LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

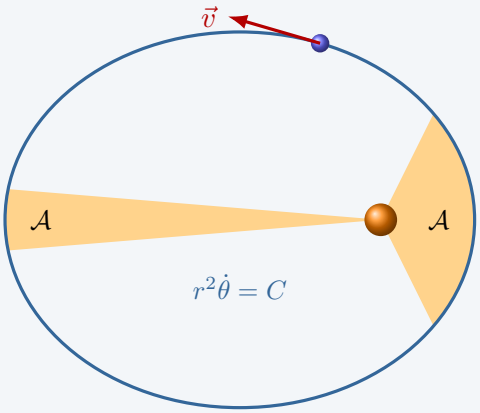
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M7

MÉCANIQUE

Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives

Loi des aires — Énergie potentielle effective — Champ newtonien — Lois de Kepler — Satellites



> *Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie.*
>
> — Blaise Pascal, *Pensées* (1670)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Mouvement képlérien »

M7 — Forces centrales

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Établir la conservation du moment cinétique pour une force centrale ; en déduire la planéité du mouvement et la loi des aires.
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire l'énergie potentielle effective ; discuter graphiquement la nature du mouvement radial.
- Distinguer états liés et états de diffusion dans un champ newtonien attractif ou répulsif ; relier énergie et nature de la conique (admise).
- Établir les caractéristiques du mouvement circulaire (vitesse, énergie, troisième loi de Kepler) ; énoncer les lois de Kepler.
- Exprimer l'énergie d'une orbite elliptique en fonction du demi-grand axe et l'exploiter (formule de la vitesse, transferts d'orbite).
- Déterminer les caractéristiques des satellites usuels : géostationnaire, orbites basses, navigation ; vitesses cosmiques.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Mouvement képlérien » permet de lancer un satellite avec une vitesse initiale réglable, de voir l'orbite passer du cercle à l'ellipse, à la parabole puis à l'hyperbole, et de vérifier la loi des aires.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Forces centrales conservatives . . . 4
I.1 Définitions . . . 4
I.2 Le champ newtonien . . . 4
II Conservation du moment cinétique et loi des aires . . . 5
II.1 Planéité du mouvement . . . 5
II.2 Loi des aires . . . 5
III Énergie potentielle effective . . . 6
III.1 Réduction à un problème radial . . . 7
IV Mouvement dans un champ newtonien . . . 8
IV.1 Discussion graphique : cas attractif . . . 8
IV.2 Cas répulsif . . . 8
IV.3 Nature des trajectoires . . . 9
IV.4 Pour aller plus loin : équation de la trajectoire . . . 10
V Orbites circulaires et lois de Kepler . . . 11
V.1 Mouvement circulaire . . . 11
V.2 Lois de Kepler . . . 11
V.3 Énergie d'une orbite elliptique . . . 12
VI Satellites terrestres . . . 13
VI.1 Vitesses cosmiques . . . 13
VI.2 Satellite géostationnaire . . . 13
VII Ouverture : le problème à deux corps . . . 15
VIII Synthèse . . . 15

IX Exercices d'approfondissement 15
X Classiques des concours 17

I Forces centrales conservatives

I.1 Définitions

Définition — Force centrale R

Une force $\vec{F}$ appliquée à un point M est **centrale** de centre O si sa droite d'action passe constamment par un point O fixe dans le référentiel d'étude :

$$\vec{F} = F(M)\,\vec{u}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Elle est **attractive** si $F < 0$, **répulsive** si $F > 0$.

Force centrale conservative R

Une force centrale dont la valeur algébrique ne dépend que de la distance $r = OM$, $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$, est **conservative** : elle dérive de l'énergie potentielle $E_p(r)$ telle que

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$$

Démonstration D *:* en coordonnées sphériques de centre O, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$, donc le travail élémentaire vaut $\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F(r)\,\mathrm{d}r$. C'est la différentielle de $-E_p(r)$ avec $E_p(r) = -\int F(r)\,\mathrm{d}r$: le travail ne dépend que des distances initiale et finale.

> **Remarque**
>
> Les deux propriétés sont indépendantes. La gravitation exercée par un astre fixe et la tension d'un ressort dont une extrémité est fixée en O sont centrales **et** conservatives. Le poids $m\vec{g}$ (uniforme) est conservatif mais pas central ; la force magnétique de Lorentz et les frottements ne sont ni l'un ni l'autre ; la réaction d'un support n'est en général pas centrale.

I.2 Le champ newtonien

Les deux interactions fondamentales à longue portée sont en $1/r^2$:

Interaction	Force sur M	Énergie potentielle	Constante K
Gravitationnelle (masse M_0 en O)	$-\dfrac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{u}_r$	$-\dfrac{\mathcal{G}M_0 m}{r}$	$\mathcal{G}M_0 m > 0$
Coulombienne (charge q_0 en O)	$\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	$\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$-\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}$

On les écrit sous la forme unique d'un **champ newtonien** :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad E_p(r) = -\frac{K}{r} \qquad (E_p \to 0 \text{ à l'infini})$$

avec $K > 0$ pour une interaction **attractive** (gravitation, charges de signes opposés) et $K < 0$ pour une interaction **répulsive**.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Pour le champ newtonien, la composante radiale $F_r = -\frac{K}{r^2}$ et l'énergie potentielle $E_p = -\frac{K}{r}$ ont le **même signe** (négatif dans le cas attractif) : le signe moins de $F = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$ est compensé par la dérivée de $\frac{1}{r}$. Ne pas « corriger » un signe à tort.

Remarque

Dans tout le chapitre, le centre de force O (astre de masse $M_0 \gg m$, noyau lourd) est supposé **fixe dans un référentiel galiléen** : héliocentrique pour les planètes, géocentrique pour les satellites terrestres. La partie VII montre comment lever cette hypothèse pour deux corps de masses comparables.

Ordres de grandeur

- $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$; $\mathcal{G}M_T = 3{,}99 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$; $\mathcal{G}M_\odot = 1{,}33 \times 10^{20}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$.
- Rapport force électrique / force gravitationnelle entre deux protons : $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mathcal{G} m_p^2} \approx 1 \times 10^{36}$: la gravitation ne domine qu'à grande échelle, pour des corps globalement neutres.

II Conservation du moment cinétique et loi des aires

II.1 Planéité du mouvement

Conséquences d'une force centrale R D

Si M n'est soumis qu'à une force centrale de centre O fixe dans un référentiel galiléen, alors $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge F\vec{u}_r = \vec{0}$ et le théorème du moment cinétique (chapitre M6) donne

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{L}_0 \quad \text{constant}$$

- Si $\vec{L}_0 \neq \vec{0}$: $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{L}_0 = 0$ à chaque instant, donc M reste dans le **plan** passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_0$, c'est-à-dire le plan défini par O, la position initiale et la vitesse initiale.
- Si $\vec{L}_0 = \vec{0}$: $\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$; le mouvement est **rectiligne** sur une droite passant par O.

On utilise alors les coordonnées polaires (r, θ) de centre O dans le plan du mouvement, avec $\vec{u}_z$ selon $\vec{L}_0$: $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$. On retrouve ce résultat en projetant le PFD sur $\vec{u}_\theta$: la force n'ayant pas de composante orthoradiale, $m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{m}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$.

II.2 Loi des aires

Définition — Constante des aires R

$$C = r^2\dot{\theta} = \frac{L_O}{m} \quad (\text{en } \mathrm{m^2\cdot s^{-1}})$$

est une constante du mouvement : $\dot{\theta}$ garde un signe constant, et $\left|\dot{\theta}\right|$ est d'autant plus grand que M est proche de O.

Loi des aires R D

L'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps (**vitesse aréolaire**) est constante :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

Des aires égales sont balayées pendant des durées égales.

Démonstration : pendant $\mathrm{d}t$, $\overrightarrow{OM}$ balaie le triangle (infinitésimal) de côtés $\overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, d'aire $\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \frac{1}{2}r \cdot r\,\mathrm{d}\theta$.

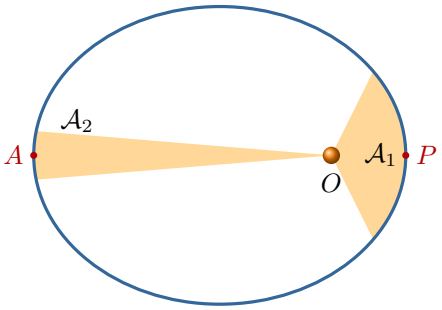


Fig. 1 : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$: arcs parcourus pendant la même durée. Le mobile va plus vite au péricentre P qu'à l'apocentre A.

☞ Méthode — Exploiter la constante des aires M

En un point où la vitesse est **orthoradiale** (péricentre, apocentre, orbite circulaire) : $|C| = rv$. Plus généralement, $|C| = r\,v\,|\sin\alpha| = b\,v$, où α est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ et b le paramètre d'impact. Pour deux points P et A où $\vec{v} \perp \overrightarrow{OM}$: $r_P v_P = r_A v_A$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Vitesses de la comète de Halley ✦✧✧✧✧

La comète de Halley décrit une ellipse de demi-grand axe $a = 17{,}8\,\mathrm{ua}$ et d'excentricité $e = 0{,}967$ autour du Soleil. Les distances au périhélie et à l'aphélie valent $r_P = a(1-e)$ et $r_A = a(1+e)$.

Q-1) Calculer r_P et r_A.

Q-2) Calculer le rapport v_P/v_A des vitesses au périhélie et à l'aphélie.

EXERCICE 2 — Mouvement à $\vec{L}_O = \vec{0}$ ✦✦✧✧✧

Une sonde est lâchée sans vitesse initiale, dans le référentiel géocentrique, à la distance r_0 du centre de la Terre.

Q-1) Montrer que son mouvement est rectiligne.

Q-2) Exprimer sa vitesse lorsqu'elle atteint la surface terrestre (rayon R_T), sans frottement. AN pour $r_0 \to \infty$.

III Énergie potentielle effective

III.1 Réduction à un problème radial

La force étant conservative, l'énergie mécanique se conserve. En polaires, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ et $r\dot{\theta} = C/r$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)}_{E_{p,\text{eff}}(r)} = \text{cte.}$$

Définition — Énergie potentielle effective R D

$$E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

L'évolution de $r(t)$ est celle d'un point **fictif** à une dimension, de masse m, d'énergie $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$. Le terme $\frac{mC^2}{2r^2}$, qui provient de l'énergie cinétique orthoradiale, joue le rôle d'une **barrière centrifuge**.

☞ Méthode — Discussion graphique M

Comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, le mouvement n'est possible que dans les régions où

$$E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_m$$

On trace $E_{p,\text{eff}}(r)$ et la droite horizontale d'ordonnée E_m :

- si r est confiné dans un intervalle $[r_{\min}, r_{\max}]$, l'état est **lié** ; aux bornes, $\dot{r} = 0$ et la vitesse est orthoradiale ;
- si r peut tendre vers l'infini, l'état est **de diffusion** (ou libre) ;
- si $E_m = \min E_{p,\text{eff}}$, r reste égal à r_0 : mouvement **circulaire** (uniforme d'après la loi des aires).

Une fois $r(t)$ connu, la loi des aires $\dot{\theta} = C/r^2$ donne $\theta(t)$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $E_{p,\text{eff}}$ n'est pas une énergie potentielle au sens d'une force réelle : la barrière centrifuge est une partie de l'énergie **cinétique**.
- C est fixée par les conditions initiales : on ne peut pas dériver $E_{p,\text{eff}}$ « à C variable ».
- La vitesse ne s'annule pas aux bornes $r_{\min}$ et $r_{\max}$ (sauf si $C = 0$) : c'est seulement sa composante radiale.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Oscillateur spatial isotrope ✦✦✧✧✧

Un point de masse m est soumis à la force $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$ $(k > 0)$, avec O fixe.

Q-1) Justifier que la force est centrale et conservative ; donner $E_p(r)$ et $E_{p,\text{eff}}(r)$.

Q-2) Montrer que tous les états sont liés. Déterminer le rayon r_0 et la vitesse angulaire ω_c du mouvement circulaire de constante des aires C.

Q-3) Calculer la pulsation Ω des petites oscillations radiales autour de r_0. Comparer à ω_c et conclure sur la forme de la trajectoire.

IV Mouvement dans un champ newtonien

IV.1 Discussion graphique : cas attractif

Pour $K > 0$: $E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{K}{r}$. Elle tend vers $+\infty$ en 0, vers 0^- à l'infini, et présente un minimum en $r_0 = \dfrac{mC^2}{K}$, de valeur $E_{\min} = -\dfrac{K}{2r_0}$.

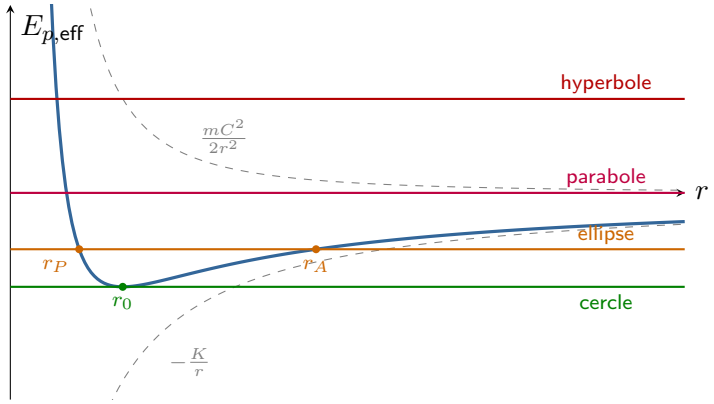


Fig. 2 : Énergie potentielle effective d'un champ newtonien attractif et différents niveaux d'énergie.

> **Remarque**
>
> Points remarquables de $E_{p,\text{eff}}$: elle s'annule en $r' = \frac{r_0}{2}$, est minimale en $r_0 = \frac{mC^2}{K}$ et présente un point d'inflexion en $r'' = \frac{3r_0}{2}$. Ils permettent un tracé rapide et soigné.

- $E_m = E_{\min}$: $r = r_0$, mouvement **circulaire uniforme**.
- $E_{\min} < E_m < 0$: r oscille entre r_P (**péricentre**) et r_A (**apocentre**) : **état lié**.
- $E_m \geq 0$: r n'est borné qu'inférieurement ; le mobile vient de l'infini et y repart : **état de diffusion**. Pour $E_m = 0$, la vitesse tend vers 0 à l'infini.

IV.2 Cas répulsif

Pour $K < 0$: $E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{|K|}{r}$ est décroissante et positive ; nécessairement $E_m > 0$ et il n'existe que des **états de diffusion** : la particule s'approche jusqu'à une distance minimale puis repart à l'infini. C'est la situation de l'expérience de Rutherford (1911) : des particules α (noyaux d'hélium, charge $2e$) sont envoyées sur une feuille d'or ; quelques-unes sont rétrodiffusées, ce qui ne s'explique que si la charge positive de l'atome est concentrée dans un **noyau** de taille inférieure à $10^{-14}\,\text{m}$.

IV.3 Nature des trajectoires

On admet (la démonstration utilise les formules de Binet, hors programme) que la trajectoire est une **conique** de **foyer** O, d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad p = \frac{mC^2}{K}$$

où p est le **paramètre** et $e \geq 0$ l'**excentricité**, et θ_0 la direction du péricentre. L'excentricité est liée à l'énergie par $E_m = \dfrac{K}{2p}\left(e^2 - 1\right)$.

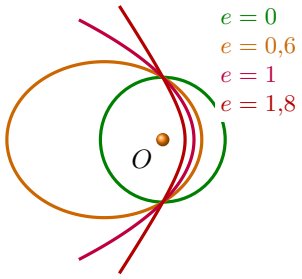


Fig. 3 : Coniques de même paramètre p et de foyer O.

Énergie mécanique	Excentricité	Trajectoire	État
$E_m = E_{\min} = -\frac{K}{2r_0}$	$e = 0$	cercle de rayon $r_0 = p$	lié
$E_{\min} < E_m < 0$	$0 < e < 1$	ellipse	lié
$E_m = 0$	$e = 1$	parabole	diffusion (vitesse nulle à l'infini)
$E_m > 0$	$e > 1$	branche d'hyperbole	diffusion

Remarque

Le champ newtonien a une propriété remarquable : les trajectoires liées sont **fermées** (ellipses). Pour un champ central quelconque, les états liés donnent en général des **rosaces** qui ne se referment pas. La lente rotation de l'ellipse de Mercure (avance du périhélie de $43''$ par siècle non expliquée par les autres planètes) a été l'un des premiers succès de la relativité générale.

IV.4 Pour aller plus loin : équation de la trajectoire

Remarque

La démonstration de la forme conique n'est pas exigible, mais elle est classique. On pose $u = \frac{1}{r}$ et on exprime tout en fonction de θ grâce à $\dot{\theta} = Cu^2$:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = C^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right].$$

C'est la première formule de Binet. De même, $\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$ et $r\dot{\theta}^2 = C^2u^3$: l'accélération, purement radiale ($a_\theta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = 0$), vaut $\vec{a} = -C^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\vec{u}_r$ (seconde formule de Binet). L'énergie s'écrit alors $E_m = \frac{1}{2}mC^2\left[u'^2 + u^2\right] - Ku$. En la dérivant par rapport à θ et en simplifiant par u' (non identiquement nul) :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2} = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{1}{p}\left[1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right].$$

En reportant au péricentre ($\theta = \theta_0$, $u' = 0$) : $E_m = \frac{mC^2}{2p^2}(1+e)^2 - \frac{K}{p}(1+e) = \frac{K}{2p}\left(e^2 - 1\right)$. Dans le cas répulsif ($K < 0$), on écrit $r = \frac{|p|}{e\cos(\theta-\theta_0)-1}$ avec $e > 1$: O est alors le foyer situé du côté **convexe** de la branche d'hyperbole.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Comète parabolique ✦✦✧✧✧

Une comète décrit une parabole de foyer le Soleil, avec une distance minimale $r_P = 0{,}50\,\mathrm{ua}$. Données : $1\,\mathrm{ua} = 1{,}50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, $\mathcal{G}M_\odot = 1{,}33 \times 10^{20}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$.

Q-1) Que vaut son énergie mécanique ? En déduire sa vitesse $v(r)$ puis sa vitesse au périhélie.

Q-2) Comparer sa vitesse lorsqu'elle croise l'orbite terrestre à la vitesse orbitale de la Terre (orbite supposée circulaire).

EXERCICE 5 Distance minimale d'approche (Rutherford) ✦✦✧✧✧

Une particule α (charge $2e$, énergie cinétique initiale $E_0 = 5{,}0\,\mathrm{MeV}$) est lancée de très loin vers un noyau d'or ($Z = 79$) supposé fixe. On donne $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0 \times 10^9\,\mathrm{SI}$ et $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Q-1) Pour un choc frontal, calculer la distance minimale d'approche d_0.

Q-2) Avec un paramètre d'impact $b \neq 0$, montrer que la distance minimale vérifie $r_{\min}^2 - d_0 r_{\min} - b^2 = 0$ et l'exprimer.

EXERCICE 6 Quelle force pour une spirale ? ✦✦✦✧✧

Un point M de masse m, soumis à une force centrale de centre O, décrit la spirale logarithmique $r = k\,\mathrm{e}^\theta$ ($k > 0$).

Q-1) À l'aide de la seconde formule de Binet, déterminer la loi de force $F(r)$.

Q-2) Est-elle attractive ? La force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ? Que vaut l'énergie mécanique ?

V Orbites circulaires et lois de Kepler

V.1 Mouvement circulaire

Satellite en orbite circulaire R D

Pour une orbite circulaire de rayon r autour d'un astre de masse M_0 :

- le mouvement est **uniforme**, de vitesse

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r}}$$

- les énergies vérifient

$$E_c = \frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r} = -\frac{E_p}{2} \qquad E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r} = -E_c$$

- la période vérifie la **troisième loi de Kepler**

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}$$

Démonstration. La loi des aires avec r constant donne $\dot{\theta}$ constant : mouvement uniforme. Le PFD projeté sur $\vec{u}_r$ donne $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}$, d'où $v^2 = r^2\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$. Enfin $T = \frac{2\pi r}{v}$, d'où $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{\mathcal{G}M_0}$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Plus un satellite est haut, plus il est **lent** et plus son énergie mécanique est **grande** (moins négative) : pour monter, il faut fournir de l'énergie, mais la vitesse finale est plus faible.
- La masse m du satellite n'intervient pas (v, T) : conséquence de l'égalité entre masse inerte et masse grave.

V.2 Lois de Kepler

Lois de Kepler (1609–1619) R

1. Les planètes décrivent des **ellipses** dont le Soleil occupe un des foyers.
2. Le rayon vecteur Soleil–planète balaie des **aires égales** pendant des durées égales.
3. Le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot}$$

la constante étant la même pour toutes les planètes.

Ces lois empiriques, tirées par Kepler des observations de Tycho Brahe, sont des **conséquences** de la loi de la gravitation universelle de Newton (1687) : la première traduit la forme conique des trajectoires, la deuxième la conservation du moment cinétique ; la troisième est démontrée ci-dessus dans le cas circulaire et admise dans

le cas elliptique ($r \to a$). Les orbites des planètes sont d'ailleurs presque circulaires (excentricité maximale : $0{,}21$ pour Mercure, $0{,}017$ pour la Terre).

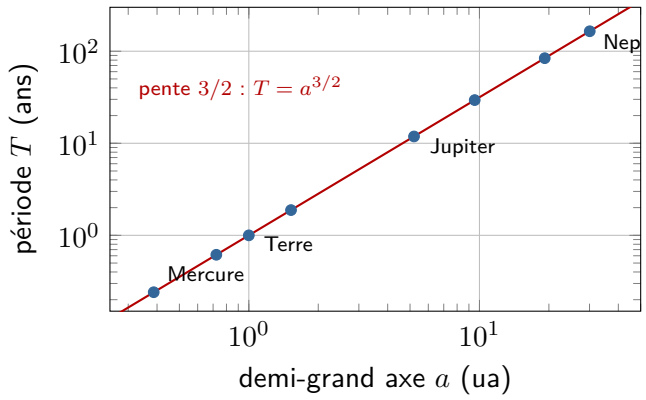


Fig. 4 : Les huit planètes en coordonnées logarithmiques : les points s'alignent sur une droite de pente $\frac{3}{2}$.

V.3 Énergie d'une orbite elliptique

Énergie d'une ellipse R D

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a} \qquad 2a = r_P + r_A$$

L'énergie ne dépend que du **demi-grand axe** (et pas de l'excentricité).

Démonstration. En P et A, $\dot{r} = 0$: r_P et r_A sont les deux racines de $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r}$, c'est-à-dire de $E_m r^2 + \mathcal{G}M_0 m r - \frac{mC^2}{2} = 0$. Leur somme vaut $r_P + r_A = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{E_m} = 2a$.

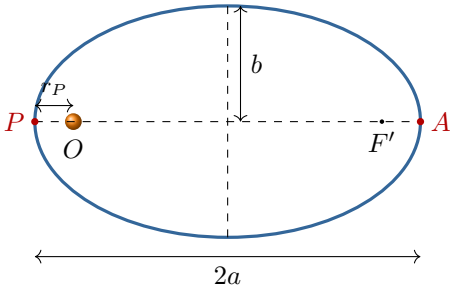


Fig. 5 : Ellipse : $r_P = a(1-e)$, $r_A = a(1+e)$, $b = a\sqrt{1-e^2}$.

Troisième loi de Kepler pour une ellipse D

Sur une période, le rayon vecteur balaie toute l'ellipse, d'aire πab : la loi des aires donne $\pi ab = \frac{C}{2}T$. Avec les relations géométriques $b^2 = ap$ et $p = \frac{mC^2}{K} = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_0}$:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^3 p}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_0}.$$

On remarque que l'énergie et la période d'une orbite elliptique s'obtiennent à partir de celles de l'orbite circulaire en remplaçant le rayon r par le demi-grand axe a.

Vitesse sur une ellipse (formule « vis-viva ») M

Par conservation de l'énergie en un point quelconque de l'orbite :

$$v^2 = \mathcal{G}M_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

On retrouve $v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$ pour un cercle ($a = r$) et $v^2 = \frac{2\mathcal{G}M_0}{r}$ pour une parabole ($a \to \infty$).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 Masses de la Terre et de Jupiter ✦✧✧✧✧

La Lune décrit autour de la Terre une orbite quasi circulaire de rayon $3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$ en $27{,}3\,\mathrm{jours}$. Io, satellite de Jupiter, a une orbite de rayon $4{,}22 \times 10^5\,\mathrm{km}$ et une période de $1{,}77\,\mathrm{jours}$. Calculer M_T et M_J.

EXERCICE 8 Planètes et comètes ✦✧✧✧✧

Q-1) Mars est en moyenne à $1{,}52\,\mathrm{ua}$ du Soleil. Calculer sa période de révolution en années.

Q-2) Calculer la période de la comète de Halley ($a = 17{,}8\,\mathrm{ua}$).

VI Satellites terrestres

VI.1 Vitesses cosmiques

Première vitesse cosmique et vitesse de libération R D

▶ **Première vitesse cosmique** : vitesse d'un satellite en orbite circulaire rasante ($r = R_T$), avec $g_0 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T} \approx 7{,}9\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

▶ **Vitesse de libération** (deuxième vitesse cosmique) : vitesse minimale à communiquer depuis la surface pour atteindre l'infini, c'est-à-dire pour $E_m \geq 0$:

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2}\,v_1 \approx 11{,}2\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

Remarque

Les lanceurs partent vers l'Est et le plus près possible de l'équateur (Kourou, 5° N) pour profiter de la vitesse d'entraînement due à la rotation terrestre, jusqu'à $465\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (voir chapitre M8).

VI.2 Satellite géostationnaire

Orbite géostationnaire R D

Un satellite **géostationnaire** reste à la verticale d'un même point de la surface terrestre. Son orbite est **circulaire**, dans le **plan équatorial**, parcourue dans le sens de rotation de la Terre avec la période du jour sidéral $T = 86\,164\,\mathrm{s}$, et

$$r = \left(\frac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42\,200\,\mathrm{km} \qquad h = r - R_T \approx 35\,800\,\mathrm{km}$$

Démonstration. On raisonne dans le référentiel **géocentrique** (galiléen), et non dans le référentiel terrestre qui tourne. Le point de la surface situé à la verticale du satellite décrit un cercle centré sur l'axe des pôles, dans un plan parallèle à l'équateur ; le satellite décrit donc aussi un cercle centré sur l'axe. Or le plan de son

orbite contient O (force centrale) : ce plan est l'équateur. La distance r étant constante, le mouvement est circulaire uniforme, de période égale à celle de la rotation terrestre ; la troisième loi de Kepler donne r.

Type d'orbite	Altitude	Période	Missions
Basse (LEO)	300 à $2000\,\mathrm{km}$	$1{,}5\,\mathrm{h}$ à $2\,\mathrm{h}$	ISS, observation, constellations
Héliosynchrone (quasi polaire)	$\approx 800\,\mathrm{km}$	$\approx 100\,\mathrm{min}$	météorologie, imagerie (Spot)
Moyenne (MEO)	$\approx 20\,000\,\mathrm{km}$	$\approx 12\,\mathrm{h}$	navigation (GPS, Galileo)
Géostationnaire (GEO)	$35\,800\,\mathrm{km}$	$23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}$	télécommunications, Météosat

Remarque

Effet de fronde. Une sonde qui frôle une planète en mouvement peut gagner (ou perdre) de la vitesse dans le référentiel héliocentrique : dans le référentiel de la planète, elle décrit une hyperbole et repart avec la même vitesse, mais dans une autre direction ; la composition avec la vitesse de la planète modifie son énergie héliocentrique. Les sondes Voyager ont ainsi gagné l'énergie nécessaire pour quitter le système solaire.

Ordres de grandeur

- Soleil : $R_\odot = 7{,}0\times10^5\,\mathrm{km}$, $M_\odot = 2{,}0\times10^{30}\,\mathrm{kg}$; Terre : $R_T = 6{,}4\times10^3\,\mathrm{km}$, $M_T = 6{,}0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$; $1\,\mathrm{ua} = 1{,}5\times10^8\,\mathrm{km}$.
- En dessous de $200\,\mathrm{km}$ d'altitude environ, le frottement atmosphérique fait retomber un satellite en quelques jours.
- ISS à $400\,\mathrm{km}$: $v = 7{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $T = 92\,\mathrm{min}$; environ 16 tours par jour.
- Lune : $r = 384\,000\,\mathrm{km}$, $v \approx 1{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $T = 27{,}3\,\mathrm{jours}$.
- Terre autour du Soleil : $v \approx 30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$; vitesse de libération du système solaire depuis l'orbite terrestre : $42\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 9 Satellites usuels ✦✧✧✧✧

Données : $\mathcal{G}M_T = 3{,}99\times10^{14}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$, $R_T = 6371\,\mathrm{km}$.

Q-1) Calculer la vitesse et la période de l'ISS, en orbite circulaire à $400\,\mathrm{km}$ d'altitude.

Q-2) Calculer le rayon et l'altitude de l'orbite géostationnaire, ainsi que la vitesse du satellite.

Q-3) Quelle énergie minimale faut-il fournir à un satellite de $1{,}0\,\mathrm{t}$ pour le faire passer de l'orbite de l'ISS à l'orbite géostationnaire ?

VII Ouverture : le problème à deux corps

Lorsque les deux masses sont comparables (étoile double, système Terre–Lune), le centre de force n'est plus fixe. Soit deux points M_1 (masse m_1) et M_2 (masse m_2) formant un système isolé, en interaction centrale ($\vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}$). On note G leur centre de masse et $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

- Le système étant isolé, G a un mouvement rectiligne uniforme : le **référentiel barycentrique** $\mathcal{R}^\star$ (lié à G, en translation) est galiléen.
- On montre que $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ avec la **masse réduite** $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$: le mouvement relatif est celui d'une **particule fictive** de masse μ soumise à $\vec{F}$ depuis le point fixe G. Tout ce chapitre s'applique à elle.
- Les trajectoires réelles s'en déduisent : $\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ et $\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$ (homothéties de centre G).
- Pour la gravitation, la troisième loi de Kepler devient $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_1+m_2)}$.

Quand $m_1 \gg m_2$, $\mu \approx m_2$ et $G \approx M_1$: on retrouve le modèle du centre fixe. L'étoile décrit néanmoins une petite orbite autour de G : c'est ce mouvement, détecté par effet Doppler, qui a permis de découvrir de nombreuses exoplanètes (voir les classiques des concours).

VIII Synthèse

★ À retenir

Force centrale	$\vec{L}_O = \vec{\text{cte}} \Rightarrow$ mouvement plan, $C = r^2\dot{\theta}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2}$
Énergie	$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$, $\quad E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$
Champ newtonien	$E_p = -\frac{K}{r}$, $\quad r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$, $\quad p = \frac{mC^2}{K}$
Orbite circulaire	$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r}}$, $\quad E_m = -E_c = \frac{E_p}{2} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r}$
Ellipse	$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a}$, $\quad v^2 = \mathcal{G}M_0\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, $\quad r_P v_P = r_A v_A$
Kepler III	$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}$
Vitesses cosmiques	$v_1 = \sqrt{g_0 R_T} = 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $\quad v_\ell = \sqrt{2}\,v_1 = 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$

- $E_m < 0$: état lié (cercle, ellipse) ; $E_m \geq 0$: état de diffusion (parabole, hyperbole). Cas répulsif : toujours diffusion.
- Géostationnaire : orbite circulaire équatoriale, $T = 86\,164\,\mathrm{s}$, altitude $\approx 36\,000\,\mathrm{km}$.

IX Exercices d'approfondissement

EXERCICE 10 Erreur de satellisation ✦✦✦✧✧

Un satellite doit être placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre, avec la vitesse $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r_0}$ perpendiculaire au rayon. Par erreur, sa vitesse (toujours perpendiculaire au rayon) vaut $v_0(1+\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$.

Q-1) Montrer que l'orbite est une ellipse dont le point d'injection est le périgée.

Q-2) Calculer au premier ordre en ε le demi-grand axe a et l'excentricité e.

Q-3) En déduire la variation relative de la période. AN : $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$, $r_0 = 7000\,\mathrm{km}$: altitude de l'apogée par rapport à l'orbite prévue ?

EXERCICE 11 Stabilité des orbites circulaires

Une particule de masse m est soumise à une force centrale dérivant de $E_p(r) = -\dfrac{K}{r^n}$ $(K > 0,\ n > 0)$.

Q-1) Écrire $E_{p,\text{eff}}(r)$ et la condition d'existence d'une orbite circulaire de rayon r_0.

Q-2) Montrer que cette orbite est stable vis-à-vis des perturbations radiales si et seulement si $n < 2$.

Q-3) Dans le cas newtonien $(n = 1)$, calculer la pulsation Ω des petites oscillations radiales et la comparer à la vitesse angulaire ω sur l'orbite. Interpréter.

EXERCICE 12 Étoile double : masse de Sirius

Sirius B tourne autour de Sirius A en $50\,\mathrm{ans}$; le demi-grand axe de l'orbite relative vaut $20\,\mathrm{ua}$.

Q-1) En utilisant la partie VII, montrer que la troisième loi de Kepler s'écrit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_A+m_B)}$.

Q-2) En déduire la masse totale du système en masses solaires.

EXERCICE 13 La durée des saisons

Les saisons astronomiques correspondent chacune à une rotation de $90°$ de la droite Soleil–Terre. On suppose ici que le périhélie coïncide avec le solstice d'hiver (boréal), en $\theta = 0$. L'orbite terrestre est l'ellipse $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e = 0{,}0167$.

Q-1) Montrer qu'au premier ordre en e, $r^2 \approx p^2(1 - 2e\cos\theta)$.

Q-2) Calculer au premier ordre en e l'aire balayée pendant l'hiver $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ et pendant l'été $(\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2})$, rapportées à l'aire totale.

Q-3) En déduire les durées de l'hiver et de l'été (en jours). Comparer aux valeurs observées ($89{,}0$ et $93{,}6$ jours).

Q-4) Pourquoi fait-il plus froid en hiver alors que la Terre est plus proche du Soleil ?

EXERCICE 14 Vecteur de Runge–Lenz

Un point M de masse m est soumis à $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$ $(K > 0)$. On note $\vec{L} = \vec{L}_O = mC\vec{u}_z$ et on définit $\vec{A} = \frac{1}{K}\,\vec{v} \wedge \vec{L} - \vec{u}_r$.

Q-1) Montrer que $\vec{A}$ est constant (on utilisera $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\vec{u}_\theta$ et $\dot\theta = C/r^2$).

Q-2) Exprimer $\vec{A}$ dans la base polaire. En calculant $\vec{A}\cdot\overrightarrow{OM}$, retrouver l'équation $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e = \left\|\vec{A}\right\|$ et θ mesuré à partir de $\vec{A}$.

Q-3) Montrer que $e^2 = 1 + \frac{2mC^2}{K^2}E_m$ et retrouver la classification des trajectoires.

X Classiques des concours

EXERCICE 15 Transfert de Hohmann

★★★★☆

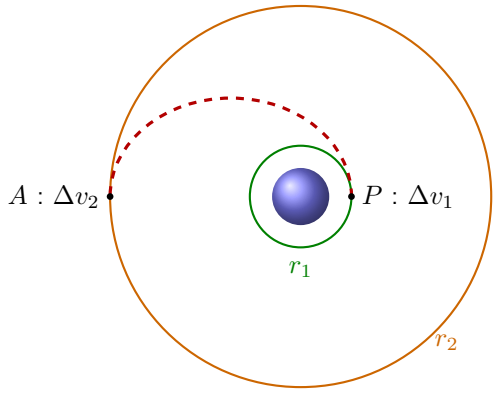
Un satellite est en orbite basse circulaire de rayon $r_1 = R_T + 300\,\text{km} = 6670\,\text{km}$. On veut l'amener sur l'orbite géostationnaire ($r_2 = 42\,200\,\text{km}$) par une demi-ellipse de transfert, tangente aux deux orbites, de périgée r_1 et d'apogée r_2. Les poussées des moteurs sont supposées instantanées et tangentielles. $\mathcal{G}M_T = 3{,}99 \times 10^{14}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}$.

Q-1) Calculer les vitesses v_{c1} et v_{c2} sur les deux orbites circulaires.

Q-2) Exprimer, par conservation de l'énergie et de la constante des aires, les vitesses v_P et v_A au périgée et à l'apogée de l'ellipse de transfert.

Q-3) En déduire les deux variations de vitesse Δv_1 et Δv_2 et la durée du transfert.

Q-4) Pourquoi le transfert se fait-il de façon tangentielle ?



EXERCICE 16 Freinage atmosphérique d'un satellite

★★★★☆

Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire basse de rayon r. Dans la haute atmosphère, il subit une force de frottement $\vec{f} = -\alpha m v\,\vec{v}$ très faible, de sorte que l'orbite reste quasi circulaire à chaque instant.

Q-1) Exprimer v, E_c, E_p et E_m en fonction de r.

Q-2) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et en déduire $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

Q-3) Montrer que la vitesse du satellite **augmente** sous l'effet du frottement. Lever ce paradoxe.

Q-4) AN : $\alpha = 1 \times 10^{-14}\,\text{m}^{-1}$, altitude $400\,\text{km}$, $\mathcal{G}M_T = 3{,}99 \times 10^{14}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}$. Estimer la perte d'altitude par jour.

EXERCICE 17 Détection d'exoplanètes par les vitesses radiales

★★★★☆

Une étoile E (masse M) et une planète P (masse $m \ll M$) forment un système isolé, étudié dans le référentiel barycentrique (partie VII). Les orbites sont supposées circulaires, de période T.

Q-1) Montrer que les vitesses de l'étoile et de la planète vérifient $\frac{v_E}{v_P} = \frac{m}{M}$.

Q-2) Exprimer le rayon a de l'orbite relative (avec $M + m \approx M$), puis la vitesse v_P.

Q-3) Un observateur situé dans le plan de l'orbite mesure par effet Doppler la vitesse radiale de l'étoile, sinusoïdale d'amplitude K_E. Exprimer m en fonction de K_E, M, T et $\mathcal{G}$.

Q-4) 51 Pegasi b (1995) : $M = 2{,}1 \times 10^{30}\,\text{kg}$, $T = 4{,}23\,\text{jours}$, $K_E = 56\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer a (en ua) et m (en masses de Jupiter, $M_J = 1{,}9 \times 10^{27}\,\text{kg}$). Commenter.

Q-5) Quelle amplitude la Terre provoque-t-elle sur le Soleil ? Et Jupiter ($v_J = 13{,}1\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$) ? Quelles planètes sont les plus faciles à détecter ?