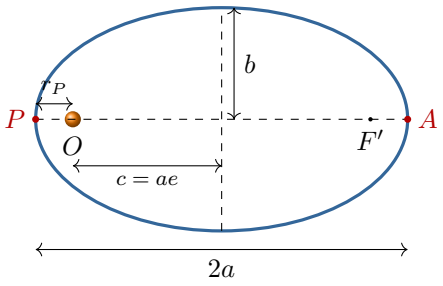
3. $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot}$, la même constante pour toutes les planètes (a : demi-grand axe).

Interprétation newtonienne : (1) forme conique des trajectoires liées ; (2) conservation de $\vec{L}_O$; (3) démontrée pour le cercle, admise pour l'ellipse ($r \to a$).

Énergie et vitesse sur une ellipse R D

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a} \qquad v^2 = \mathcal{G}M_0\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

r_P et r_A sont les racines de $E_m r^2 + \mathcal{G}M_0 m r - \frac{mC^2}{2} = 0$ (car $\dot{r} = 0$), de somme $r_P + r_A = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{E_m} = 2a$. L'énergie ne dépend que de a ; on passe du cercle à l'ellipse en remplaçant r par a.



$r_P = a(1-e)$, $r_A = a(1+e)$, $b = a\sqrt{1-e^2}$, $p = \frac{b^2}{a}$.

VI Satellites terrestres

Vitesses cosmiques et orbite géostationnaire R D

- **Première vitesse cosmique** (orbite circulaire rasante, $g_0 = \mathcal{G}M_T/R_T^2$) : $v_1 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T} \approx 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
- **Vitesse de libération** (atteindre l'infini : $E_m \geq 0$) : $v_\ell = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2}\,v_1 \approx 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.
- **Géostationnaire** : immobile pour un observateur terrestre, donc orbite **circulaire**, **équatoriale** (le plan de l'orbite contient O), parcourue dans le sens de rotation de la Terre en un jour sidéral $T = 86\,164\,\mathrm{s}$; Kepler III donne

$$r = \left(\frac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42\,200\,\mathrm{km} \qquad h \approx 35\,800\,\mathrm{km}$$

Orbite	Altitude	Période	Missions
Basse (LEO)	300 à 2000 km	1,5 h à 2 h	ISS, observation, constellations
Héliosynchrone (quasi polaire)	≈ 800 km	≈ 100 min	météorologie, imagerie (Spot)
Moyenne (MEO)	≈ 20 000 km	≈ 12 h	navigation, localisation (GPS, Galileo)
Géostationnaire (GEO)	35 800 km	23 h 56 min	télécommunications, Météosat

Remarque

Problème à deux corps. Pour deux masses comparables isolées, le référentiel barycentrique est galiléen et le mouvement relatif $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$ est celui d'une particule fictive de masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$: tout le chapitre s'applique, et Kepler III devient $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_1+m_2)}$.

Ordres de grandeur

$\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$; $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_T = 6{,}4 \times 10^{3}\,\mathrm{km}$, $\mathcal{G}M_T = 3{,}99 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$; $M_\odot = 2{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$; $1\,\mathrm{ua} = 1{,}5 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$. ISS ($h = 400\,\mathrm{km}$) : $v = 7{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $T = 92\,\mathrm{min}$. Lune : $r = 384\,000\,\mathrm{km}$, $T = 27{,}3\,\mathrm{j}$. Terre autour du Soleil : $30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Force électrique / gravitationnelle entre deux protons : $\sim 10^{36}$.

VII Méthodes et pièges

☞ Méthode — Étudier un mouvement à force centrale conservative M

1. Justifier que la force est centrale (centre O fixe, référentiel galiléen) : $\vec{L}_O$ constant, mouvement plan, $C = r^2\dot{\theta}$ calculée avec les conditions initiales.
2. Écrire $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$, tracer $E_{p,\text{eff}}$ et la droite E_m : nature lié/diffusion, bornes r_P, r_A (où $\dot{r} = 0$).
3. Champ newtonien : signe de $E_m \Rightarrow$ nature de la conique ; cercle et ellipse : v, T, E_m avec r ou a ; $r_P v_P = r_A v_A$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $F_r = -\frac{K}{r^2}$ et $E_p = -\frac{K}{r}$ ont le **même signe** : ne pas « corriger » un signe à tort.
- $E_{p,\text{eff}}$ n'est pas l'énergie potentielle d'une force réelle ; C est fixée par les conditions initiales.
- Aux points r_P et r_A, c'est $\dot{r}$ qui s'annule, pas v.
- $E_{\min} = -\frac{K^2}{2mC^2}$ (homogène à une énergie), et non $-\frac{K}{2mC^2}$.
- Géostationnaire : raisonner dans le référentiel **géocentrique** ; période du jour **sidéral** ($86\,164\,\mathrm{s}$), pas $24\,\mathrm{h}$.
- Kepler III fait intervenir la masse de l'**astre attracteur**, pas celle du satellite.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je démontre que le mouvement est plan et j'établis la loi des aires.
- ☐ J'écris l'énergie potentielle effective et je discute graphiquement états liés et de diffusion.
- ☐ Je relie le signe de E_m à la nature de la conique (cercle, ellipse, parabole, hyperbole).
- ☐ J'établis v, E_m et la troisième loi de Kepler pour une orbite circulaire.
- ☐ J'utilise $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a}$, $r_P v_P = r_A v_A$ et la formule vis-viva sur une ellipse.
- ☐ Je calcule v_1, v_ℓ et l'altitude géostationnaire.