LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

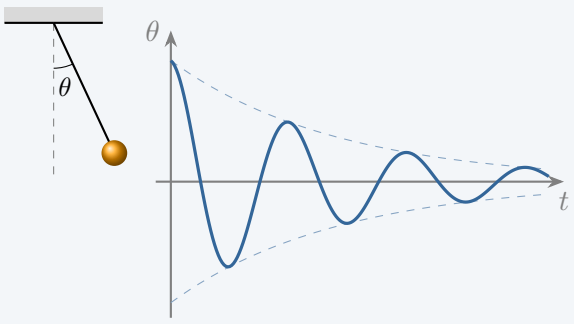
FICHE RÉSUMÉ

M5

MÉCANIQUE

Oscillateur linéaire à un degré de liberté

Oscillateur harmonique — Pendule simple — Régimes libres amortis — Facteur de qualité — Régime forcé et résonance — Analogie électromécanique



> *La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout.*
>
> — Henri Poincaré, *La Valeur de la science* (1905)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Pendule simple »

M5 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Au voisinage d'un équilibre stable, tout système à un degré de liberté se comporte comme un **oscillateur harmonique** $\ddot{X}+\omega_0^2 X=0$. Un frottement fluide ajoute le terme $\frac{\omega_0}{Q}\dot{X}$: selon le **facteur de qualité** Q, le retour à l'équilibre est apériodique, critique ou pseudo-périodique, et l'énergie décroît. Excité sinusoïdalement, l'oscillateur atteint un régime forcé à la pulsation de l'excitateur, étudié en **notation complexe** : il présente une **résonance**, d'autant plus aiguë que Q est grand.

I L'oscillateur harmonique

Définition — Oscillateur harmonique R

Un système à un degré de liberté est un oscillateur harmonique si l'écart $X=x-x_e$ à l'équilibre vérifie

$$\ddot{X}+\omega_0^2 X=0 \qquad \Longrightarrow \qquad X(t)=X_m\cos(\omega_0 t+\varphi)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$$

X_m et φ (ou $A=X(0)$, $B=\dot{X}(0)/\omega_0$) sont fixés par les conditions initiales ; période propre $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ indépendante de l'amplitude (**isochronisme**).

Exemples, énergie, portrait de phase R D

- **Masse–ressort** : $m\ddot{x}=-k(x-\ell_0)$, $\omega_0=\sqrt{k/m}$; une force constante (poids d'un ressort vertical) ne fait que déplacer l'équilibre.
- **Pendule simple** : $\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$; pour $|\theta|\ll 1$, $\omega_0=\sqrt{g/\ell}$. Grandes amplitudes : $T\approx T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$ (Borda).
- **Énergie** : $E_m=\frac{1}{2}m\dot{X}^2+\frac{1}{2}kX^2=\frac{1}{2}kX_m^2=$ cte ; E_c et E_p oscillent à $2\omega_0$ et s'échangent : $\langle E_c\rangle=\langle E_p\rangle=E_m/2$.
- **Portrait de phase** : ellipse dans le plan $(X,\dot{X})$, cercle dans le plan $(X,\dot{X}/\omega_0)$, parcouru dans le sens horaire.

II Oscillateur amorti en régime libre

Forme canonique R D

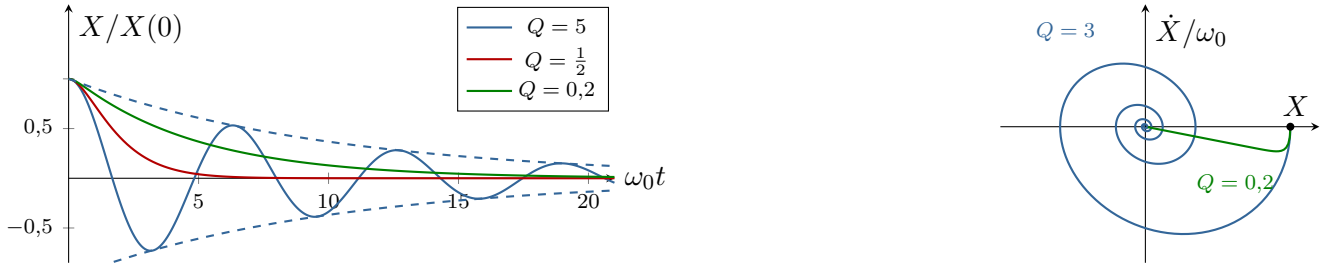
Masse m, ressort k, frottement fluide $-\lambda\dot{x}\,\vec{u}_x$. Le PFD donne $m\ddot{X}=-kX-\lambda\dot{X}$, soit

$$\ddot{X}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{X}+\omega_0^2 X=0 \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad Q=\frac{m\omega_0}{\lambda}=\frac{\sqrt{km}}{\lambda}$$

Q (sans dimension) : **facteur de qualité**. Notations équivalentes : $\frac{\omega_0}{Q}=2\alpha=2\sigma\omega_0$, avec $\sigma=\frac{1}{2Q}$ (taux d'amortissement). Équation caractéristique : $r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$, de discriminant $\Delta=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$.

★ À retenir

Régime	Solution $X(t)$	À retenir
Apériodique ($Q < \frac{1}{2}$)	$A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}$	$r_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) < 0$; retour lent, en $\sim \frac{1}{Q\omega_0}$ si $Q \ll 1$
Critique ($Q = \frac{1}{2}$)	$(A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$	retour à l'équilibre le plus rapide sans oscillation
Pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$)	$X_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi)$	$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$, $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$, pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega} \gtrsim T_0$



Réponse libre ($X(0) \neq 0$, $\dot{X}(0) = 0$) et portraits de phase : la trajectoire converge vers l'équilibre (attracteur).

Décrément logarithmique et énergie R D

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X(t)}{X(t+nT)} = \frac{T}{\tau} \approx \frac{\pi}{Q}\ (Q \gg 1) \qquad Q \approx 2\pi\,\frac{E_m}{|\Delta E_m|_{\text{une période}}}$$

$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -\lambda\dot{X}^2 \leq 0$: l'énergie mécanique décroît (en $\mathrm{e}^{-2t/\tau}$ pour $Q \gg 1$). Le régime transitoire dure quelques τ : on observe environ Q oscillations avant l'arrêt.

III Oscillations forcées et résonance

Régime sinusoïdal forcé et notation complexe R M

Excitation $F_0\cos\omega t$ (ou extrémité du ressort $x_A = a\cos\omega t$, avec $F_0 = ka$) : $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$. Après le transitoire (quelques τ), $X = X_m\cos(\omega t + \varphi)$ **à la pulsation de l'excitateur**. On pose $\underline{X} = \underline{X}_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, $\underline{X}_m = X_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to \mathrm{j}\omega$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \to -\omega^2$. Avec $u = \omega/\omega_0$:

$$\underline{X}_m = \frac{F_0/k}{1 - u^2 + \mathrm{j}\,\frac{u}{Q}} \qquad X_m = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \qquad \underline{V}_m = \mathrm{j}\omega\underline{X}_m = \frac{F_0/\lambda}{1 + \mathrm{j}Q\left(u - \frac{1}{u}\right)}$$

Déphasage de X : $\sin\varphi \leq 0$, $\tan\varphi = -\frac{u}{Q(1-u^2)}$: φ passe de 0 (BF) à $-\pi$ (HF), vaut $-\frac{\pi}{2}$ en $u = 1$: l'oscillateur est en **retard** sur l'excitateur.

Résonances R D

- **Élongation** : maximum de X_m si et seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, en

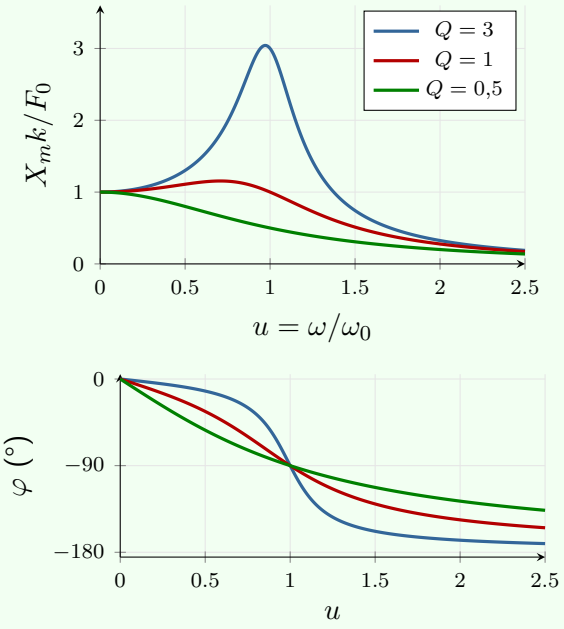
$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

  Pour $Q \gg 1$: $\omega_r \approx \omega_0$, $X_{m,\max} \approx Q\,\frac{F_0}{k}$.

- **Vitesse** : toujours en $\omega = \omega_0$, $V_{m,\max} = \frac{F_0}{\lambda}$, vitesse en phase avec la force ; **bande passante** à $-3\,\mathrm{dB}$ ($V_m \geq V_{m,\max}/\sqrt{2}$) :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \qquad (\text{acuité} : Q = \tfrac{\omega_0}{\Delta\omega})$$

- Énergie : $\langle \mathcal{P}_{\text{exc}} \rangle = \frac{1}{2}\lambda V_m^2$: l'excitateur compense en moyenne l'énergie dissipée.



IV Analogie électromécanique et portrait de phase

	Oscillateur mécanique	Circuit RLC série
Équation	$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$
Variable / dérivée	x / $v = \dot{x}$	q / $i = \dot{q}$
Inertie ; rappel ; dissipation	m ; k ; λ	L ; $1/C$; R
Énergies	$\frac{1}{2}mv^2$; $\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}Li^2$; $\frac{q^2}{2C}$
ω_0 **;** Q	$\sqrt{k/m}$; $\sqrt{km}/\lambda$	$1/\sqrt{LC}$; $\frac{1}{R}\sqrt{L/C}$
Résonance en…	élongation ($Q > 1/\sqrt{2}$) ; vitesse (en ω_0)	tension u_C ; intensité (en ω_0)

Lire un portrait de phase R

- Courbe **fermée** : mouvement périodique, sans dissipation ; trajectoire **ouverte** : mouvement non périodique.
- **Spirale** convergente : amortissement (pseudo-périodique) ; le nombre de tours donne un ordre de grandeur de Q. Un point vers lequel toutes les trajectoires convergent est un **attracteur**.
- Trajectoire non symétrique par rapport à l'axe (Ox) : système **irréversible** (dissipatif).
- Intersections avec l'axe $\dot{x} = 0$: élongations extrêmes ; deux passages successifs du même côté donnent T et $\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}$.

Ordres de grandeur

Facteurs de qualité : amortisseur de voiture $Q \approx 0{,}5$; pendule de laboratoire $\sim 10^2$; diapason $\sim 10^3$; quartz de montre $\sim 10^5$. Pour $Q = 2$, T ne dépasse T_0 que de $3\,\%$; ω_r et ω_0 diffèrent de moins de $1\,\%$ dès $Q > 5$. Frottement solide : amplitude décroissant **linéairement** ($4fmg/k$ par période), arrêt en un nombre fini d'oscillations.

V Méthodes et pièges

☞ Méthode — Mesurer un facteur de qualité M

- En régime libre : décrément logarithmique $\delta \approx \pi/Q$, ou nombre d'oscillations visibles $\approx Q$.
- En régime forcé : $Q = \omega_0/\Delta\omega$ sur la résonance en **vitesse** (relation exacte), ou sur celle en élongation si $Q \gg 1$ ($X_{m,\max} \approx QF_0/k$).

☞ Méthode — Étudier un oscillateur M

1. Mettre l'équation sous forme canonique (PFD ou dérivée de E_m) et identifier ω_0 et Q par identification.
2. Régime libre : discuter selon Q par rapport à $\frac{1}{2}$, puis fixer les constantes avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.
3. Régime forcé : passer en complexes, isoler $\underline{X}_m$ (ou $\underline{V}_m$), en déduire module et argument.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Ne pas confondre le seuil $Q = \frac{1}{2}$ (nature du régime **libre**) et le seuil $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (existence de la résonance en **élongation**).
- La résonance en vitesse a **toujours** lieu en ω_0 ; celle en élongation en $\omega_r < \omega_0$.
- $\varphi = \arg \underline{X}_m$: ne pas écrire $\varphi = \arctan(\ldots)$ quand la partie réelle peut être négative ; raisonner sur le signe de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.
- Le régime forcé est à la pulsation ω de l'excitateur, pas à ω_0 ni à Ω.
- Les constantes d'intégration s'appliquent à la solution **complète** (libre + forcée), pas à la seule solution homogène.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais établir l'équation d'un oscillateur harmonique et l'écrire avec les conditions initiales.
- ☐ Je sais faire un bilan énergétique de l'oscillateur harmonique et tracer son portrait de phase.
- ☐ Je sais mettre l'équation amortie sous forme canonique et exprimer ω_0 et Q.
- ☐ Je sais reconnaître les trois régimes libres et tracer l'allure de $X(t)$.
- ☐ Je sais utiliser le décrément logarithmique et l'interprétation énergétique de Q.
- ☐ Je sais établir $\underline{X}_m$ et $\underline{V}_m$ en complexes et discuter les résonances.
- ☐ Je sais utiliser l'analogie avec le circuit RLC et lire un portrait de phase.