LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

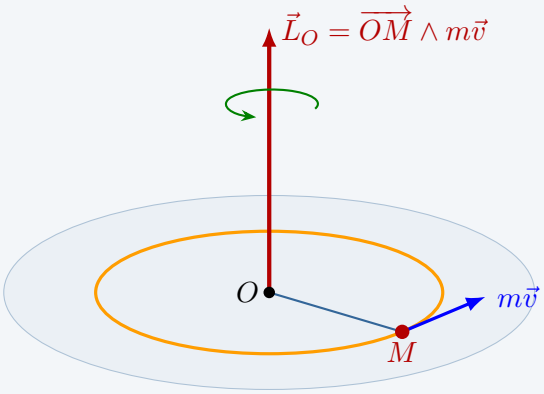
FICHE RÉSUMÉ

M6

MÉCANIQUE

Théorème du moment cinétique

Moment cinétique d'un point — Moment d'une force, bras de levier — Théorème du moment cinétique — Conservation — Pendule simple



> *Donnez-moi un point d'appui, et je soulèverai la Terre.*
>
> — Archimède, rapporté par Pappus d'Alexandrie, *Collection mathématique*, livre VIII

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Conservation du moment cinétique »

M6 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Le **moment cinétique** $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ mesure la « quantité de rotation » de M autour de O, et le **moment d'une force** $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ sa capacité à faire tourner. Dans un référentiel galiléen, pour un point (ou un axe) **fixe**, la dérivée du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces : c'est le TMC, conséquence du PFD mais adapté aux rotations. Il élimine les forces qui passent par le point ou l'axe choisi, et la nullité des moments donne une **intégrale première** (conservation de $\vec{L}_O$, mouvement plan, loi des aires).

I Moment cinétique d'un point matériel

Définition — Moment cinétique en un point et par rapport à un axe R

Pour un point M de masse m et de vitesse $\vec{v} = \vec{v}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} \qquad L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta \quad (A \in \Delta)$$

- Unité : $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}} = \mathrm{J \cdot s}$. $\vec{L}_O$ est perpendiculaire au plan $(O, M, \vec{v})$; son sens donne le sens de rotation (main droite) ; $\left\|\vec{L}_O\right\| = m\,v\,b$ avec b la distance de O à la droite portant $\vec{v}$.
- L_Δ est un **scalaire** indépendant du point A choisi sur l'axe orienté $(\Delta, \vec{u}_\Delta)$.

Formule de transport et coordonnées cylindriques R D

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{v} \qquad L_z = m\,r^2\dot{\theta}$$

En cylindriques, $\vec{L}_O = m\left(-zr\dot{\theta}\,\vec{u}_r + (z\dot{r} - r\dot{z})\,\vec{u}_\theta + r^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z\right)$: seule la vitesse orthoradiale $r\dot{\theta}$ contribue à L_z. Mouvement circulaire de rayon R : $L_z = mR^2\dot{\theta} = \pm mRv$.

II Moment d'une force

Définition — Moment d'une force R

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} \qquad \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta \quad (A \in \Delta)$$

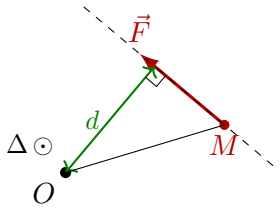
Unité : $\mathrm{N \cdot m}$. Transport : $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$; additivité : $\vec{\mathcal{M}}_A\left(\sum \vec{F}_i\right) = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i)$ pour des forces appliquées au même point.

☞ Méthode — Bras de levier M

Pour une force dans un plan perpendiculaire à Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F\, d$$

d : distance de l'axe à la **droite d'action** de $\vec{F}$. Signe $+$ si $\vec{F}$ tend à faire tourner dans le sens positif défini par $\vec{u}_\Delta$. Une composante de $\vec{F}$ parallèle à l'axe ne contribue pas.



Ici $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = +F\, d$.

Moments nuls ; couples R

- $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$ si et seulement si la droite d'action de $\vec{F}$ **rencontre** l'axe ou lui est **parallèle** : réaction d'une liaison pivot parfaite, tension d'un fil attaché sur l'axe, poids pour un axe vertical.
- **Couple** : forces de résultante nulle mais de moment non nul, indépendant du point de calcul (deux forces opposées distantes de d : $\Gamma = \pm Fd$).
- **Couple de torsion** d'un fil tordu de θ : $\Gamma = -C\theta$, $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$ (C en $\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$), analogue du ressort $-kx$.

III Théorème du moment cinétique

TMC en un point fixe et par rapport à un axe fixe R D

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ **galiléen**, pour O **fixe** dans $\mathcal{R}$ et un axe Δ **fixe** :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \qquad \frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

Démonstration : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}\right) = \underbrace{\vec{v}\wedge m\vec{v}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{a} = \overrightarrow{OM}\wedge\sum\vec{F}_i$ (PFD) ; on projette ensuite sur $\vec{u}_\Delta$ constant.

Remarque

En un point B **mobile** : $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_B}{\mathrm{d}t} = \sum\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{F}_i) - \vec{v}(B)\wedge m\vec{v}(M)$. Le terme supplémentaire disparaît si B est fixe (ou si $\vec{v}(B) \parallel \vec{v}(M)$).

Conservation et conséquences R D

Si $\sum\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$ à chaque instant (point isolé, **force centrale** de centre O, fil attaché en O…), alors $\vec{L}_O = \vec{L}_0$ est constant :

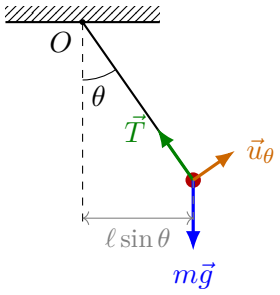
- si $\vec{L}_0 \neq \vec{0}$, le mouvement est **plan**, dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_0$ (car $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{L}_0 = 0$) ;
- en polaires dans ce plan, $C = r^2\dot{\theta}$ est constant : **loi des aires** $\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2}$ (chapitre M7).

De même, si $\sum \mathcal{M}_\Delta = 0$, L_Δ est constant.

IV Application : le pendule simple

Point M au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ, fixé en O ; $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.

- **PFD** sur $\vec{u}_\theta$: $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$.
- **TMC** sur $(O, \vec{u}_z)$: $L_z = m\ell^2\dot{\theta}$, $\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0$ (passe par O), $\mathcal{M}_z(m\vec{g}) = -mg\ell\sin\theta$ (bras de levier $\ell\sin\theta$).
- **Énergie** : $\vec{T} \perp \vec{v}$ ne travaille pas ; $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta =$ cte, puis on dérive.



Équation du pendule simple R

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad T \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \text{ (Borda)}$$

Petites oscillations : oscillateur harmonique, $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ indépendante de l'amplitude (**isochronisme**). Grandes amplitudes : T **croît** avec θ_0 et diverge pour $\theta_0 \to \pi$ (**non-isochronisme**). Tension (PFD sur $\vec{u}_r$) : $\left\|\vec{T}\right\| = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$, avec $\dot{\theta}^2$ tiré de l'énergie ; le fil reste tendu tant que $\left\|\vec{T}\right\| > 0$.

V Solide en rotation autour d'un axe fixe

Moment d'inertie et TMC scalaire R

Tous les points tournent à la même vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ autour de Δ :

$$L_\Delta = J_\Delta\,\omega \quad \text{avec} \quad J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 \qquad J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)$$

Les forces intérieures ont des moments qui s'annulent deux à deux ; une liaison pivot parfaite a un moment nul par rapport à son axe. J_Δ (en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$) est d'autant plus grand que la masse est loin de l'axe.

★ À retenir

	Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
Paramètre, vitesse	x, $v = \dot{x}$	θ, $\omega = \dot{\theta}$
Inertie	masse m	moment d'inertie J_Δ
Grandeur cinétique	$p = mv$	$L_\Delta = J_\Delta \omega$
Cause	force F	moment $\mathcal{M}_\Delta$
Loi d'évolution	$m\dot{v} = \sum F$	$J_\Delta \dot{\omega} = \sum \mathcal{M}_\Delta$
Énergie cinétique, puissance	$\frac{1}{2}mv^2$, $\mathcal{P} = Fv$	$\frac{1}{2}J_\Delta \omega^2$, $\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta\, \omega$
Rappel élastique	$-kx$, $E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$-C\theta$, $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$

Moments d'inertie (solides homogènes) : cerceau mR^2 ; disque, cylindre plein $\frac{1}{2}mR^2$; boule $\frac{2}{5}mR^2$; tige par son milieu $\frac{1}{12}mL^2$, par une extrémité $\frac{1}{3}mL^2$.

Pendule pesant R D

Solide de masse m, centre de masse G à la distance d de l'axe horizontal (pivot parfait) : $\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = -mgd\sin\theta$, d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\sin\theta = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$$

Le pendule simple est le cas $J_\Delta = md^2$. Avec $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta$: mouvement pendulaire si $E_m < mgd$, révolutif si $E_m > mgd$.

Remarque

Conservation pour un système déformable. Si $\sum \mathcal{M}_\Delta = 0$, $L_\Delta = J_\Delta\omega$ se conserve même si J_Δ varie : la patineuse qui ramène ses bras tourne plus vite, le plongeur en boule accélère ses saltos, l'étoile qui s'effondre en pulsar tourne en quelques millisecondes. Son énergie cinétique, elle, varie (travail des forces intérieures). Théorème de Huygens (complément) : $J_\Delta = J_G + md^2$, où J_G est relatif à l'axe parallèle passant par G.

Remarque

Système de deux points. Avec $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$ portée par (M_1M_2), les forces intérieures disparaissent du théorème de la résultante cinétique ($M\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$) et du TMC ($\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$), mais pas du bilan d'énergie. Kœnig : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OG}\wedge M\vec{v}_G + \vec{L}^\star$, $E_c = \frac{1}{2}Mv_G^2 + E_c^\star$, avec $\vec{L}^\star = \vec{r}\wedge\mu\dot{\vec{r}}$ et $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

Ordres de grandeur

Pendule de $1\,\mathrm{m}$: $T_0 \approx 2{,}0\,\mathrm{s}$; amplitude de $10°$: $T/T_0 - 1 \approx 2\times10^{-3}$, écart inférieur à $1\,\%$ jusqu'à $\theta_0 \approx 23°$. Ouvrir une porte : $10\,\mathrm{N}$ à $0{,}8\,\mathrm{m}$ des gonds, soit $8\,\mathrm{N\cdot m}$; serrage d'un écrou de roue : $\approx 110\,\mathrm{N\cdot m}$; couple d'un moteur de voiture : 100 à $250\,\mathrm{N\cdot m}$.

VI Méthodes et pièges

☞ Méthode — PFD, TMC ou énergie : que choisir ? M

- **TMC** par rapport à un point ou un axe **fixe** par lequel passent les forces inconnues (réaction d'un pivot, tension d'un fil fixé en O) : il les élimine ; naturel pour toute rotation.
- **Énergie** : un seul degré de liberté, forces conservatives ou qui ne travaillent pas : équation du mouvement en une ligne.
- **PFD** : indispensable pour calculer les réactions (tension, réaction normale) une fois le mouvement connu.
- Démarche TMC : choisir et **orienter** l'axe ; écrire L_Δ ; bilan complet des forces et de leurs moments (bras de levier et signe) ; appliquer $\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_\Delta$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- L'ordre du produit vectoriel compte : $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, et non $m\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM}$.
- Le TMC sous sa forme simple exige un point (ou un axe) **fixe** dans un référentiel **galiléen**.
- Le bras de levier est la distance à la **droite d'action**, pas la distance OM au point d'application.
- On fixe l'orientation de $\vec{u}_\Delta$ **avant** de calculer les signes des moments.
- Un mouvement rectiligne ne passant pas par O a un moment cinétique non nul ; L conservé n'implique pas E_m conservée.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais calculer $\vec{L}_O$ et $L_z = mr^2\dot{\theta}$, et utiliser la formule de transport.
- ☐ Je sais calculer le moment d'une force par le bras de levier, avec le bon signe.
- ☐ Je sais énoncer et démontrer le TMC en un point fixe, puis le projeter sur un axe fixe.
- ☐ Je reconnais une situation de conservation et j'en déduis mouvement plan et loi des aires.
- ☐ J'établis l'équation du pendule simple par le PFD, le TMC et l'énergie, et je calcule la tension.
- ☐ J'applique $J_\Delta\dot{\omega} = \sum \mathcal{M}_\Delta$ à un solide (pendule pesant, couple de torsion).
- ☐ Je choisis entre PFD, TMC et énergie selon les inconnues du problème.