LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

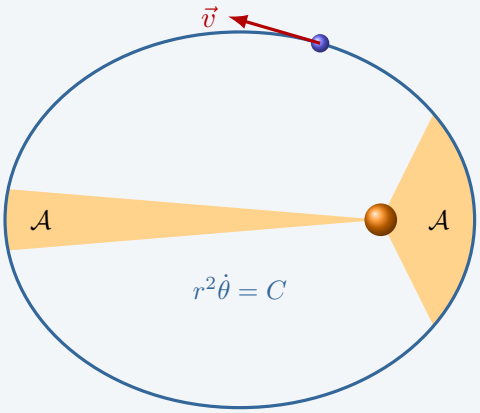
Classes préparatoires aux grandes écoles
**MPSI — Physique-chimie**
Année 2026-2027

# M7

## MÉCANIQUE

# Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives

Loi des aires — Énergie potentielle effective — Champ newtonien — Lois de Kepler — Satellites




> *Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie.*
>
> — Blaise Pascal, *Pensées* (1670)

physionova
physionova.academy

**Pr. CHARIFI**
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Mouvement képlérien »

# M7 — Forces centrales

## Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Établir la conservation du moment cinétique pour une force centrale ; en déduire la planéité du mouvement et la loi des aires.
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire l'énergie potentielle effective ; discuter graphiquement la nature du mouvement radial.
- Distinguer états liés et états de diffusion dans un champ newtonien attractif ou répulsif ; relier énergie et nature de la conique (admise).
- Établir les caractéristiques du mouvement circulaire (vitesse, énergie, troisième loi de Kepler) ; énoncer les lois de Kepler.
- Exprimer l'énergie d'une orbite elliptique en fonction du demi-grand axe et l'exploiter (formule de la vitesse, transferts d'orbite).
- Déterminer les caractéristiques des satellites usuels : géostationnaire, orbites basses, navigation ; vitesses cosmiques.

### Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Mouvement képlérien » permet de lancer un satellite avec une vitesse initiale réglable, de voir l'orbite passer du cercle à l'ellipse, à la parabole puis à l'hyperbole, et de vérifier la loi des aires.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

## Table des matières

I Forces centrales conservatives . . . 4
I.1 Définitions . . . 4
I.2 Le champ newtonien . . . 4
II Conservation du moment cinétique et loi des aires . . . 5
II.1 Planéité du mouvement . . . 5
II.2 Loi des aires . . . 5
III Énergie potentielle effective . . . 7
III.1 Réduction à un problème radial . . . 7
IV Mouvement dans un champ newtonien . . . 8
IV.1 Discussion graphique : cas attractif . . . 8
IV.2 Cas répulsif . . . 9
IV.3 Nature des trajectoires . . . 9
IV.4 Pour aller plus loin : équation de la trajectoire . . . 9
V Orbites circulaires et lois de Kepler . . . 11
V.1 Mouvement circulaire . . . 11
V.2 Lois de Kepler . . . 12
V.3 Énergie d'une orbite elliptique . . . 13
VI Satellites terrestres . . . 14
VI.1 Vitesses cosmiques . . . 14
VI.2 Satellite géostationnaire . . . 14
VII Ouverture : le problème à deux corps . . . 16
VIII Synthèse . . . 16

IX Exercices d'approfondissement . . . . . 16
X Classiques des concours . . . . . 19

# I Forces centrales conservatives

## I.1 Définitions

**Définition — Force centrale** R

Une force $\vec{F}$ appliquée à un point $M$ est **centrale** de centre $O$ si sa droite d'action passe constamment par un point $O$ fixe dans le référentiel d'étude :

$$\vec{F} = F(M)\,\vec{u}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Elle est **attractive** si $F < 0$, **répulsive** si $F > 0$.

**Force centrale conservative** R

Une force centrale dont la valeur algébrique ne dépend que de la distance $r = OM$, $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$, est **conservative** : elle dérive de l'énergie potentielle $E_p(r)$ telle que

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$$

*Démonstration* D *:* en coordonnées sphériques de centre $O$, $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$, donc le travail élémentaire vaut $\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F(r)\,\mathrm{d}r$. C'est la différentielle de $-E_p(r)$ avec $E_p(r) = -\int F(r)\,\mathrm{d}r$ : le travail ne dépend que des distances initiale et finale.

> **Remarque**
>
> Les deux propriétés sont indépendantes. La gravitation exercée par un astre fixe et la tension d'un ressort dont une extrémité est fixée en $O$ sont centrales **et** conservatives. Le poids $m\vec{g}$ (uniforme) est conservatif mais pas central ; la force magnétique de Lorentz et les frottements ne sont ni l'un ni l'autre ; la réaction d'un support n'est en général pas centrale.

## I.2 Le champ newtonien

Les deux interactions fondamentales à longue portée sont en $1/r^2$ :

| Interaction | Force sur $M$ | Énergie potentielle | Constante $K$ |
|---|---|---|---|
| Gravitationnelle (masse $M_0$ en $O$) | $-\dfrac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{u}_r$ | $-\dfrac{\mathcal{G}M_0 m}{r}$ | $\mathcal{G}M_0 m > 0$ |
| Coulombienne (charge $q_0$ en $O$) | $\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ | $\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ | $-\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}$ |

On les écrit sous la forme unique d'un **champ newtonien** :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad E_p(r) = -\frac{K}{r} \qquad (E_p \to 0 \text{ à l'infini})$$

avec $K > 0$ pour une interaction **attractive** (gravitation, charges de signes opposés) et $K < 0$ pour une interaction **répulsive**.

**✗ Attention, erreurs fréquentes**

Pour le champ newtonien, la composante radiale $F_r = -\frac{K}{r^2}$ et l'énergie potentielle $E_p = -\frac{K}{r}$ ont le **même signe** (négatif dans le cas attractif) : le signe moins de $F = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$ est compensé par la dérivée de $\frac{1}{r}$. Ne pas « corriger » un signe à tort.

**Remarque**

Dans tout le chapitre, le centre de force $O$ (astre de masse $M_0 \gg m$, noyau lourd) est supposé **fixe dans un référentiel galiléen** : héliocentrique pour les planètes, géocentrique pour les satellites terrestres. La partie VII montre comment lever cette hypothèse pour deux corps de masses comparables.

**Ordres de grandeur**

- $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$ ; $\mathcal{G}M_T = 3{,}99 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$ ; $\mathcal{G}M_\odot = 1{,}33 \times 10^{20}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$.
- Rapport force électrique / force gravitationnelle entre deux protons : $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \mathcal{G} m_p^2} \approx 1 \times 10^{36}$ : la gravitation ne domine qu'à grande échelle, pour des corps globalement neutres.

# II Conservation du moment cinétique et loi des aires

## II.1 Planéité du mouvement

**Conséquences d'une force centrale** R D

Si $M$ n'est soumis qu'à une force centrale de centre $O$ fixe dans un référentiel galiléen, alors $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge F\vec{u}_r = \vec{0}$ et le théorème du moment cinétique (chapitre M6) donne

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{L}_0 \quad \text{constant}$$

- Si $\vec{L}_0 \neq \vec{0}$ : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{L}_0 = 0$ à chaque instant, donc $M$ reste dans le **plan** passant par $O$ et perpendiculaire à $\vec{L}_0$, c'est-à-dire le plan défini par $O$, la position initiale et la vitesse initiale.
- Si $\vec{L}_0 = \vec{0}$ : $\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ ; le mouvement est **rectiligne** sur une droite passant par $O$.

On utilise alors les coordonnées polaires $(r, \theta)$ de centre $O$ dans le plan du mouvement, avec $\vec{u}_z$ selon $\vec{L}_0$ : $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$. On retrouve ce résultat en projetant le PFD sur $\vec{u}_\theta$ : la force n'ayant pas de composante orthoradiale, $m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{m}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$.

## II.2 Loi des aires

**Définition — Constante des aires** R

$$C = r^2\dot{\theta} = \frac{L_O}{m} \quad (\text{en } \mathrm{m^2\cdot s^{-1}})$$

est une constante du mouvement : $\dot{\theta}$ garde un signe constant, et $\left|\dot{\theta}\right|$ est d'autant plus grand que $M$ est proche de $O$.

### Loi des aires R D

L'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ par unité de temps (**vitesse aréolaire**) est constante :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

Des aires égales sont balayées pendant des durées égales.

*Démonstration :* pendant $\mathrm{d}t$, $\overrightarrow{OM}$ balaie le triangle (infinitésimal) de côtés $\overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, d'aire $\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\| = \frac{1}{2}r \cdot r\,\mathrm{d}\theta$.

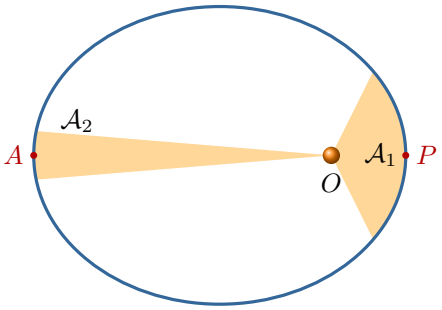



**Fig. 1 :** $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ : arcs parcourus pendant la même durée. Le mobile va plus vite au péricentre $P$ qu'à l'apocentre $A$.

### ☞ Méthode — Exploiter la constante des aires M

En un point où la vitesse est **orthoradiale** (péricentre, apocentre, orbite circulaire) : $|C| = rv$. Plus généralement, $|C| = r\,v\,|\sin\alpha| = b\,v$, où $\alpha$ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ et $b$ le paramètre d'impact. Pour deux points $P$ et $A$ où $\vec{v} \perp \overrightarrow{OM}$ : $r_P v_P = r_A v_A$.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 1 — Vitesses de la comète de Halley ✦✧✧✧✧

La comète de Halley décrit une ellipse de demi-grand axe $a = 17{,}8\,\text{ua}$ et d'excentricité $e = 0{,}967$ autour du Soleil. Les distances au périhélie et à l'aphélie valent $r_P = a(1-e)$ et $r_A = a(1+e)$.

**Q-1)** Calculer $r_P$ et $r_A$.

**Q-2)** Calculer le rapport $v_P/v_A$ des vitesses au périhélie et à l'aphélie.

**Correction**

**Q-1)** $r_P = 17{,}8 \times 0{,}033 = 0{,}59\,\text{ua}$ (entre Mercure et Vénus) et $r_A = 17{,}8 \times 1{,}967 = 35\,\text{ua}$ (au-delà de Neptune).

**Q-2)** En $P$ et $A$, la vitesse est orthoradiale : $r_P v_P = r_A v_A$, d'où $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1+e}{1-e} \approx 60$.

### EXERCICE 2 — Mouvement à $\vec{L}_O = \vec{0}$ ✦✦✧✧✧

Une sonde est lâchée sans vitesse initiale, dans le référentiel géocentrique, à la distance $r_0$ du centre de la Terre.

**Q-1)** Montrer que son mouvement est rectiligne.

**Q-2)** Exprimer sa vitesse lorsqu'elle atteint la surface terrestre (rayon $R_T$), sans frottement. AN pour $r_0 \to \infty$.

**Correction**

**Q-1)** $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM_0} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ à $t = 0$, donc à chaque instant : $\vec{v}$ reste colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, le mouvement se fait sur la droite $(OM_0)$.

**Q-2)** Conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r_0}$, d'où $v = \sqrt{2\mathcal{G}M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_0}\right)}$. Pour $r_0 \to \infty$, $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ : c'est la vitesse de libération (partie VI).

# III Énergie potentielle effective

## III.1 Réduction à un problème radial

La force étant conservative, l'énergie mécanique se conserve. En polaires, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ et $r\dot{\theta} = C/r$ :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)}_{E_{p,\mathrm{eff}}(r)} = \text{cte.}$$

**Définition — Énergie potentielle effective** R D

$$E_{p,\mathrm{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

L'évolution de $r(t)$ est celle d'un point **fictif** à une dimension, de masse $m$, d'énergie $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\mathrm{eff}}(r)$. Le terme $\frac{mC^2}{2r^2}$, qui provient de l'énergie cinétique orthoradiale, joue le rôle d'une **barrière centrifuge**.

**☞ Méthode — Discussion graphique** M

Comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, le mouvement n'est possible que dans les régions où

$$E_{p,\mathrm{eff}}(r) \leq E_m$$

On trace $E_{p,\mathrm{eff}}(r)$ et la droite horizontale d'ordonnée $E_m$ :

- si $r$ est confiné dans un intervalle $[r_{\min}, r_{\max}]$, l'état est **lié** ; aux bornes, $\dot{r} = 0$ et la vitesse est orthoradiale ;
- si $r$ peut tendre vers l'infini, l'état est **de diffusion** (ou libre) ;
- si $E_m = \min E_{p,\mathrm{eff}}$, $r$ reste égal à $r_0$ : mouvement **circulaire** (uniforme d'après la loi des aires).

Une fois $r(t)$ connu, la loi des aires $\dot{\theta} = C/r^2$ donne $\theta(t)$.

**✗ Attention, erreurs fréquentes**

- $E_{p,\mathrm{eff}}$ n'est pas une énergie potentielle au sens d'une force réelle : la barrière centrifuge est une partie de l'énergie **cinétique**.
- $C$ est fixée par les conditions initiales : on ne peut pas dériver $E_{p,\mathrm{eff}}$ « à $C$ variable ».
- La vitesse ne s'annule pas aux bornes $r_{\min}$ et $r_{\max}$ (sauf si $C = 0$) : c'est seulement sa composante radiale.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 3 Oscillateur spatial isotrope ✦✦✧✧✧

Un point de masse $m$ est soumis à la force $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$ $(k > 0)$, avec $O$ fixe.

**Q-1)** Justifier que la force est centrale et conservative ; donner $E_p(r)$ et $E_{p,\text{eff}}(r)$.

**Q-2)** Montrer que tous les états sont liés. Déterminer le rayon $r_0$ et la vitesse angulaire $\omega_c$ du mouvement circulaire de constante des aires $C$.

**Q-3)** Calculer la pulsation $\Omega$ des petites oscillations radiales autour de $r_0$. Comparer à $\omega_c$ et conclure sur la forme de la trajectoire.

**Correction**

**Q-1)** $\vec{F} = -kr\,\vec{u}_r$ : centrale, de valeur ne dépendant que de $r$. $E_p = \frac{1}{2}kr^2$ et $E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{1}{2}kr^2$.

**Q-2)** $E_{p,\text{eff}} \to +\infty$ en $0$ et à l'infini : $r$ est toujours borné. Minimum : $-\frac{mC^2}{r_0^3} + kr_0 = 0$, soit $r_0^4 = \frac{mC^2}{k}$, et $\omega_c = \frac{C}{r_0^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

**Q-3)** $E''_{p,\text{eff}}(r_0) = \frac{3mC^2}{r_0^4} + k = 4k$, donc $\Omega = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2\omega_c$ : $r$ effectue exactement deux oscillations par tour, la trajectoire est fermée. C'est en fait une ellipse **centrée** en $O$ (mouvement sinusoïdal selon $x$ et $y$, chapitre M5).

# IV Mouvement dans un champ newtonien

## IV.1 Discussion graphique : cas attractif

Pour $K > 0$ : $E_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{K}{r}$. Elle tend vers $+\infty$ en $0$, vers $0^-$ à l'infini, et présente un minimum en $r_0 = \dfrac{mC^2}{K}$, de valeur $E_{\min} = -\dfrac{K}{2r_0}$.

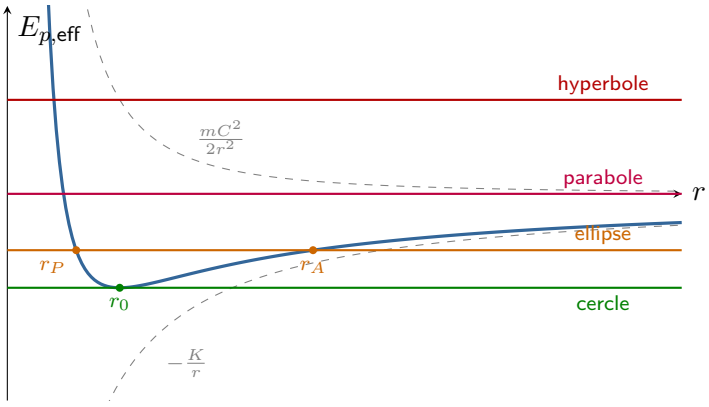



**Fig. 2 :** Énergie potentielle effective d'un champ newtonien attractif et différents niveaux d'énergie.

> **Remarque**
>
> Points remarquables de $E_{p,\text{eff}}$ : elle s'annule en $r' = \frac{r_0}{2}$, est minimale en $r_0 = \frac{mC^2}{K}$ et présente un point d'inflexion en $r'' = \frac{3r_0}{2}$. Ils permettent un tracé rapide et soigné.

► $E_m = E_{\min}$ : $r = r_0$, mouvement **circulaire uniforme**.

- $E_{\min} < E_m < 0$ : $r$ oscille entre $r_P$ (**péricentre**) et $r_A$ (**apocentre**) : **état lié**.
- $E_m \geq 0$ : $r$ n'est borné qu'inférieurement ; le mobile vient de l'infini et y repart : **état de diffusion**. Pour $E_m = 0$, la vitesse tend vers $0$ à l'infini.

## IV.2 Cas répulsif

Pour $K < 0$ : $E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{|K|}{r}$ est décroissante et positive ; nécessairement $E_m > 0$ et il n'existe que des **états de diffusion** : la particule s'approche jusqu'à une distance minimale puis repart à l'infini. C'est la situation de l'expérience de Rutherford (1911) : des particules $\alpha$ (noyaux d'hélium, charge $2e$) sont envoyées sur une feuille d'or ; quelques-unes sont rétrodiffusées, ce qui ne s'explique que si la charge positive de l'atome est concentrée dans un **noyau** de taille inférieure à $10^{-14}\,\text{m}$.

## IV.3 Nature des trajectoires

On admet (la démonstration utilise les formules de Binet, hors programme) que la trajectoire est une **conique** de **foyer** $O$, d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad p = \frac{mC^2}{K}$$

où $p$ est le **paramètre** et $e \geq 0$ l'**excentricité**, et $\theta_0$ la direction du péricentre. L'excentricité est liée à l'énergie par $E_m = \dfrac{K}{2p}\left(e^2 - 1\right)$.

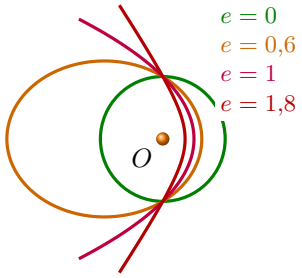



**Fig. 3 :** Coniques de même paramètre $p$ et de foyer $O$.

| Énergie mécanique | Excentricité | Trajectoire | État |
|---|---|---|---|
| $E_m = E_{\min} = -\frac{K}{2r_0}$ | $e = 0$ | cercle de rayon $r_0 = p$ | lié |
| $E_{\min} < E_m < 0$ | $0 < e < 1$ | ellipse | lié |
| $E_m = 0$ | $e = 1$ | parabole | diffusion (vitesse nulle à l'infini) |
| $E_m > 0$ | $e > 1$ | branche d'hyperbole | diffusion |

**Remarque**

Le champ newtonien a une propriété remarquable : les trajectoires liées sont **fermées** (ellipses). Pour un champ central quelconque, les états liés donnent en général des **rosaces** qui ne se referment pas. La lente rotation de l'ellipse de Mercure (avance du périhélie de $43''$ par siècle non expliquée par les autres planètes) a été l'un des premiers succès de la relativité générale.

## IV.4 Pour aller plus loin : équation de la trajectoire

**Remarque**

La démonstration de la forme conique n'est pas exigible, mais elle est classique. On pose $u = \frac{1}{r}$ et on

exprime tout en fonction de $\theta$ grâce à $\dot\theta = Cu^2$ :

$$\dot r = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot\theta = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 = C^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right].$$

C'est la première formule de Binet. De même, $\ddot r = \dfrac{\mathrm{d}\dot r}{\mathrm{d}\theta}\dot\theta = -C^2u^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$ et $r\dot\theta^2 = C^2u^3$ : l'accélération, purement radiale ($a_\theta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = 0$), vaut $\vec a = -C^2u^2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\vec u_r$ (seconde formule de Binet). L'énergie s'écrit alors $E_m = \frac{1}{2}mC^2\left[u'^2 + u^2\right] - Ku$. En la dérivant par rapport à $\theta$ et en simplifiant par $u'$ (non identiquement nul) :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2} = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{1}{p}\left[1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right].$$

En reportant au péricentre ($\theta = \theta_0$, $u' = 0$) : $E_m = \frac{mC^2}{2p^2}(1+e)^2 - \frac{K}{p}(1+e) = \frac{K}{2p}\left(e^2 - 1\right)$. Dans le cas répulsif ($K < 0$), on écrit $r = \frac{|p|}{e\cos(\theta-\theta_0)-1}$ avec $e > 1$ : $O$ est alors le foyer situé du côté **convexe** de la branche d'hyperbole.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 4 — Comète parabolique

✦✦✧✧✧

Une comète décrit une parabole de foyer le Soleil, avec une distance minimale $r_P = 0{,}50\,\mathrm{ua}$. Données : $1\,\mathrm{ua} = 1{,}50\times10^{11}\,\mathrm{m}$, $\mathcal{G}M_\odot = 1{,}33\times10^{20}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$.

**Q-1)** Que vaut son énergie mécanique ? En déduire sa vitesse $v(r)$ puis sa vitesse au périhélie.

**Q-2)** Comparer sa vitesse lorsqu'elle croise l'orbite terrestre à la vitesse orbitale de la Terre (orbite supposée circulaire).

**Correction**

**Q-1)** Trajectoire parabolique : $E_m = 0$, donc $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}M_\odot m}{r}$ et $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_\odot}{r}}$. Au périhélie : $v_P = \sqrt{\frac{2\times1{,}33\times10^{20}}{7{,}5\times10^{10}}} = 59{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

**Q-2)** À $r = 1\,\mathrm{ua}$ : $v = 42{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ ; la Terre a $v_T = \sqrt{\mathcal{G}M_\odot/r} = 29{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, et $v = \sqrt{2}\,v_T$ : c'est la vitesse de libération du système solaire à cette distance.

### EXERCICE 5 — Distance minimale d'approche (Rutherford)

✦✦✧✧✧

Une particule $\alpha$ (charge $2e$, énergie cinétique initiale $E_0 = 5{,}0\,\mathrm{MeV}$) est lancée de très loin vers un noyau d'or ($Z = 79$) supposé fixe. On donne $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0\times10^9\,\mathrm{SI}$ et $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$.

**Q-1)** Pour un choc frontal, calculer la distance minimale d'approche $d_0$.

**Q-2)** Avec un paramètre d'impact $b \neq 0$, montrer que la distance minimale vérifie $r_{\min}^2 - d_0 r_{\min} - b^2 = 0$ et l'exprimer.

**Correction**

**Q-1)** Choc frontal : $C = 0$, la particule s'arrête en $d_0$ : $E_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d_0}$, d'où $d_0 = \frac{9{,}0\times10^9\times2\times79\times(1{,}6\times10^{-19})^2}{5{,}0\times1{,}6\times10^{-13}} = 4{,}6\times10^{-14}\,\mathrm{m}$.

**Q-2)** Au point le plus proche, la vitesse est orthoradiale : $v_0 b = v_{\min} r_{\min}$ (aires). Énergie : $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 + \frac{E_0 d_0}{r_{\min}}$. En divisant par $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ : $1 = \frac{b^2}{r_{\min}^2} + \frac{d_0}{r_{\min}}$, d'où l'équation et $r_{\min} = \frac{d_0 + \sqrt{d_0^2 + 4b^2}}{2} > d_0$.

## EXERCICE 6 Quelle force pour une spirale ?

★★★☆☆

Un point $M$ de masse $m$, soumis à une force centrale de centre $O$, décrit la spirale logarithmique $r = k\,\mathrm{e}^{\theta}$ ($k > 0$).

**Q-1)** À l'aide de la seconde formule de Binet, déterminer la loi de force $F(r)$.

**Q-2)** Est-elle attractive ? La force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ? Que vaut l'énergie mécanique ?

**Correction**

**Q-1)** $u = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{-\theta}$, donc $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = u$ et $\vec{a} = -C^2u^2(2u)\vec{u}_r = -\frac{2C^2}{r^3}\vec{u}_r$ : $\vec{F} = -\frac{2mC^2}{r^3}\vec{u}_r$, force en $1/r^3$.

**Q-2)** Attractive ; centrale et ne dépendant que de $r$, elle est conservative : $E_p = -\frac{mC^2}{r^2}$. Alors $E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{mC^2}{r^2} = -\frac{mC^2}{2r^2}$ et, sur la spirale, $\dot{r} = C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{r^2} = \frac{C}{r}$, d'où $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{mC^2}{2r^2} = 0$ : la trajectoire est à la frontière entre chute vers $O$ et fuite à l'infini.

# V Orbites circulaires et lois de Kepler

## V.1 Mouvement circulaire

**Satellite en orbite circulaire** R D

Pour une orbite circulaire de rayon $r$ autour d'un astre de masse $M_0$ :

- le mouvement est **uniforme**, de vitesse

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r}}$$

- les énergies vérifient

$$E_c = \frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r} = -\frac{E_p}{2} \qquad E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r} = -E_c$$

- la période vérifie la **troisième loi de Kepler**

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}$$

*Démonstration.* La loi des aires avec $r$ constant donne $\dot{\theta}$ constant : mouvement uniforme. Le PFD projeté sur $\vec{u}_r$ donne $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}$, d'où $v^2 = r^2\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$. Enfin $T = \frac{2\pi r}{v}$, d'où $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{\mathcal{G}M_0}$.

**✗ Attention, erreurs fréquentes**

- Plus un satellite est haut, plus il est **lent** et plus son énergie mécanique est **grande** (moins négative) : pour monter, il faut fournir de l'énergie, mais la vitesse finale est plus faible.
- La masse $m$ du satellite n'intervient pas $(v,\ T)$ : conséquence de l'égalité entre masse inerte et masse grave.

## V.2 Lois de Kepler

**Lois de Kepler (1609–1619)** R

1. Les planètes décrivent des **ellipses** dont le Soleil occupe un des foyers.
2. Le rayon vecteur Soleil–planète balaie des **aires égales** pendant des durées égales.
3. Le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_\odot}$$

la constante étant la même pour toutes les planètes.

Ces lois empiriques, tirées par Kepler des observations de Tycho Brahe, sont des **conséquences** de la loi de la gravitation universelle de Newton (1687) : la première traduit la forme conique des trajectoires, la deuxième la conservation du moment cinétique ; la troisième est démontrée ci-dessus dans le cas circulaire et admise dans le cas elliptique ($r \to a$). Les orbites des planètes sont d'ailleurs presque circulaires (excentricité maximale : $0{,}21$ pour Mercure, $0{,}017$ pour la Terre).

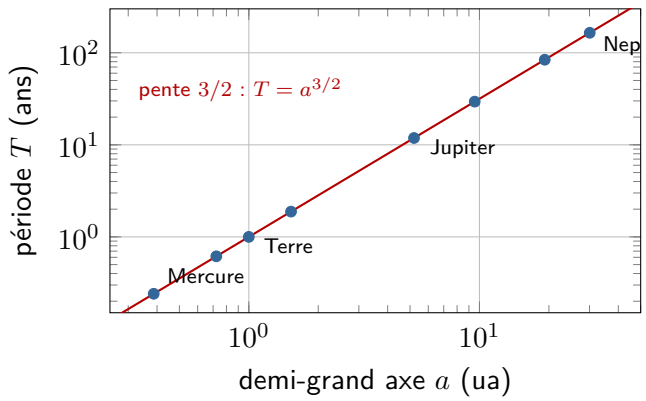



**Fig. 4 :** Les huit planètes en coordonnées logarithmiques : les points s'alignent sur une droite de pente $\frac{3}{2}$.

## V.3 Énergie d'une orbite elliptique

### Énergie d'une ellipse R D

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a} \qquad 2a = r_P + r_A$$

L'énergie ne dépend que du **demi-grand axe** (et pas de l'excentricité).

*Démonstration.* En $P$ et $A$, $\dot{r} = 0$ : $r_P$ et $r_A$ sont les deux racines de $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r}$, c'est-à-dire de $E_m r^2 + \mathcal{G}M_0 m r - \frac{mC^2}{2} = 0$. Leur somme vaut $r_P + r_A = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{E_m} = 2a$.

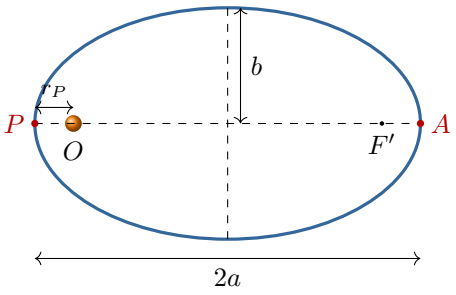



**Fig. 5 :** Ellipse : $r_P = a(1-e)$, $r_A = a(1+e)$, $b = a\sqrt{1-e^2}$.

### Troisième loi de Kepler pour une ellipse D

Sur une période, le rayon vecteur balaie toute l'ellipse, d'aire $\pi ab$ : la loi des aires donne $\pi ab = \frac{C}{2}T$. Avec les relations géométriques $b^2 = ap$ et $p = \frac{mC^2}{K} = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_0}$ :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^3 p}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_0}.$$

On remarque que l'énergie et la période d'une orbite elliptique s'obtiennent à partir de celles de l'orbite circulaire en remplaçant le rayon $r$ par le demi-grand axe $a$.

### Vitesse sur une ellipse (formule « vis-viva ») M

Par conservation de l'énergie en un point quelconque de l'orbite :

$$v^2 = \mathcal{G}M_0\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

On retrouve $v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$ pour un cercle ($a = r$) et $v^2 = \frac{2\mathcal{G}M_0}{r}$ pour une parabole ($a \to \infty$).

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 7 Masses de la Terre et de Jupiter ✦✧✧✧✧

La Lune décrit autour de la Terre une orbite quasi circulaire de rayon $3{,}84 \times 10^5\,\text{km}$ en $27{,}3\,\text{jours}$. Io, satellite de Jupiter, a une orbite de rayon $4{,}22 \times 10^5\,\text{km}$ et une période de $1{,}77\,\text{jours}$. Calculer $M_T$ et $M_J$.

**Correction**

Troisième loi de Kepler : $M_0 = \frac{4\pi^2 r^3}{\mathcal{G}T^2}$. Terre : $T = 2{,}36 \times 10^6\,\text{s}$, $M_T = \frac{4\pi^2 \times (3{,}84\times10^8)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(2{,}36\times10^6)^2} = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$. Jupiter : $T = 1{,}53 \times 10^5\,\text{s}$, $M_J = 1{,}9 \times 10^{27}\,\text{kg} \approx 320\,M_T$.

**EXERCICE 8** **Planètes et comètes** ✦✧✧✧✧

**Q-1)** Mars est en moyenne à $1{,}52\,\text{ua}$ du Soleil. Calculer sa période de révolution en années.

**Q-2)** Calculer la période de la comète de Halley ($a = 17{,}8\,\text{ua}$).

**Correction**

Pour les corps du système solaire, en prenant comme unités l'année et l'unité astronomique (Terre : $T = 1\,\text{an}$, $a = 1\,\text{ua}$), la troisième loi s'écrit $T = a^{3/2}$.

**Q-1)** $T = 1{,}52^{3/2} = 1{,}87\,\text{ans}.$

**Q-2)** $T = 17{,}8^{3/2} = 75\,\text{ans}$ (passages en 1910, 1986, prochain en 2061).

# VI Satellites terrestres

## VI.1 Vitesses cosmiques

**Première vitesse cosmique et vitesse de libération** R D

▶ **Première vitesse cosmique** : vitesse d'un satellite en orbite circulaire rasante ($r = R_T$), avec $g_0 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$ :

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T} \approx 7{,}9\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$$

▶ **Vitesse de libération** (deuxième vitesse cosmique) : vitesse minimale à communiquer depuis la surface pour atteindre l'infini, c'est-à-dire pour $E_m \geq 0$ :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2}\,v_1 \approx 11{,}2\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$$

**Remarque**

Les lanceurs partent vers l'Est et le plus près possible de l'équateur (Kourou, $5°$ N) pour profiter de la vitesse d'entraînement due à la rotation terrestre, jusqu'à $465\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (voir chapitre M8).

## VI.2 Satellite géostationnaire

**Orbite géostationnaire** R D

Un satellite **géostationnaire** reste à la verticale d'un même point de la surface terrestre. Son orbite est **circulaire**, dans le **plan équatorial**, parcourue dans le sens de rotation de la Terre avec la période du jour sidéral $T = 86\,164\,\text{s}$, et

$$r = \left(\frac{\mathcal{G}M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42\,200\,\text{km} \qquad h = r - R_T \approx 35\,800\,\text{km}$$

*Démonstration.* On raisonne dans le référentiel **géocentrique** (galiléen), et non dans le référentiel terrestre qui tourne. Le point de la surface situé à la verticale du satellite décrit un cercle centré sur l'axe des pôles,

dans un plan parallèle à l'équateur ; le satellite décrit donc aussi un cercle centré sur l'axe. Or le plan de son orbite contient $O$ (force centrale) : ce plan est l'équateur. La distance $r$ étant constante, le mouvement est circulaire uniforme, de période égale à celle de la rotation terrestre ; la troisième loi de Kepler donne $r$.

| Type d'orbite | Altitude | Période | Missions |
|---|---|---|---|
| Basse (LEO) | $300$ à $2000\,\mathrm{km}$ | $1{,}5\,\mathrm{h}$ à $2\,\mathrm{h}$ | ISS, observation, constellations |
| Héliosynchrone (quasi polaire) | $\approx 800\,\mathrm{km}$ | $\approx 100\,\mathrm{min}$ | météorologie, imagerie (Spot) |
| Moyenne (MEO) | $\approx 20\,000\,\mathrm{km}$ | $\approx 12\,\mathrm{h}$ | navigation (GPS, Galileo) |
| Géostationnaire (GEO) | $35\,800\,\mathrm{km}$ | $23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}$ | télécommunications, Météosat |

**Remarque**

**Effet de fronde.** Une sonde qui frôle une planète en mouvement peut gagner (ou perdre) de la vitesse dans le référentiel héliocentrique : dans le référentiel de la planète, elle décrit une hyperbole et repart avec la même vitesse, mais dans une autre direction ; la composition avec la vitesse de la planète modifie son énergie héliocentrique. Les sondes Voyager ont ainsi gagné l'énergie nécessaire pour quitter le système solaire.

**Ordres de grandeur**

- Soleil : $R_\odot = 7{,}0\times10^5\,\mathrm{km}$, $M_\odot = 2{,}0\times10^{30}\,\mathrm{kg}$ ; Terre : $R_T = 6{,}4\times10^3\,\mathrm{km}$, $M_T = 6{,}0\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ ; $1\,\mathrm{ua} = 1{,}5\times10^8\,\mathrm{km}$.
- En dessous de $200\,\mathrm{km}$ d'altitude environ, le frottement atmosphérique fait retomber un satellite en quelques jours.
- ISS à $400\,\mathrm{km}$ : $v = 7{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $T = 92\,\mathrm{min}$ ; environ $16$ tours par jour.
- Lune : $r = 384\,000\,\mathrm{km}$, $v \approx 1{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $T = 27{,}3\,\mathrm{jours}$.
- Terre autour du Soleil : $v \approx 30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ ; vitesse de libération du système solaire depuis l'orbite terrestre : $42\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 9 Satellites usuels ✦✧✧✧✧

Données : $\mathcal{G}M_T = 3{,}99\times10^{14}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$, $R_T = 6371\,\mathrm{km}$.

**Q-1)** Calculer la vitesse et la période de l'ISS, en orbite circulaire à $400\,\mathrm{km}$ d'altitude.

**Q-2)** Calculer le rayon et l'altitude de l'orbite géostationnaire, ainsi que la vitesse du satellite.

**Q-3)** Quelle énergie minimale faut-il fournir à un satellite de $1{,}0\,\mathrm{t}$ pour le faire passer de l'orbite de l'ISS à l'orbite géostationnaire ?

**Correction**

**Q-1)** $r = 6{,}77\times10^6\,\mathrm{m}$ : $v = \sqrt{\frac{3{,}99\times10^{14}}{6{,}77\times10^6}} = 7{,}67\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $T = \frac{2\pi r}{v} = 5{,}55\times10^3\,\mathrm{s} = 92\,\mathrm{min}$.

**Q-2)** $r = \left(\frac{3{,}99\times10^{14}\times86164^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4{,}22\times10^7\,\mathrm{m}$, $h = 35\,800\,\mathrm{km}$, $v = 3{,}07\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

**Q-3)** $\Delta E_m = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{3{,}99\times10^{17}}{2}\left(\frac{1}{6{,}77\times10^6}-\frac{1}{4{,}22\times10^7}\right) = 2{,}5\times10^{10}\,\mathrm{J}$, bien que la vitesse finale soit plus faible.

## VII Ouverture : le problème à deux corps

Lorsque les deux masses sont comparables (étoile double, système Terre–Lune), le centre de force n'est plus fixe. Soit deux points $M_1$ (masse $m_1$) et $M_2$ (masse $m_2$) formant un système isolé, en interaction centrale ($\vec{F}_{1\to 2} = \vec{F}$). On note $G$ leur centre de masse et $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

- Le système étant isolé, $G$ a un mouvement rectiligne uniforme : le **référentiel barycentrique** $\mathcal{R}^\star$ (lié à $G$, en translation) est galiléen.
- On montre que $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ avec la **masse réduite** $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ : le mouvement relatif est celui d'une **particule fictive** de masse $\mu$ soumise à $\vec{F}$ depuis le point fixe $G$. Tout ce chapitre s'applique à elle.
- Les trajectoires réelles s'en déduisent : $\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ et $\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$ (homothéties de centre $G$).
- Pour la gravitation, la troisième loi de Kepler devient $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_1+m_2)}$.

Quand $m_1 \gg m_2$, $\mu \approx m_2$ et $G \approx M_1$ : on retrouve le modèle du centre fixe. L'étoile décrit néanmoins une petite orbite autour de $G$ : c'est ce mouvement, détecté par effet Doppler, qui a permis de découvrir de nombreuses exoplanètes (voir les classiques des concours).

## VIII Synthèse

**★ À retenir**

| | |
|---|---|
| **Force centrale** | $\vec{L}_O = \vec{\text{cte}} \Rightarrow$ mouvement plan, $C = r^2\dot{\theta}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2}$ |
| **Énergie** | $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$, $\quad E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$ |
| **Champ newtonien** | $E_p = -\frac{K}{r}$, $\quad r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$, $\quad p = \frac{mC^2}{K}$ |
| **Orbite circulaire** | $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r}}$, $\quad E_m = -E_c = \frac{E_p}{2} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r}$ |
| **Ellipse** | $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a}$, $\quad v^2 = \mathcal{G}M_0\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, $\quad r_P v_P = r_A v_A$ |
| **Kepler III** | $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_0}$ |
| **Vitesses cosmiques** | $v_1 = \sqrt{g_0 R_T} = 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $\quad v_\ell = \sqrt{2}\,v_1 = 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ |

- $E_m < 0$ : état lié (cercle, ellipse) ; $E_m \geq 0$ : état de diffusion (parabole, hyperbole). Cas répulsif : toujours diffusion.
- Géostationnaire : orbite circulaire équatoriale, $T = 86\,164\,\mathrm{s}$, altitude $\approx 36\,000\,\mathrm{km}$.

## IX Exercices d'approfondissement

### EXERCICE 10 Erreur de satellisation ✦✦✦✧✧

Un satellite doit être placé sur une orbite circulaire de rayon $r_0$ autour de la Terre, avec la vitesse $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r_0}$ perpendiculaire au rayon. Par erreur, sa vitesse (toujours perpendiculaire au rayon) vaut $v_0(1+\varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon \ll 1$.

**Q-1)** Montrer que l'orbite est une ellipse dont le point d'injection est le périgée.

**Q-2)** Calculer au premier ordre en $\varepsilon$ le demi-grand axe $a$ et l'excentricité $e$.

**Q-3)** En déduire la variation relative de la période. AN : $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$, $r_0 = 7000\,\text{km}$ : altitude de l'apogée par rapport à l'orbite prévue ?

**Correction**

**Q-1)** $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2(1+\varepsilon)^2 - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_0} \approx -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{2r_0}(1-2\varepsilon) < 0$ : état lié, ellipse. Au point d'injection, $\dot{r} = 0$ : c'est un sommet. La vitesse y est supérieure à la vitesse circulaire, donc la force de gravitation est insuffisante pour maintenir le rayon : le satellite s'éloigne, ce point est le périgée.

**Q-2)** $-\frac{\mathcal{G}M_Tm}{2a} = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{2r_0}(1-2\varepsilon)$ donne $a = \frac{r_0}{1-2\varepsilon} \approx r_0(1+2\varepsilon)$. Avec $r_P = r_0 = a(1-e)$ : $e = 2\varepsilon$.

**Q-3)** $T \propto a^{3/2}$ : $\frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2}\frac{\Delta a}{a} = 3\varepsilon = 0{,}3\,\%$. Apogée : $r_A = a(1+e) \approx r_0(1+4\varepsilon)$, soit $4\varepsilon r_0 = 28\,\text{km}$ au-dessus de l'orbite prévue.

## EXERCICE 11 Stabilité des orbites circulaires

Une particule de masse $m$ est soumise à une force centrale dérivant de $E_p(r) = -\dfrac{K}{r^n}$ $(K > 0,\ n > 0)$.

**Q-1)** Écrire $E_{p,\text{eff}}(r)$ et la condition d'existence d'une orbite circulaire de rayon $r_0$.

**Q-2)** Montrer que cette orbite est stable vis-à-vis des perturbations radiales si et seulement si $n < 2$.

**Q-3)** Dans le cas newtonien $(n = 1)$, calculer la pulsation $\Omega$ des petites oscillations radiales et la comparer à la vitesse angulaire $\omega$ sur l'orbite. Interpréter.

**Correction**

**Q-1)** $E_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r^n}$ ; $E'_{p,\text{eff}}(r_0) = -\frac{mC^2}{r_0^3} + \frac{nK}{r_0^{n+1}} = 0$ : $mC^2 = nKr_0^{2-n}$.

**Q-2)** $E''_{p,\text{eff}}(r_0) = \frac{3mC^2}{r_0^4} - \frac{n(n+1)K}{r_0^{n+2}} = \frac{nK}{r_0^{n+2}}(3-n-1) = \frac{nK(2-n)}{r_0^{n+2}}$ : minimum (stable) si et seulement si $n < 2$.

**Q-3)** $n = 1$ : $\Omega^2 = \frac{E''_{p,\text{eff}}(r_0)}{m} = \frac{K}{mr_0^3}$ et $\omega^2 = \frac{C^2}{r_0^4} = \frac{K}{mr_0^3}$ : $\Omega = \omega$. Le rayon fait exactement une oscillation par tour : la trajectoire perturbée est fermée, c'est une ellipse de faible excentricité.

## EXERCICE 12 Étoile double : masse de Sirius

Sirius B tourne autour de Sirius A en $50\,\text{ans}$ ; le demi-grand axe de l'orbite relative vaut $20\,\text{ua}$.

**Q-1)** En utilisant la partie VII, montrer que la troisième loi de Kepler s'écrit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_A+m_B)}$.

**Q-2)** En déduire la masse totale du système en masses solaires.

**Correction**

**Q-1)** $\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mathcal{G}m_Am_B}{r^2}\vec{u}_r$ équivaut à $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mathcal{G}(m_A+m_B)}{r^2}\vec{u}_r$ : c'est le problème d'un point attiré par une masse fixe $m_A + m_B$, d'où la loi de Kepler avec cette masse.

**Q-2)** En comparant au couple Soleil–Terre $(1\,\text{an},\ 1\,\text{ua}$, masse $M_\odot)$ : $\frac{m_A+m_B}{M_\odot} = \frac{a^3/T^2}{1} = \frac{20^3}{50^2} = 3{,}2$ masses solaires.

## EXERCICE 13 La durée des saisons

Les saisons astronomiques correspondent chacune à une rotation de $90°$ de la droite Soleil–Terre. On suppose ici que le périhélie coïncide avec le solstice d'hiver (boréal), en $\theta = 0$. L'orbite terrestre est l'ellipse $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e = 0{,}0167$.

**Q-1)** Montrer qu'au premier ordre en $e$, $r^2 \approx p^2(1 - 2e\cos\theta)$.

**Q-2)** Calculer au premier ordre en $e$ l'aire balayée pendant l'hiver ($0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$) et pendant l'été ($\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$), rapportées à l'aire totale.

**Q-3)** En déduire les durées de l'hiver et de l'été (en jours). Comparer aux valeurs observées ($89{,}0$ et $93{,}6$ jours).

**Q-4)** Pourquoi fait-il plus froid en hiver alors que la Terre est plus proche du Soleil ?

### Correction

**Q-1)** $r^2 = \frac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2} \approx p^2(1 - 2e\cos\theta)$.

**Q-2)** $\mathcal{A} = \int \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta \approx \frac{p^2}{2}\int(1 - 2e\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ ; aire totale $\approx \pi p^2$. Hiver : $\frac{p^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2e\right)$, fraction $\frac{1}{4} - \frac{e}{\pi}$. Été : $\frac{p^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2e\right)$, fraction $\frac{1}{4} + \frac{e}{\pi}$.

**Q-3)** La loi des aires rend les durées proportionnelles aux aires. Hiver : $365{,}25\left(\frac{1}{4} - \frac{0{,}0167}{\pi}\right) = 89{,}4\,\text{jours}$ ; été : $93{,}3\,\text{jours}$. Bon accord (le périhélie est en réalité début janvier, quelques jours après le solstice). L'hiver boréal est la saison la plus courte.

**Q-4)** Les saisons sont dues à l'inclinaison de l'axe de rotation terrestre ($23{,}4°$), qui modifie la hauteur du Soleil et la durée du jour ; la variation de distance (environ $3\,\%$) n'a qu'un effet secondaire.

## EXERCICE 14 Vecteur de Runge–Lenz

Un point $M$ de masse $m$ est soumis à $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$ ($K > 0$). On note $\vec{L} = \vec{L}_O = mC\vec{u}_z$ et on définit $\vec{A} = \frac{1}{K}\,\vec{v}\wedge\vec{L} - \vec{u}_r$.

**Q-1)** Montrer que $\vec{A}$ est constant (on utilisera $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\vec{u}_\theta$ et $\dot\theta = C/r^2$).

**Q-2)** Exprimer $\vec{A}$ dans la base polaire. En calculant $\vec{A}\cdot\overrightarrow{OM}$, retrouver l'équation $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e = \left\|\vec{A}\right\|$ et $\theta$ mesuré à partir de $\vec{A}$.

**Q-3)** Montrer que $e^2 = 1 + \frac{2mC^2}{K^2}E_m$ et retrouver la classification des trajectoires.

### Correction

**Q-1)** $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{K}\vec{a}\wedge\vec{L} - \dot\theta\vec{u}_\theta$ ($\vec{L}$ constant). Or $\vec{a}\wedge\vec{L} = -\frac{K}{mr^2}\vec{u}_r\wedge mC\vec{u}_z = \frac{KC}{r^2}\vec{u}_\theta$, d'où $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{r^2}\vec{u}_\theta - \dot\theta\vec{u}_\theta = \vec{0}$.

**Q-2)** $\vec{v}\wedge\vec{L} = (\dot r\vec{u}_r + r\dot\theta\vec{u}_\theta)\wedge mC\vec{u}_z = mC\left(-\dot r\vec{u}_\theta + \frac{C}{r}\vec{u}_r\right)$, donc $\vec{A} = \left(\frac{mC^2}{Kr} - 1\right)\vec{u}_r - \frac{mC\dot r}{K}\vec{u}_\theta$. Alors $\vec{A}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{mC^2}{K} - r = er\cos\theta$, soit $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $p = \frac{mC^2}{K}$ : $\vec{A}$ pointe vers le péricentre.

**Q-3)** $e^2 = \left(\frac{mC^2}{Kr} - 1\right)^2 + \frac{m^2C^2\dot r^2}{K^2} = 1 + \frac{2mC^2}{K^2}\left[\frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r}\right] = 1 + \frac{2mC^2}{K^2}E_m$. Donc $e < 1 \iff E_m < 0$ (ellipse), $e = 1 \iff E_m = 0$ (parabole), $e > 1 \iff E_m > 0$ (hyperbole). La conservation de $\vec{A}$, propre au champ newtonien, explique que les orbites liées soient fermées.

# X Classiques des concours

## EXERCICE 15 Transfert de Hohmann

★★★★☆

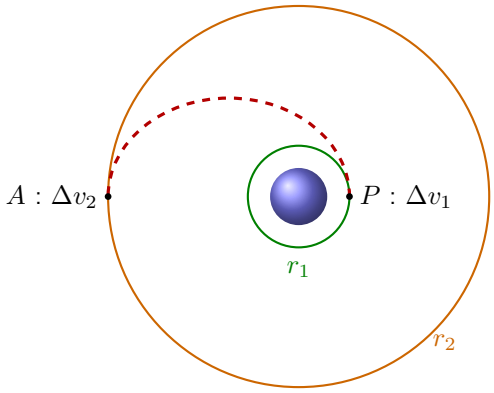
Un satellite est en orbite basse circulaire de rayon $r_1 = R_T + 300\,\text{km} = 6670\,\text{km}$. On veut l'amener sur l'orbite géostationnaire ($r_2 = 42\,200\,\text{km}$) par une demi-ellipse de transfert, tangente aux deux orbites, de périgée $r_1$ et d'apogée $r_2$. Les poussées des moteurs sont supposées instantanées et tangentielles. $\mathcal{G}M_T = 3{,}99 \times 10^{14}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}$.

**Q-1)** Calculer les vitesses $v_{c1}$ et $v_{c2}$ sur les deux orbites circulaires.

**Q-2)** Exprimer, par conservation de l'énergie et de la constante des aires, les vitesses $v_P$ et $v_A$ au périgée et à l'apogée de l'ellipse de transfert.

**Q-3)** En déduire les deux variations de vitesse $\Delta v_1$ et $\Delta v_2$ et la durée du transfert.

**Q-4)** Pourquoi le transfert se fait-il de façon tangentielle ?




**Correction**

**Q-1)** $v_{c1} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_1}} = 7{,}73\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ ; $v_{c2} = 3{,}07\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

**Q-2)** $a = \frac{r_1+r_2}{2}$. Énergie : $\frac{1}{2}v_P^2 - \frac{\mathcal{G}M_T}{r_1} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r_1+r_2}$, d'où $v_P = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T r_2}{r_1(r_1+r_2)}} = 10{,}16\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Aires : $v_A = v_P\frac{r_1}{r_2} = 1{,}61\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

**Q-3)** $\Delta v_1 = v_P - v_{c1} = 2{,}43\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\Delta v_2 = v_{c2} - v_A = 1{,}46\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Durée : demi-période de l'ellipse, $\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_T}}$ avec $a = 24\,435\,\text{km}$ : $1{,}90\times10^4\,\text{s} \approx 5{,}3\,\text{h}$.

**Q-4)** Une poussée tangentielle modifie la norme de la vitesse sans gaspiller de carburant à en changer la direction ; c'est le transfert le plus économique entre deux orbites circulaires coplanaires (pour $r_2/r_1 < 11{,}9$).

## EXERCICE 16 Freinage atmosphérique d'un satellite

★★★★☆

Un satellite de masse $m$ décrit une orbite circulaire basse de rayon $r$. Dans la haute atmosphère, il subit une force de frottement $\vec{f} = -\alpha m v\,\vec{v}$ très faible, de sorte que l'orbite reste quasi circulaire à chaque instant.

**Q-1)** Exprimer $v$, $E_c$, $E_p$ et $E_m$ en fonction de $r$.

**Q-2)** Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et en déduire $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

**Q-3)** Montrer que la vitesse du satellite **augmente** sous l'effet du frottement. Lever ce paradoxe.

**Q-4)** AN : $\alpha = 1 \times 10^{-14}\,\mathrm{m^{-1}}$, altitude $400\,\mathrm{km}$, $\mathcal{G}M_T = 3{,}99 \times 10^{14}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$. Estimer la perte d'altitude par jour.

**Correction**

**Q-1)** $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}$, $E_c = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2r}$, $E_p = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r}$, $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r}$.

**Q-2)** $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\cdot\vec{v} = -\alpha m v^3$, avec $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2r^2}\dot{r}$. D'où $\dot{r} = -\frac{2\alpha r^2 v^3}{\mathcal{G}M_T} = -2\alpha\sqrt{\mathcal{G}M_T r}$.

**Q-3)** $\dot{r} < 0$ et $v = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r}$ croît quand $r$ diminue. $E_c = -E_m$ augmente : quand $E_m$ diminue de $\delta$, $E_p$ diminue de $2\delta$ et $E_c$ augmente de $\delta$. Le travail du poids, moteur lors de la descente, compense deux fois la perte due au frottement.

**Q-4)** $r = 6{,}77 \times 10^6\,\mathrm{m}$ : $\dot{r} = -2 \times 10^{-14}\sqrt{3{,}99 \times 10^{14} \times 6{,}77 \times 10^6} = -1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, soit environ $90\,\mathrm{m}$ par jour : l'ISS doit être régulièrement remontée par des moteurs.

## EXERCICE 17 Détection d'exoplanètes par les vitesses radiales

Une étoile E (masse $M$) et une planète P (masse $m \ll M$) forment un système isolé, étudié dans le référentiel barycentrique (partie VII). Les orbites sont supposées circulaires, de période $T$.

**Q-1)** Montrer que les vitesses de l'étoile et de la planète vérifient $\frac{v_E}{v_P} = \frac{m}{M}$.

**Q-2)** Exprimer le rayon $a$ de l'orbite relative (avec $M + m \approx M$), puis la vitesse $v_P$.

**Q-3)** Un observateur situé dans le plan de l'orbite mesure par effet Doppler la vitesse radiale de l'étoile, sinusoïdale d'amplitude $K_E$. Exprimer $m$ en fonction de $K_E$, $M$, $T$ et $\mathcal{G}$.

**Q-4)** 51 Pegasi b (1995) : $M = 2{,}1 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $T = 4{,}23\,\mathrm{jours}$, $K_E = 56\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Calculer $a$ (en ua) et $m$ (en masses de Jupiter, $M_J = 1{,}9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$). Commenter.

**Q-5)** Quelle amplitude la Terre provoque-t-elle sur le Soleil ? Et Jupiter ($v_J = 13{,}1\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$) ? Quelles planètes sont les plus faciles à détecter ?

**Correction**

**Q-1)** $\overrightarrow{GE} = -\frac{m}{M+m}\vec{r}$ et $\overrightarrow{GP} = \frac{M}{M+m}\vec{r}$ : les deux trajectoires sont homothétiques de rapport $-\frac{m}{M}$ ; en dérivant, $\frac{v_E}{v_P} = \frac{m}{M}$.

**Q-2)** $a^3 = \frac{\mathcal{G}MT^2}{4\pi^2}$ et $v_P \approx \frac{2\pi a}{T}$ (vitesse relative, quasi égale à celle de P).

**Q-3)** $K_E = v_E = \frac{m}{M}v_P$, d'où $m = \frac{MK_E T}{2\pi a} = MK_E\left(\frac{T}{2\pi\mathcal{G}M}\right)^{1/3}$.

**Q-4)** $T = 3{,}65 \times 10^5\,\mathrm{s}$ : $a = 7{,}8 \times 10^9\,\mathrm{m} = 0{,}052\,\mathrm{ua}$ ; $v_P = 134\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ ; $m = \frac{2{,}1\times10^{30}\times56}{1{,}34\times10^5} = 8{,}8 \times 10^{26}\,\mathrm{kg} \approx 0{,}46\,M_J$. Une planète géante sept fois plus proche de son étoile que Mercure du Soleil : un « Jupiter chaud », contraire aux modèles de l'époque.

**Q-5)** Terre : $K = 29{,}8\,\mathrm{km \cdot s^{-1}} \times \frac{6{,}0\times10^{24}}{2{,}0\times10^{30}} = 0{,}09\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ; Jupiter : $13{,}1\,\mathrm{km \cdot s^{-1}} \times \frac{1{,}9\times10^{27}}{2{,}0\times10^{30}} = 12\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Les planètes massives et proches de leur étoile sont les plus faciles à détecter.