LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

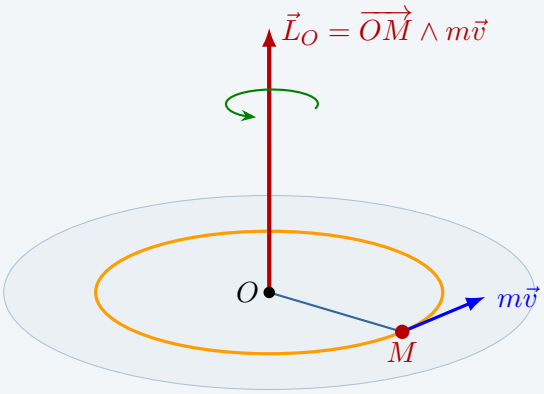
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M6

MÉCANIQUE

Théorème du moment cinétique

Moment cinétique d'un point — Moment d'une force, bras de levier — Théorème du moment cinétique — Conservation — Pendule simple



« *Donnez-moi un point d'appui, et je soulèverai la Terre.*

— Archimède, rapporté par Pappus d'Alexandrie, *Collection mathématique*, livre VIII

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Conservation du moment cinétique »

M6 — Moment cinétique

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Calculer le moment cinétique d'un point par rapport à un point ou à un axe orienté, et le moment d'une force (bras de levier).
- Établir et appliquer le théorème du moment cinétique en un point fixe et par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen.
- Reconnaître une situation de conservation du moment cinétique et l'exploiter comme intégrale première.
- Établir l'équation du pendule simple par trois méthodes ; mettre en évidence le non-isochronisme (formule de Borda).
- Appliquer le TMC scalaire à un solide en rotation autour d'un axe fixe : moment d'inertie, pendule pesant, énergie et puissance.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Conservation du moment cinétique » permet de rapprocher ou d'éloigner un mobile de l'axe de rotation et d'observer sa vitesse angulaire s'adapter pour que $L_z = mr^2\dot{\theta}$ reste constant.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Moment cinétique d'un point matériel . . . 4
I.1 Moment cinétique par rapport à un point . . . 4
I.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté . . . 5
II Moment d'une force . . . 6
II.1 Moment par rapport à un point et à un axe . . . 6
II.2 Bras de levier . . . 6
II.3 Couple ; couple de torsion . . . 7
III Théorème du moment cinétique . . . 8
III.1 TMC en un point fixe . . . 8
III.2 TMC par rapport à un axe fixe . . . 8
III.3 Conservation du moment cinétique . . . 9
III.4 Choisir la bonne méthode . . . 9
IV Application : le pendule simple . . . 10
IV.1 Équation du mouvement par trois méthodes . . . 10
IV.2 Non-isochronisme des grandes oscillations . . . 11
V Extension au solide en rotation autour d'un axe fixe . . . 12
V.1 Translation et rotation d'un solide . . . 12
V.2 Moment cinétique et moment d'inertie . . . 12
V.3 Théorème du moment cinétique pour un solide . . . 13
V.4 Énergie et puissance en rotation . . . 13
V.5 Pendule pesant . . . 14
VI Système de deux points matériels . . . 15
VI.1 Barycentre et référentiel barycentrique . . . 15
VI.2 Lois de la dynamique pour le système . . . 15
VII Synthèse . . . 16

VIII Exercices d'approfondissement 17
IX Classiques des concours 18

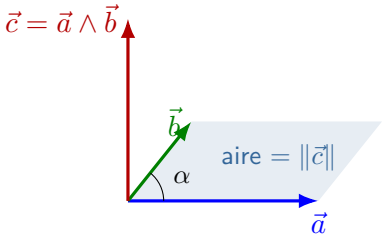
I Moment cinétique d'un point matériel

Le principe fondamental de la dynamique (chapitre M2) relie la variation de la **quantité de mouvement** $\vec{p} = m\vec{v}$ aux forces. Pour décrire efficacement les **rotations**, on introduit une grandeur qui mesure la quantité de mouvement « en rotation » autour d'un point : le moment cinétique. On travaille dans tout le chapitre dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Rappels sur le produit vectoriel

Pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ faisant l'angle α, le produit vectoriel $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ est :

- perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$;
- tel que le trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ soit direct (règle de la main droite, ou du tire-bouchon) ;
- de norme $\|\vec{c}\| = ab\,|\sin\alpha|$, aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



Il est **antisymétrique** ($\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$), bilinéaire, et nul si les vecteurs sont colinéaires. Dans une base orthonormée directe : $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$, $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$, $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$ (permutation circulaire), et de même $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z$.

I.1 Moment cinétique par rapport à un point

Définition — Moment cinétique en un point R

Le moment cinétique en un point A d'un point matériel M, de masse m et de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$, est

$$\vec{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$$

Il s'exprime en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$ (ou $\mathrm{J \cdot s}$). Il dépend du référentiel et du point A choisi ; on le note aussi $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})$. Lorsque la **direction** de $\vec{L}_O$ reste fixe, le mouvement est plan.

Interprétation. $\vec{L}_O$ est perpendiculaire au plan instantané contenant O, M et $\vec{v}$. Son sens indique le **sens de rotation** de M autour de O : en enroulant les doigts de la main droite dans le sens du mouvement, le pouce indique $\vec{L}_O$. Sa norme vaut

$$\left\|\vec{L}_O\right\| = m\,v\,OM\,|\sin\alpha| = m\,v\,b,$$

où $b = OM|\sin\alpha|$ est la distance de O à la droite portant $\vec{v}$ (le « bras de levier » de la quantité de mouvement, appelé **paramètre d'impact** en physique des collisions).

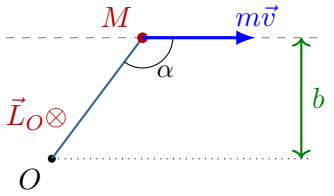


Fig. 1 : M tourne dans le sens horaire autour de O : $\vec{L}_O$ entre dans la page.

Changement de point D

Pour deux points A et B quelconques :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{v}$$

Démonstration : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ et la bilinéarité du produit vectoriel. Le moment cinétique ne dépend pas du point choisi si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

I.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté

Définition — Moment cinétique scalaire par rapport à un axe R

Soit Δ un axe passant par A et orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$. Le moment cinétique de M par rapport à Δ est le **scalaire**

$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta$$

Il ne dépend pas du point A choisi sur l'axe.

Démonstration D *:* pour $A' \in \Delta$, $\vec{L}_{A'} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta + (\overrightarrow{A'A} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta$, et le produit mixte est nul car $\overrightarrow{A'A}$ est colinéaire à $\vec{u}_\Delta$.

Expression en coordonnées cylindriques R D

Avec $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$:

$$\vec{L}_O = m\,(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge \left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z\right) = m\left(-zr\dot{\theta}\,\vec{u}_r + (z\dot{r} - r\dot{z})\,\vec{u}_\theta + r^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z\right),$$

d'où le moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) :

$$L_z = m\,r^2\dot{\theta}$$

Seule la composante orthoradiale de la vitesse $(r\dot{\theta})$ contribue à L_z : le mouvement radial et le mouvement parallèle à l'axe ne « font pas tourner » autour de l'axe. Pour un mouvement plan dans le plan $z = 0$: $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$.

Remarque

Le signe de L_z est celui de $\dot{\theta}$: $L_z > 0$ si M tourne dans le sens direct autour de $\vec{u}_z$. Pour un mouvement circulaire de rayon R à la vitesse angulaire ω : $L_z = mR^2\omega = mRv$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- L'ordre du produit vectoriel compte : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, et non $m\vec{v} \wedge \overrightarrow{OM}$ (qui donne l'opposé).
- $\vec{L}_O$ n'est pas un vecteur « attaché » à M : on le représente en général en O.
- Un point en mouvement **rectiligne** peut avoir un moment cinétique non nul (si la droite ne passe pas par O).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 **Moments cinétiques astronomiques** ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer le moment cinétique orbital de la Terre par rapport au centre du Soleil ($M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, orbite supposée circulaire de rayon $1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, période $3{,}16 \times 10^{7}\,\mathrm{s}$).

Q-2) Même question pour un électron ($m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) tournant autour du proton sur un cercle de rayon $a_0 = 53\,\mathrm{pm}$ à $v = 2{,}2 \times 10^{6}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Comparer à la constante de Planck réduite $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.

EXERCICE 2 **Mouvement rectiligne uniforme** ✦✦✧✧✧

Un point M de masse m se déplace à la vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ sur la droite d'équation $y = b$ du plan (Oxy).

Q-1) Calculer $\vec{L}_O$ à l'aide des coordonnées cartésiennes. Est-il constant ?

Q-2) Retrouver ce résultat en polaires, et en déduire comment varie $\dot{\theta}$ quand M s'éloigne.

II Moment d'une force

II.1 Moment par rapport à un point et à un axe

Définition — Moment d'une force R

Le moment en A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M est $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$ (en $\mathrm{N \cdot m}$). Son moment par rapport à l'axe Δ passant par A et orienté par $\vec{u}_\Delta$ est le scalaire

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_\Delta$$

indépendant du point A choisi sur l'axe (même démonstration que pour L_Δ).

Le moment d'une force mesure sa capacité à faire **tourner** le système autour du point ou de l'axe : on ouvre une porte plus facilement en poussant loin des gonds et perpendiculairement à la porte.

II.2 Bras de levier

☞ Méthode — Bras de levier M

Pour une force contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F\,d$$

où d est le **bras de levier**, distance entre l'axe et la droite d'action de la force. Le signe est $+$ si la force tend à faire tourner dans le sens positif défini par $\vec{u}_\Delta$ (règle de la main droite), $-$ sinon.

Si la force a aussi une composante parallèle à l'axe, cette composante a un moment nul par rapport à l'axe : seule la projection de $\vec{F}$ sur le plan perpendiculaire à Δ compte.

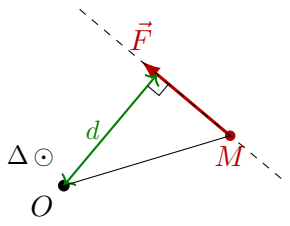


Fig. 2 : Ici $\vec{F}$ tend à faire tourner dans le sens direct : $\mathcal{M}_z = +Fd$.

Forces de moment nul par rapport à un axe R

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$ si et seulement si la droite d'action de $\vec{F}$ **rencontre** l'axe ou lui est **parallèle** (les deux droites sont coplanaires).

Exemples : la réaction d'une liaison pivot parfaite (sans frottement) passe par l'axe ; la tension d'un fil attaché en O passe par O ; le poids est parallèle à un axe vertical.

II.3 Couple ; couple de torsion

Remarque

Deux forces opposées $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ appliquées en deux points distincts, de droites d'action parallèles distantes de d, forment un **couple** : leur résultante est nulle mais leur moment total vaut $\pm Fd$ et ne dépend pas du point de calcul. C'est l'action d'un tournevis, d'un volant, ou d'un moteur sur son arbre.
Démonstration D *:* pour $\vec{F}$ appliquée en M_1 et $-\vec{F}$ en M_2, $\overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AM_2} \wedge (-\vec{F}) = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F}$, qui ne dépend pas de A.

Couple de torsion. Un fil métallique (ou un ressort spiral) que l'on tord d'un angle θ autour de son axe exerce sur l'objet qui y est fixé un **couple de rappel** :

$$\mathcal{M}_\Delta = -C\,\theta \qquad E_{p,\mathrm{t}} = \frac{1}{2}C\theta^2$$

où C (en $\mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1}}$) est la **constante de torsion**. Pour un fil cylindrique de longueur ℓ et de diamètre d, $C \propto \frac{d^4}{\ell}$ (loi de Coulomb) : un fil fin et long est très peu raide, ce qui permet de mesurer des couples minuscules (balance de Cavendish, galvanomètres). C'est l'analogue en rotation de la force de rappel $-kx$ d'un ressort.

Ordres de grandeur

- Serrage d'un écrou de roue de voiture : environ $110\,\mathrm{N \cdot m}$, soit $440\,\mathrm{N}$ au bout d'une clé de $25\,\mathrm{cm}$.
- Couple maximal d'un moteur de voiture citadine : 100 à $250\,\mathrm{N \cdot m}$; d'une éolienne de $2\,\mathrm{MW}$: de l'ordre de $1\,\mathrm{MN \cdot m}$ sur l'arbre lent.
- Ouvrir une porte : $F \approx 10\,\mathrm{N}$ appliquée à $0{,}8\,\mathrm{m}$ des gonds, soit $8\,\mathrm{N \cdot m}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Clé et roue ✦✧✧✧✧

Q-1) Une force de $20\,\mathrm{N}$ est appliquée perpendiculairement à l'extrémité d'une clé de longueur $25\,\mathrm{cm}$. Calculer son moment par rapport à l'axe de l'écrou. Même question si la force fait un angle de $30°$ avec la clé.

Q-2) Une force $F = 20\,\mathrm{N}$ est appliquée sur la jante d'une roue de rayon $R = 0{,}30\,\mathrm{m}$, d'abord tangentiellement, puis en faisant l'angle $60°$ avec le rayon. Calculer le moment par rapport à l'axe.

EXERCICE 4 Moment du poids d'un pendule ✦✦✧✧✧

Un pendule simple ($m = 0{,}50\,\text{kg}$, $\ell = 1{,}0\,\text{m}$) est écarté de θ de la verticale descendante. L'axe (Oz) est horizontal, passe par le point d'attache O, et est orienté de sorte que θ croisse dans le sens direct.

Q-1) Calculer $\mathcal{M}_z(m\vec{g})$ par le produit vectoriel en base polaire, puis par le bras de levier. Application numérique pour $\theta = 30°$.

Q-2) Pourquoi le moment de la tension du fil est-il nul ?

EXERCICE 5 Balance romaine ✦✧✧✧✧

Une balance romaine est une barre rigide de masse négligeable, mobile autour d'un axe horizontal. Une charge de $5{,}0\,\text{kg}$ est suspendue à $4{,}0\,\text{cm}$ de l'axe. À quelle distance de l'axe, de l'autre côté, faut-il placer le contrepoids de $0{,}50\,\text{kg}$ pour équilibrer la barre ?

III Théorème du moment cinétique

III.1 TMC en un point fixe

Théorème du moment cinétique en un point fixe R D

Dans un référentiel **galiléen** $\mathcal{R}$, pour un point O **fixe** dans $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)$$

Démonstration. O étant fixe, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}$, donc

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{v}\wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM}\wedge m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM}\wedge\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i),$$

en utilisant le PFD $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ dans le référentiel galiléen. Le TMC n'est donc pas une loi nouvelle : c'est une **conséquence** du PFD, mais présentée sous une forme adaptée aux rotations.

III.2 TMC par rapport à un axe fixe

Théorème du moment cinétique scalaire R

Pour un axe Δ **fixe** dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ (de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ constant) :

$$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

Démonstration : on projette le TMC vectoriel en un point O de l'axe sur $\vec{u}_\Delta$, qui est constant donc sort de la dérivée.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Le TMC sous cette forme exige un point (ou un axe) **fixe** dans un référentiel **galiléen**. En un point mobile A, un terme supplémentaire $-\vec{v}(A)\wedge m\vec{v}$ apparaît.

- On n'oublie pas de force : chaque force, y compris les réactions, a un moment, même si beaucoup sont nuls par un choix judicieux du point.
- Les signes des moments scalaires se lisent avec l'orientation de l'axe : on fixe $\vec{u}_\Delta$ **avant** de calculer.

III.3 Conservation du moment cinétique

Conservation R

Si la somme des moments en O fixe des forces est nulle à chaque instant, $\vec{L}_O$ est un **vecteur constant** : c'est une intégrale première du mouvement. De même, si $\sum \mathcal{M}_\Delta = 0$, L_Δ est constant.

Situations typiques :

- point **isolé** ou pseudo-isolé ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) : $\vec{L}_O$ constant pour tout O fixe ;
- **force centrale** de centre O, c'est-à-dire constamment dirigée vers O (ou à l'opposé) : $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. C'est le cas de la gravitation exercée par un astre fixe, de la force coulombienne exercée par une charge fixe, de la tension d'un fil passant par un point fixe ;
- forces toutes parallèles à Δ ou rencontrant Δ : L_Δ constant.

Conséquences de la conservation de $\vec{L}_O$ R D

Si $\vec{L}_O = \vec{L}_0 \neq \vec{0}$ est constant :

- le mouvement est **plan** : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) = 0$, donc M reste dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_0$;
- dans ce plan, en polaires de centre O, $r^2\dot{\theta} = C$ est constant : c'est la **loi des aires**, étudiée en détail au chapitre M7 : l'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant $\mathrm{d}t$ vaut $\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$, d'où une vitesse aréolaire $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{2}$ constante.

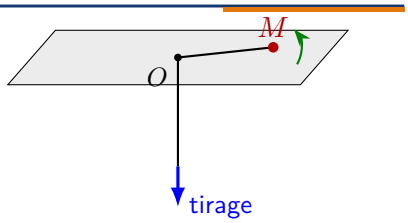
III.4 Choisir la bonne méthode

☞ **Méthode — PFD, TMC ou énergie : que choisir** M

- **TMC** par rapport à un point ou un axe **fixe** par lequel passent les forces inconnues (réaction d'un axe, tension d'un fil fixé en O) : il les élimine, et il est naturel pour les mouvements de rotation.
- **Énergie** (chapitre M4) : système à un seul degré de liberté soumis à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas : équation du mouvement en une ligne, sans les réactions.
- **PFD** : indispensable pour calculer les réactions (tension, réaction normale) une fois le mouvement connu.
- Les intégrales premières se combinent : conservation de L_z **et** de E_m donnent souvent tout le mouvement radial (méthode de l'énergie potentielle effective, chapitre M7).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Masse sur une table, fil tiré à travers un trou ✦✦✧✧✧



Un point M de masse m glisse sans frottement sur une table horizontale. Il est attaché à un fil qui passe par un petit trou O de la table ; un opérateur tire le fil vers le bas, de sorte que $r = OM$ diminue. Initialement $r = r_0$ et M tourne autour de O à la vitesse angulaire ω_0.

Q-1) Montrer que $\vec{L}_O$ se conserve. En déduire $\dot{\theta}$ en fonction de r.

Q-2) Quelle est la vitesse angulaire pour $r = r_0/2$? Comparer les énergies cinétiques (on suppose $\dot{r}$ négligeable aux instants considérés). Interpréter.

EXERCICE 7 Pendule conique par le TMC ✦✦✦✧✧

Un point M de masse m, suspendu en O par un fil de longueur ℓ, décrit à vitesse angulaire constante ω un cercle horizontal, le fil faisant l'angle constant α avec la verticale. On utilise les coordonnées cylindriques d'axe $(O, \vec{u}_z)$, $\vec{u}_z$ vertical **descendant**.

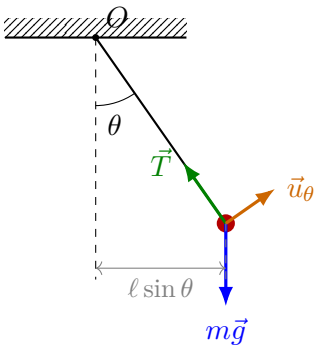
Q-1) Exprimer $\vec{L}_O$. Est-il constant ? Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$.

Q-2) Appliquer le TMC en O et en déduire la relation entre ω et α. Montrer qu'un tel mouvement exige $\omega > \sqrt{g/\ell}$.

Q-3) Montrer que L_z est constant et justifier ce résultat par le TMC scalaire.

IV Application : le pendule simple

IV.1 Équation du mouvement par trois méthodes



Un point M de masse m est suspendu à un fil inextensible, sans masse, de longueur ℓ, attaché en O fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On le repère par l'angle θ avec la verticale descendante et on suppose le fil tendu : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.

- **PFD projeté sur** $\vec{u}_\theta$: $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ (la tension, selon $-\vec{u}_r$, disparaît).
- **TMC en** O **sur** $(O, \vec{u}_z)$: $L_z = m\ell^2\dot{\theta}$; $\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0$ et $\mathcal{M}_z(m\vec{g}) = -mg\ell\sin\theta$. D'où $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$.
- **Énergie** : la tension ne travaille pas ($\vec{T} \perp \vec{v}$) ; $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$ est constante ; en dérivant et en simplifiant par $\dot{\theta} \neq 0$: même équation.

Équation du pendule simple R

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Pour les petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta$), on retrouve l'oscillateur harmonique (chapitre M5) de période $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, indépendante de l'amplitude : c'est l'**isochronisme des petites oscillations**.

Remarque

Pour un point matériel, le TMC n'apporte rien de plus que la projection du PFD sur $\vec{u}_\theta$; il devient irremplaçable pour les solides (partie V). Le TMC et l'énergie évitent d'introduire la tension inconnue T. Pour la calculer, on utilise ensuite le PFD radial : $-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$, soit $T = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$, puis $\dot{\theta}^2$ issu de l'énergie. Le modèle suppose $T > 0$ (fil tendu), condition à vérifier pour les grandes amplitudes.

IV.2 Non-isochronisme des grandes oscillations

Pour une amplitude θ_0 quelconque, l'intégrale première de l'énergie donne $\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$. Le pendule met un quart de période pour aller de $\theta = 0$ à θ_0 :

$$T = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \quad \text{(formule de Borda)}$$

La période **croît** avec l'amplitude et diverge quand $\theta_0 \to \pi$ (le pendule met un temps infini à quitter la position d'équilibre instable). Le développement est établi dans le dernier exercice du chapitre.

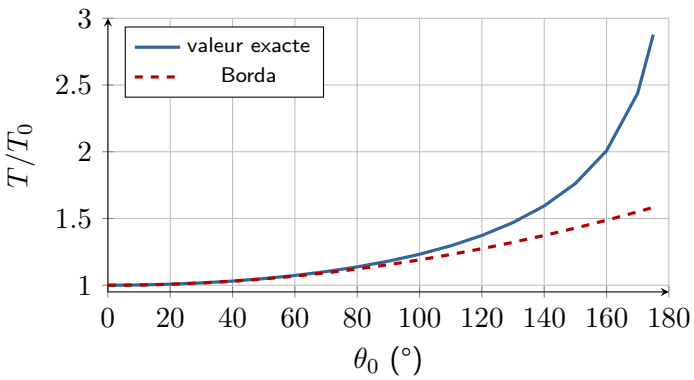


Fig. 3 : Période du pendule simple en fonction de l'amplitude. L'écart à T_0 est inférieur à $1\,\%$ jusqu'à $\theta_0 \approx 23°$.

Ordres de grandeur

- Pendule de $\ell = 1\,\mathrm{m}$: $T_0 = 2{,}0\,\mathrm{s}$ (« pendule battant la seconde » : une demi-période d'une seconde).
- Amplitude de $10°$: $T/T_0 - 1 \approx 2 \times 10^{-3}$, soit environ $3\,\mathrm{min}$ de dérive par jour pour une horloge : d'où les échappements à faible amplitude.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Tension du fil d'un pendule

★★☆☆☆

Le pendule précédent est lâché sans vitesse depuis l'angle θ_0.

Q-1) Exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ, puis la tension $T(\theta)$.

Q-2) Où la tension est-elle maximale ? Calculer $T_{\max}$ pour $m = 0{,}20\,\mathrm{kg}$ et $\theta_0 = 60°$.

Q-3) Pour quelles valeurs de θ_0 le fil reste-t-il tendu pendant tout le mouvement ?

EXERCICE 9 **Point sur un guide circulaire : réaction** ✦✦✧✧✧

Un point M de masse m glisse sans frottement à l'intérieur d'un guide circulaire vertical de centre O et de rayon R. Il passe au point bas avec la vitesse v_0.

Q-1) Justifier que l'équation du mouvement est la même que celle du pendule simple, en utilisant le TMC en O.

Q-2) Exprimer la réaction N du guide en fonction de θ. À quelle condition sur v_0 le point fait-il le tour complet sans quitter le guide ?

V Extension au solide en rotation autour d'un axe fixe

V.1 Translation et rotation d'un solide

Un **solide** est un système matériel indéformable. Deux mouvements simples sont au programme :

- la **translation** : le solide garde une orientation fixe ; tous ses points ont à chaque instant la même vitesse, et l'étude du centre de masse G suffit (PFD appliqué à G avec la masse totale). Une cabine de grande roue reste horizontale : elle est en **translation circulaire**, ce n'est pas une rotation ;
- la **rotation autour d'un axe fixe** Δ : chaque point décrit un cercle centré sur l'axe, avec la même vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. Un seul paramètre, l'angle θ, décrit le mouvement.

Pour un rotor dont le centre de masse est sur l'axe (turbine, roue équilibrée), le PFD appliqué à G donne seulement $\vec{0} = \sum \vec{F}$: il ne dit rien de la rotation. C'est le théorème du moment cinétique qui la gouverne.

V.2 Moment cinétique et moment d'inertie

Chaque point M_i du solide (masse m_i, à la distance r_i de l'axe) a une vitesse orthoradiale $r_i\omega$ et un moment cinétique $m_i r_i^2 \omega$ par rapport à l'axe. En sommant :

Moment d'inertie R

$$L_\Delta = J_\Delta\,\omega \qquad J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$$

J_Δ (en $\mathrm{kg \cdot m^2}$) mesure la répartition de la masse **autour de l'axe** : il dépend du solide **et** de l'axe choisi.

Solide homogène (axe)	J_Δ
Cerceau (axe de symétrie)	mR^2
Disque, cylindre plein (axe)	$\frac{1}{2}mR^2$
Boule (diamètre)	$\frac{2}{5}mR^2$
Tige, axe $\perp$ en son milieu	$\frac{1}{12}mL^2$
Tige, axe $\perp$ en une extrémité	$\frac{1}{3}mL^2$

Remarque

À masse égale, un cerceau a un moment d'inertie deux fois plus grand qu'un disque : sa masse est plus loin de l'axe. C'est pourquoi les volants d'inertie concentrent leur masse en périphérie.

V.3 Théorème du moment cinétique pour un solide

TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'un axe fixe R

Dans un référentiel galiléen, pour un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe :

$$J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)$$

Justification D *:* on écrit le TMC scalaire pour chaque point M_i et on somme. Les forces intérieures s'exercent par paires opposées portées par la même droite (troisième loi de Newton) : leurs moments s'annulent deux à deux. Il ne reste que les moments des actions **extérieures**.

Une **liaison pivot parfaite** (sans frottement) n'autorise que la rotation autour de l'axe et exerce une action de moment nul par rapport à cet axe : le TMC scalaire l'élimine, comme le TMC élimine la tension d'un fil fixé en O.

V.4 Énergie et puissance en rotation

Énergie cinétique et puissance R

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \qquad \mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta\, \omega \qquad \delta W = \mathcal{M}_\Delta\, \mathrm{d}\theta$$

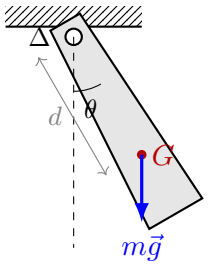
Démonstration D *:* $E_c = \sum \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$. Pour une force appliquée en M, $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = F_\theta\, r\omega = \mathcal{M}_\Delta\, \omega$ car seule la composante orthoradiale F_θ a un moment, $\mathcal{M}_\Delta = r F_\theta$. En multipliant le TMC par ω, on retrouve le théorème de la puissance cinétique $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}$: pour un axe fixe, TMC et énergie sont **équivalents**, on choisit le plus commode.

	Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
Paramètre, vitesse	x, $v = \dot{x}$	θ, $\omega = \dot{\theta}$
Inertie	masse m	moment d'inertie J_Δ
Quantité conservée si isolé	$p = mv$	$L_\Delta = J_\Delta \omega$
Cause du mouvement	force F	moment $\mathcal{M}_\Delta$
Loi d'évolution	$m\dot{v} = \sum F$	$J_\Delta \dot{\omega} = \sum \mathcal{M}_\Delta$
Énergie cinétique, puissance	$\frac{1}{2}mv^2$, Fv	$\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$, $\mathcal{M}_\Delta \omega$

V.5 Pendule pesant

Un solide de masse m tourne autour d'un axe horizontal fixe Δ (liaison pivot parfaite) ; son centre de masse G est à la distance d de l'axe. Le poids s'applique en G : $\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = -mgd\sin\theta$. Le TMC donne

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\sin\theta = 0$$



Pour les petites oscillations, $\omega_0 = \sqrt{mgd/J_\Delta}$. Le pendule simple est le cas particulier $J_\Delta = md^2$. Énergétiquement, $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta$ est constante : le mouvement est **pendulaire** (oscillant) si $E_m < mgd$ et **révolutif** (le pendule fait des tours complets) si $E_m > mgd$.

Conservation : patineuse, plongeur, pulsar

Si le moment des actions extérieures par rapport à l'axe est nul, L_Δ se conserve même lorsque le système se **déforme** : en rapprochant sa masse de l'axe, on diminue J_Δ et on augmente ω.

- La patineuse qui ramène ses bras tourne plus vite ; le plongeur qui se met en boule accélère ses saltos.
- Une étoile qui s'effondre en étoile à neutrons voit son rayon passer d'environ $10^6\,\mathrm{km}$ à $10\,\mathrm{km}$: son moment d'inertie est divisé par 10^{10} et sa période de rotation passe de quelques semaines à quelques millisecondes (pulsars).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 10 La patineuse ✦✦✧✧✧

Une patineuse tourne sur elle-même à $1{,}0\,\mathrm{tour\cdot s^{-1}}$, bras écartés (moment d'inertie $J_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^2}$). Elle ramène ses bras le long du corps ($J_2 = 1{,}6\,\mathrm{kg\cdot m^2}$). On néglige les frottements de la glace.

Q-1) Justifier la conservation de L_Δ et calculer la nouvelle vitesse de rotation.

Q-2) Comparer les énergies cinétiques de rotation. D'où vient la différence ?

EXERCICE 11 Démarrage d'un moteur ✦✦✧✧✧

Le rotor d'un moteur électrique (moment d'inertie $J = 2{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$) est soumis au couple moteur $\Gamma_m = \Phi i$ ($\Phi = 0{,}50\,\mathrm{N\cdot m\cdot A^{-1}}$, intensité i constante), à un couple de frottement visqueux $-\lambda\omega$ ($\lambda = 1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{N\cdot m\cdot s}$) et au couple résistant constant $-\Gamma_0$ de la charge ($\Gamma_0 = 0{,}10\,\mathrm{N\cdot m}$). Il démarre à $t = 0$ avec $\omega = 0$.

Q-1) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$ et la résoudre.

Q-2) Quelle intensité faut-il imposer pour obtenir la vitesse de régime $\omega_\infty = 100\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$? Au bout de combien de temps ce régime est-il atteint à $1\,\%$ près ?

Q-3) Quelle puissance mécanique le moteur fournit-il en régime permanent ? Où passe-t-elle ?

EXERCICE 12 Pendule pesant : tige homogène ✦✦✦✧✧

Une tige homogène de masse m et de longueur L tourne sans frottement autour d'un axe horizontal passant par une de ses extrémités.

Q-1) Établir l'équation du mouvement et la période des petites oscillations. Comparer au pendule simple de même longueur. AN pour $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$.

Q-2) La tige, verticale vers le bas, est lancée avec la vitesse angulaire Ω_0. Quelle valeur minimale de Ω_0 permet un mouvement révolutif ?

EXERCICE 13 **Pendule de torsion** ✦✦✧✧✧

Une barre AB de longueur $\ell = 20\,\text{cm}$, de masse négligeable, porte à ses extrémités deux masses ponctuelles $m = 50\,\text{g}$. Elle est suspendue en son milieu O à un fil vertical de constante de torsion C. On la tourne d'un angle θ_0 dans le plan horizontal puis on la lâche sans vitesse.

Q-1) Calculer le moment d'inertie du système par rapport à l'axe du fil.

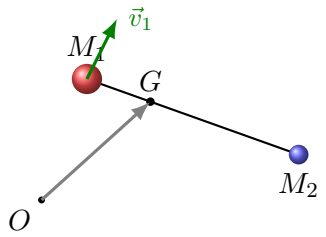
Q-2) Établir l'équation du mouvement et exprimer $\theta(t)$.

Q-3) La période mesurée est $T_0 = 10\,\text{s}$. En déduire C.

VI Système de deux points matériels

VI.1 Barycentre et référentiel barycentrique

On étudie, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, deux points M_1 (masse m_1) et M_2 (masse m_2), de masse totale $M = m_1 + m_2$. Leur **barycentre** (centre de masse) G est défini par $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{OG} = \dfrac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$; il est situé sur le segment $[M_1M_2]$, plus près du point le plus lourd.



Définition — Référentiel barycentrique R

Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$ est le référentiel d'origine G **en translation** par rapport à $\mathcal{R}$.

Grandeurs du système R

On note $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 (la même dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^\star$) et $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ la **masse réduite**.

- Quantité de mouvement : $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{v}_G$; dans $\mathcal{R}^\star$, $\vec{P}^\star = \vec{0}$.
- Moment cinétique barycentrique : $\vec{L}^\star = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}$; énergie cinétique barycentrique : $E_c^\star = \frac{1}{2}\mu v^2$.
- Théorèmes de **Kœnig** :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}^\star \qquad E_c = \frac{1}{2}Mv_G^2 + E_c^\star$$

VI.2 Lois de la dynamique pour le système

Chaque point subit des forces **extérieures** et la force **intérieure** exercée par l'autre, avec $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$ portée par (M_1M_2).

Théorèmes de la résultante et du moment cinétique R D

$$M\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right) \quad (O \text{ fixe})$$

Démonstration : on somme les PFD des deux points : les forces intérieures s'éliminent. Pour le TMC, leurs moments donnent $\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{2\to1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{1\to2} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}_{1\to2} = \vec{0}$, car $\vec{F}_{1\to2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_1M_2}$. C'est

ce résultat, généralisé, qui fonde le TMC pour un solide (partie V).

✗ Attention, erreurs fréquentes

Les forces intérieures disparaissent des théorèmes de la résultante et du moment cinétique, mais **pas** du bilan d'énergie : leur puissance totale vaut $\vec{F}_{1\to2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_1M_2}}{\mathrm{d}t}$, nulle seulement si la distance M_1M_2 est constante. C'est pourquoi la patineuse modifie son énergie cinétique mais pas son moment cinétique.

Remarque

Pour un système **isolé**, $\vec{v}_G$ est constant (le référentiel barycentrique est galiléen) et $\vec{L}^\star$ est conservé : dans $\mathcal{R}^\star$, le mouvement relatif est celui d'une particule fictive de masse μ soumise à $\vec{F}_{1\to2}$. C'est la **réduction canonique**, exploitée au chapitre M7 pour les étoiles doubles et les exoplanètes.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 14 Haltère lancée en l'air ✦✦✧✧✧

Une haltère est formée de deux masses ponctuelles $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ et $m_2 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ reliées par une tige rigide de masse négligeable et de longueur $d = 0{,}60\,\mathrm{m}$. On la lance en l'air en la faisant tourner ; on néglige les frottements.

Q-1) Situer G. Quel est son mouvement ?

Q-2) Montrer que $\vec{L}^\star$ se conserve. En déduire que l'haltère tourne à vitesse angulaire constante ω autour de G, dans un plan de direction fixe.

Q-3) Exprimer $L^\star$ et $E_c^\star$ en fonction de μ, d et ω. AN pour $\omega = 10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

VII Synthèse

★ À retenir

Grandeur	Expression	Remarques
Moment cinétique en O	$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}$	$\perp$ au plan $(O,M,\vec{v})$
Par rapport à (Oz)	$L_z = \vec{L}_O\cdot\vec{u}_z = mr^2\dot\theta$	indépendant du point de l'axe
Moment d'une force	$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}$, $\mathcal{M}_\Delta = \pm Fd$	nul si $\vec{F}$ rencontre l'axe ou lui est $\parallel$
TMC (point fixe)	$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)$	référentiel galiléen, O fixe
TMC (axe fixe)	$\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$	projection du précédent
Pendule simple	$\ddot\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$	$T \approx T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$
Kœnig (2 points)	$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG}\wedge M\vec{v}_G + \vec{L}^\star$	$\vec{L}^\star = \vec{r}\wedge\mu\vec{v}$
Solide, axe fixe	$L_\Delta = J_\Delta\omega$, $J_\Delta\dot\omega = \sum\mathcal{M}_\Delta$	$E_c = \frac12 J_\Delta\omega^2$, $\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta\omega$

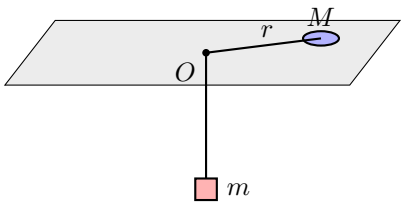
- Force centrale de centre $O \Rightarrow \vec{L}_O$ conservé $\Rightarrow$ mouvement plan et loi des aires $r^2\dot\theta = C$ (chapitre M7).
- Le TMC élimine les forces qui passent par le point (ou l'axe) choisi ; le PFD sert ensuite à calculer ces forces.
- Moment cinétique conservé n'implique pas énergie conservée (et réciproquement).

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 15 Palet relié à une masse suspendue

★★★☆☆

Un palet de masse M glisse sans frottement sur un plateau horizontal percé d'un trou O. Il est relié par un fil inextensible, de masse négligeable, passant par O, à une masse m qui pend verticalement. On repère le palet par ses coordonnées polaires (r, θ) de centre O et on suppose le fil toujours tendu.



Q-1) Montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est constant.

Q-2) Établir l'équation du mouvement radial : $(M+m)\ddot{r} - M\dfrac{C^2}{r^3} = -mg$.

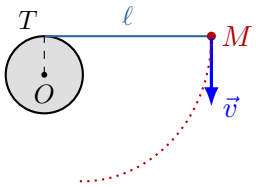
Q-3) En déduire une intégrale première et l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$. Tracer son allure.

Q-4) Déterminer le rayon r_0 du mouvement circulaire et montrer qu'il est stable. Calculer la pulsation Ω des petites oscillations radiales et comparer à la vitesse angulaire ω_0 du mouvement circulaire. La trajectoire perturbée est-elle fermée ?

EXERCICE 16 Fil qui s'enroule autour d'un poteau

★★★☆☆

Un point M de masse m glisse sans frottement sur une table horizontale. Il est attaché à un fil inextensible dont l'autre extrémité est fixée sur un poteau vertical de rayon a et d'axe passant par O. Le fil s'enroule sur le poteau ; on note $\ell(t)$ la longueur de fil non enroulée, T le point de tangence, et φ l'angle dont a tourné le rayon OT. À $t = 0$, $\ell = \ell_0$ et $\vec{v}_0 \perp \overrightarrow{TM}$.



Q-1) Montrer que $\vec{v}$ reste perpendiculaire au fil et que la norme v de la vitesse est constante.

Q-2) Montrer que $L_z = mv\ell$. Le moment cinétique en O est-il conservé ? Vérifier le TMC en calculant le moment de la tension.

Q-3) Sachant que $\ell = \ell_0 - a\varphi$ et $v = \ell\dot{\varphi}$, déterminer la durée τ au bout de laquelle le fil est entièrement enroulé. AN : $\ell_0 = 1{,}0\,\text{m}$, $a = 5{,}0\,\text{cm}$, $v = 2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

EXERCICE 17 Pulsar et ordre de grandeur

★★★☆☆

Le Soleil ($R_\odot = 7{,}0\times10^5\,\text{km}$) tourne sur lui-même en environ $27\,\text{jours}$. On modélise une étoile semblable par une boule homogène ($J = \frac{2}{5}MR^2$) qui s'effondre, sans perte de masse ni de moment cinétique, en une étoile à neutrons de rayon $R_n = 12\,\text{km}$.

Q-1) Calculer la période de rotation finale.

Q-2) Calculer la vitesse équatoriale finale et la comparer à la vitesse de la lumière. Commenter le modèle.

EXERCICE 18 Pendule de Holweck–Lejay (gravimètre)

★★★☆☆

Une masse ponctuelle m est fixée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur ℓ, articulée sans frottement en O et mobile dans un plan vertical. Un ressort spiral exerce sur la tige le couple de rappel $-C\theta$, où θ est l'angle de la tige avec la verticale **ascendante**.

Q-1) Écrire l'énergie mécanique et en déduire l'équation du mouvement. La retrouver par le TMC.

Q-2) À quelle condition la position $\theta = 0$ (masse en haut) est-elle un équilibre stable ? Montrer que la période des petites oscillations s'écrit $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{A-g}}$ et exprimer A.

Q-3) Comparer la sensibilité $\frac{\Delta T}{T}$ à une petite variation Δg à celle d'un pendule simple. Conclure.

IX Classiques des concours

EXERCICE 19 Masse sur une table reliée à une masse pendante

★★★★☆

Un palet de masse m glisse sans frottement sur une table horizontale percée d'un trou O. Il est relié par un fil inextensible passant par le trou à une masse M qui pend verticalement. Données : $m = M = 0{,}20\,\mathrm{kg}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-1) Montrer que le moment cinétique du palet par rapport à O se conserve ; on note $C = r^2\dot{\theta}$.

Q-2) Montrer que $(m+M)\ddot{r} = \dfrac{mC^2}{r^3} - Mg$.

Q-3) Pour quelle valeur de C le palet décrit-il un cercle de rayon $r_0 = 50\,\mathrm{cm}$? Calculer la vitesse angulaire ω_0 correspondante.

Q-4) On perturbe légèrement ce mouvement. Calculer la pulsation Ω des oscillations radiales et le rapport Ω/ω_0.

Q-5) Que se passe-t-il si l'on lâche le palet avec une vitesse purement radiale ? Calculer l'accélération du palet.

Q-6) On lance le palet depuis r_0 avec une vitesse orthoradiale $v_1 = 2r_0\omega_0$. Montrer, à l'aide de l'énergie potentielle effective, que r oscille entre r_0 et une valeur r_1 que l'on calculera.

EXERCICE 20 Pendule simple : calcul exact de la période

★★★★☆

On reprend le pendule simple d'amplitude $\theta_0 \in]0,\pi[$, avec $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

Q-1) À l'aide de l'énergie, montrer que $T = \dfrac{2}{\omega_0}\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$.

Q-2) On pose $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\psi$. Montrer que $T = \dfrac{4}{\omega_0}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$.

Q-3) En développant l'intégrande à l'ordre 2 en k, retrouver la formule de Borda.

Q-4) Pour $\theta_0 = 90°$, la valeur exacte est $T/T_0 = 1{,}180$. Calculer l'erreur relative de la formule de Borda.

EXERCICE 21 Le levier d'Archimède

★★★☆☆

« Donnez-moi un point d'appui… » On veut soulever une masse $M = 1{,}0\,\mathrm{t}$ à l'aide d'une barre rigide de masse négligeable, posée sur un point d'appui A, en appuyant verticalement avec une force $F = 500\,\mathrm{N}$.

Q-1) En appliquant le TMC à la barre par rapport à l'axe passant par A, écrire la condition d'équilibre (on admet que le TMC s'applique à la barre en sommant les moments des forces extérieures).

Q-2) Le bras de levier côté charge vaut $d_2 = 20\,\mathrm{cm}$. Quelle doit être la longueur d_1 du bras côté opérateur ?

Q-3) L'opérateur abaisse son extrémité de $40\,\mathrm{cm}$ (rotation lente). De combien la charge monte-t-elle ? Comparer les travaux et conclure.