LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

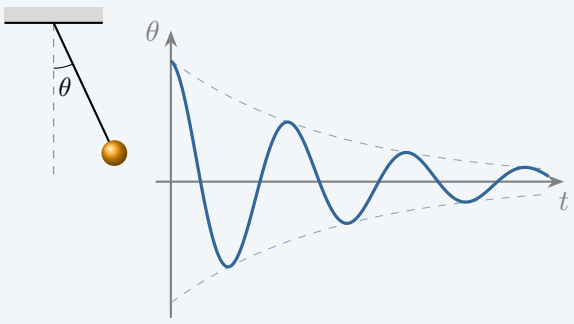
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M5

MÉCANIQUE

Oscillateur linéaire à un degré de liberté

Oscillateur harmonique — Pendule simple — Régimes libres amortis — Facteur de qualité — Régime forcé et résonance — Analogie électromécanique



> *La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout.*
>
> — Henri Poincaré, *La Valeur de la science* (1905)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Pendule simple »

M5 — Oscillateur linéaire

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Établir et résoudre l'équation d'un oscillateur harmonique ; exploiter l'isochronisme et la conservation de l'énergie.
- Mettre l'équation d'un oscillateur amorti sous forme canonique ; définir ω_0 et le facteur de qualité Q.
- Identifier les régimes libres apériodique, critique et pseudo-périodique ; estimer Q par le décrément logarithmique.
- Utiliser la notation complexe pour étudier le régime sinusoïdal forcé.
- Étudier la résonance en élongation et en vitesse ; relier bande passante et facteur de qualité.
- Lire un portrait de phase ; exploiter l'analogie avec le circuit RLC série (chapitres E3 et E4).

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Pendule simple » permet de faire varier l'amplitude, la longueur et l'amortissement d'un pendule, et de suivre en direct $\theta(t)$, le portrait de phase et les énergies.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I L'oscillateur harmonique . . . 3
I.1 Un modèle universel . . . 3
I.2 Le système masse–ressort . . . 3
I.3 Aspect énergétique et portrait de phase . . . 4
I.4 Le pendule simple . . . 4
II Oscillateur amorti en régime libre . . . 5
II.1 Forme canonique et facteur de qualité . . . 5
II.2 Les trois régimes libres . . . 5
II.3 Décrément logarithmique et aspect énergétique . . . 6
III Oscillations forcées et résonance . . . 7
III.1 Régime transitoire et régime établi . . . 7
III.2 Notation complexe . . . 7
III.3 Résonance en élongation . . . 8
III.4 Résonance en vitesse et bande passante . . . 8
IV Analogie électromécanique . . . 10
V Synthèse . . . 10
VI Exercices d'approfondissement . . . 11
VII Classiques des concours . . . 12

I L'oscillateur harmonique

I.1 Un modèle universel

Au chapitre M3, on a vu qu'au voisinage d'une position d'équilibre x_e, $E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2$ avec $k = E_p''(x_e)$: la force vaut $-k(x-x_e)$ et le PFD donne $m\ddot{x} = -k(x-x_e)$.

- si $k > 0$ (équilibre **stable**), $x - x_e$ oscille sinusoïdalement ;
- si $k < 0$ (équilibre **instable**), $x - x_e$ est une combinaison d'exponentielles réelles et diverge ;
- si $k = 0$ au second ordre (équilibre **indifférent** à cet ordre, comme une bille sur un plan horizontal), x est affine en t.

Tout système faiblement écarté d'un équilibre stable se comporte donc, en première approximation, comme un oscillateur harmonique : c'est ce qui rend ce modèle omniprésent (molécules, circuits, structures, horloges).

Définition — Oscillateur harmonique R

Un système à un degré de liberté x est un **oscillateur harmonique** si l'écart $X = x - x_e$ à l'équilibre vérifie

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

ω_0 est la **pulsation propre** (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$: c'est la vitesse de variation d'un angle, la phase) ; période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, fréquence propre $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$.

I.2 Le système masse–ressort

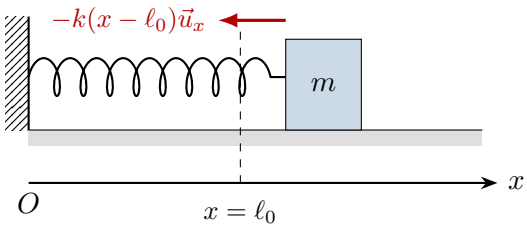


Fig. 1 : Oscillateur horizontal sans frottement : la position de la masse est repérée par la longueur x du ressort.

Équation et solution R D

Le poids et la réaction se compensent ; le PFD projeté sur $\vec{u}_x$ donne $m\ddot{x} = -k(x-\ell_0)$, soit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Solution générale : $x(t) = \ell_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = \ell_0 + X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Avec $x(0) = \ell_0 + X_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$:

$$x(t) = \ell_0 + X_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \qquad X_m = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Remarque

- **Isochronisme** : la période $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ ne dépend pas de l'amplitude.
- Une **analyse dimensionnelle** ($T_0 = m^a k^b \ell_0^c$, $[k] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$) donne $T_0 \propto \sqrt{m/k}$ indépendamment de ℓ_0, mais ne fournit pas le facteur 2π.
- Une force constante (poids pour un ressort vertical, poussée d'Archimède) ne modifie pas ω_0 : elle ne fait que **déplacer la position d'équilibre** (chapitre M3).

I.3 Aspect énergétique et portrait de phase

Conservation de l'énergie R D

Avec $X = x - \ell_0 = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $k = m\omega_0^2$:

$$E_p = \tfrac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi), \qquad E_c = \tfrac{1}{2}m\dot{X}^2 = \tfrac{1}{2}kX_m^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi), \qquad E_m = \tfrac{1}{2}kX_m^2 = \text{cste}.$$

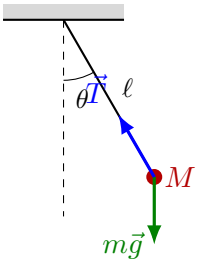
E_c et E_p oscillent à la pulsation $2\omega_0$ et s'échangent ; en moyenne sur une période, $\langle E_c\rangle = \langle E_p\rangle = \dfrac{E_m}{2}$.

Dans le plan de phase $(X, \dot{X}/\omega_0)$, la conservation de l'énergie s'écrit $X^2 + \left(\dot{X}/\omega_0\right)^2 = X_m^2$: la trajectoire de phase est un **cercle** parcouru dans le sens horaire (une ellipse dans le plan $(X, \dot{X})$).

I.4 Le pendule simple

Un point M de masse m est suspendu à un fil idéal de longueur ℓ ; on le repère par l'angle θ avec la verticale. Le PFD projeté sur $\vec{u}_\theta$ (chapitre M2) ou la dérivée de l'énergie mécanique (chapitre M3) donnent

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$



Cette équation est **non linéaire**. Pour $|\theta| \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$ et l'on obtient un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

Remarque

Pour des amplitudes θ_0 non petites, la période augmente : $T \approx T_0\left(1 + \dfrac{\theta_0^2}{16}\right)$ (formule de Borda). L'écart n'est que de $0{,}2\,\%$ pour $\theta_0 = 10°$, mais atteint $18\,\%$ pour $\theta_0 = 90°$: l'isochronisme n'est qu'approché (chapitre M3, activité numérique).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Ordres de grandeur ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer la période d'un système masse–ressort ($m = 200\,\mathrm{g}$, $k = 20\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) et d'un pendule simple de $1{,}0\,\mathrm{m}$.

Q-2) Comment varie la période si l'on quadruple la masse ? si l'on remplace le ressort par deux ressorts identiques montés en parallèle ? en série ?

Q-3) La masse est lancée depuis l'équilibre avec $v_0 = 0{,}50\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Calculer l'amplitude et l'énergie mécanique.

EXERCICE 2 **Mesure de g avec un pendule** ✦✧✧✧✧

Un pendule simple de longueur $\ell = 0{,}750\,\mathrm{m}$ effectue 20 petites oscillations en $34{,}74\,\mathrm{s}$.

Q-1) En déduire g.

Q-2) Pourquoi mesure-t-on la durée de 20 oscillations plutôt que d'une seule ? Estimer l'incertitude sur g si la durée est connue à $0{,}1\,\mathrm{s}$ près et ℓ à $2\,\mathrm{mm}$ près.

II Oscillateur amorti en régime libre

II.1 Forme canonique et facteur de qualité

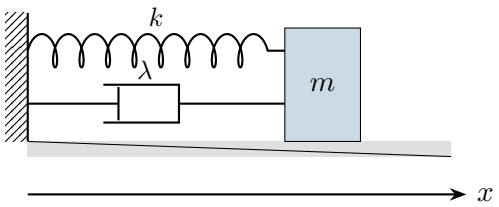


Fig. 2 : Oscillateur amorti : ressort de raideur k et amortisseur exerçant un frottement fluide $-\lambda\dot{x}\,\vec{u}_x$.

Forme canonique R D

Le PFD donne $m\ddot{X} = -kX - \lambda\dot{X}$ (X : écart à l'équilibre), soit

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$$

Q est le **facteur de qualité**, sans dimension. On rencontre aussi les notations $\dfrac{\omega_0}{Q} = 2\alpha = 2\xi\omega_0$, avec α coefficient d'amortissement et $\xi = \frac{1}{2Q}$ taux d'amortissement.

Remarque

Q compare deux temps : $Q = \dfrac{\omega_0}{2}\tau$, où $\tau = \dfrac{2m}{\lambda}$ est le temps d'amortissement de l'amplitude et $1/\omega_0$ le temps caractéristique des oscillations. Pour $Q \to \infty$ (pas de frottement) on retrouve l'oscillateur harmonique. Un faible Q n'est pas un défaut : un amortisseur de voiture est précisément conçu pour ne pas osciller.

II.2 Les trois régimes libres

L'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$, qui change de signe pour $Q = \frac{1}{2}$.

Régimes libres R

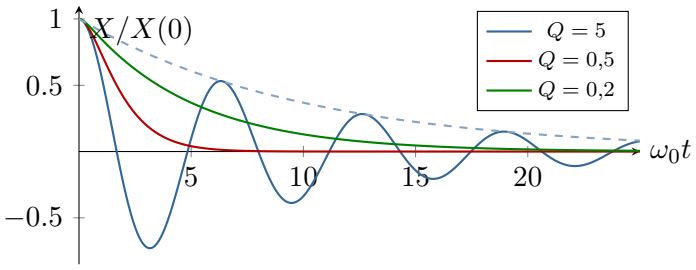
- $Q < \frac{1}{2}$: régime **apériodique** : $X = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec $r_{1,2} = \dfrac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) < 0$; la racine la plus proche de 0 impose la durée du retour à l'équilibre, qui s'allonge quand Q diminue.

- $Q = \frac{1}{2}$: régime **critique** : $X = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$; c'est le retour à l'équilibre le plus rapide sans oscillation.
- $Q > \frac{1}{2}$: régime **pseudo-périodique** :

$$X = X_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi), \qquad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}, \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ est légèrement supérieure à T_0 (3 % d'écart seulement pour $Q = 2$).

Les constantes sont fixées par les conditions initiales $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.



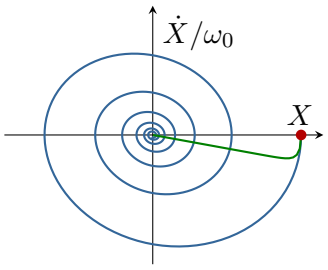


Fig. 3 : Réponse libre pour $X(0) \neq 0$, $\dot{X}(0) = 0$: pseudo-périodique ($Q = 5$), critique et apériodique ; à droite, portraits de phase correspondants : spirale convergeant vers l'équilibre (foyer) pour $Q = 5$, courbe sans enroulement pour $Q = 0{,}2$.

Remarque

Si un léger dépassement de la position finale est toléré (appareils de mesure à aiguille, asservissements), le retour à 5 % près de l'équilibre est le plus rapide pour $Q \approx 0{,}7$, et non pour le régime critique. L'absence d'oscillation ne signifie pas non plus monotonie : avec une vitesse initiale, un régime apériodique peut dépasser une fois l'équilibre.

II.3 Décrément logarithmique et aspect énergétique

Définition — Décrément logarithmique R

En régime pseudo-périodique, $X(t+T) = \mathrm{e}^{-T/\tau}X(t)$ aux mêmes phases. On définit

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X(t)}{X(t+nT)} = \frac{T}{\tau} \approx \frac{\pi}{Q} \quad (Q \gg 1)$$

Interprétation énergétique de Q R D

$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(-\lambda\dot{X}\,\vec{u}_x) = -\lambda\dot{X}^2 \leq 0$: l'énergie mécanique décroît. Pour $Q \gg 1$, $E_m \approx \frac{1}{2}kX_0^2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}$; sur une pseudo-période, $\frac{|\Delta E_m|}{E_m} \approx \frac{2T}{\tau} = \frac{2\pi}{Q}$, d'où

$$Q \approx 2\pi\,\frac{\text{énergie de l'oscillateur}}{\text{énergie dissipée pendant une pseudo-période}}$$

Pratiquement, le nombre d'oscillations visibles avant l'arrêt est de l'ordre de Q.

Ordres de grandeur

Amortisseur de voiture : $Q \approx 0{,}5$; pendule de laboratoire : $Q \sim 10^2$; diapason : $Q \sim 10^3$; quartz de montre : $Q \sim 10^5$; cavités optiques et supraconductrices : jusqu'à 10^{10}.

Remarque

Avec un frottement **solide** (lois de Coulomb, chapitre M2), l'amplitude décroît **linéairement** (de $4fmg/k$ par période), la pseudo-période reste égale à T_0 et le mouvement s'arrête en un nombre fini d'oscillations. Cette décroissance linéaire permet de distinguer expérimentalement les deux types d'amortissement (exercice d'approfondissement).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 — **Suspension de voiture** ✦✧✧✧✧

Une voiture de masse $m = 1000\,\mathrm{kg}$ repose sur quatre ressorts équivalents à un ressort unique de raideur k ; lorsqu'on la charge de $100\,\mathrm{kg}$, elle s'enfonce de $2{,}0\,\mathrm{cm}$.

Q-1) Calculer k et la période propre des oscillations verticales sans amortisseur.

Q-2) Quel coefficient λ faut-il pour obtenir le régime critique ? Pourquoi viser ce régime ?

EXERCICE 4 — **Lecture d'un enregistrement** ✦✦✧✧✧

L'enregistrement de $x(t)$ pour un oscillateur amorti lâché sans vitesse donne $x(0) = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ et, une pseudo-période $T = 315\,\mathrm{ms}$ plus tard, $x(T) = 1{,}6\,\mathrm{cm}$.

Q-1) Calculer le décrément logarithmique, le temps τ et une estimation de Q.

Q-2) Sur un autre oscillateur, l'amplitude est divisée par 2 en 10 pseudo-périodes. Estimer Q.

III Oscillations forcées et résonance

III.1 Régime transitoire et régime établi

On soumet l'oscillateur à une force excitatrice sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (directement appliquée à la masse, ou par l'intermédiaire de l'extrémité mobile du ressort, $x_A = a \cos \omega t$, ce qui revient à $F_0 = ka$) :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_0}{m}\cos \omega t.$$

La solution est la somme de la solution générale de l'équation homogène, qui s'amortit en quelques $\tau = 2Q/\omega_0$ (**régime transitoire**), et d'une solution particulière sinusoïdale **à la pulsation de l'excitateur** (**régime sinusoïdal forcé** ou établi) : $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

III.2 Notation complexe

☞ Méthode — Utiliser les amplitudes complexes M

À $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe $\underline{X}(t) = \underline{X}_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, de sorte que $X = \mathrm{Re}(\underline{X})$, $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg \underline{X}_m$. Dériver revient à **multiplier par** $\mathrm{j}\omega$, et une équation différentielle linéaire devient une équation **algébrique** :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)\underline{X}_m = \frac{F_0}{m}.$$

Pour calculer un argument, on évite $\arctan$ lorsque la partie réelle du dénominateur peut être négative : on raisonne sur le signe de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.

III.3 Résonance en élongation

En posant $u = \omega/\omega_0$:

$$\underline{X}_m = \frac{F_0/k}{1-u^2+\mathrm{j}\,u/Q}, \qquad X_m(u) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-u^2)^2+u^2/Q^2}}$$

Résonance en élongation R D

X_m est maximale si $f(u) = (1-u^2)^2 + u^2/Q^2$ est minimale ; $f'(u) = 2u\left[2(u^2-1)+1/Q^2\right]$ s'annule pour $u>0$ si et seulement si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a alors **résonance** à

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

Pour $Q \gg 1$: $\omega_r \approx \omega_0$ (moins de $1\,\%$ d'écart dès $Q>5$) et $X_{m,\max} \approx Q\,F_0/k$. Le déphasage φ de X par rapport à la force passe de 0 (basses fréquences) à $-\pi$ (hautes fréquences) et vaut $-\pi/2$ en $\omega=\omega_0$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Ne pas confondre le seuil $Q=\frac{1}{2}$ (nature du régime **transitoire**) et le seuil $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (existence de la résonance en **élongation** en régime forcé).

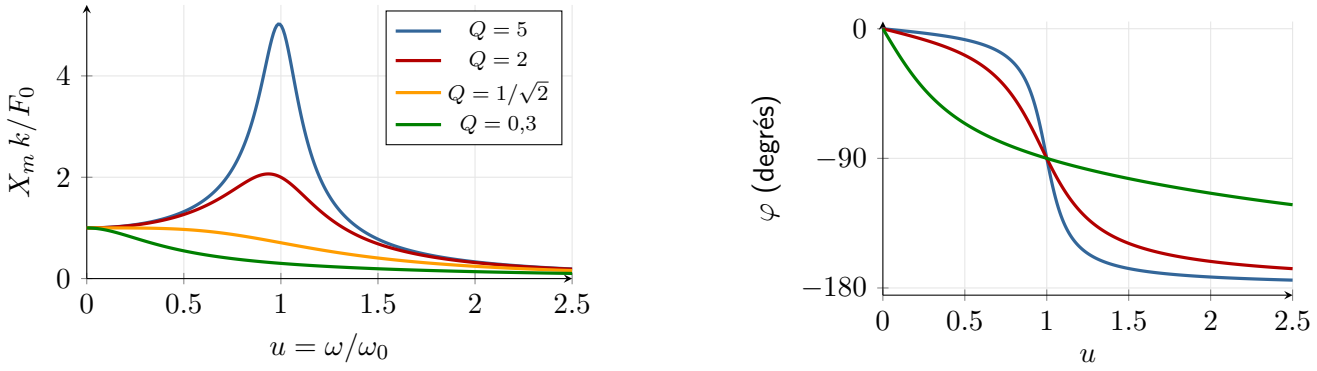


Fig. 4 : Amplitude et déphasage de l'élongation en régime forcé. La résonance n'existe que pour $Q>1/\sqrt{2}$; elle est d'autant plus aiguë que Q est grand.

III.4 Résonance en vitesse et bande passante

Résonance en vitesse R D

L'amplitude complexe de la vitesse est $\underline{V}_m = \mathrm{j}\omega\,\underline{X}_m$, soit

$$\underline{V}_m = \frac{F_0/\lambda}{1 + \mathrm{j}Q\left(u - \dfrac{1}{u}\right)}$$

Son module est maximal pour $u = 1$ **quel que soit** Q : la résonance en vitesse a toujours lieu à $\omega = \omega_0$, avec $V_{m,\max} = F_0/\lambda$ et une vitesse en phase avec la force. La **bande passante** à $-3\,\mathrm{dB}$ (où $V_m > V_{m,\max}/\sqrt{2}$) vaut exactement

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Démonstration : $V_m = V_{m,\max}/\sqrt{2} \iff Q\left(u - \frac{1}{u}\right) = \pm 1 \iff u^2 \mp \frac{u}{Q} - 1 = 0$, dont les racines positives vérifient $u_2 - u_1 = \frac{1}{Q}$.

Bilan énergétique en régime forcé R

La puissance moyenne fournie par l'excitateur, $\langle F\dot{X}\rangle = \frac{1}{2}F_0 V_m \cos\varphi_v$, est égale à la puissance moyenne dissipée par frottement, $\langle \lambda \dot{X}^2\rangle = \frac{1}{2}\lambda V_m^2$. Elle est maximale à la résonance de vitesse, et la courbe $\langle\mathcal{P}\rangle(\omega)$ a une largeur à mi-hauteur $\Delta\omega = \omega_0/Q$. Avec $\tau = 2Q/\omega_0$: $\Delta\omega \cdot \tau = 2$: plus la résonance est fine, plus le régime transitoire est long.

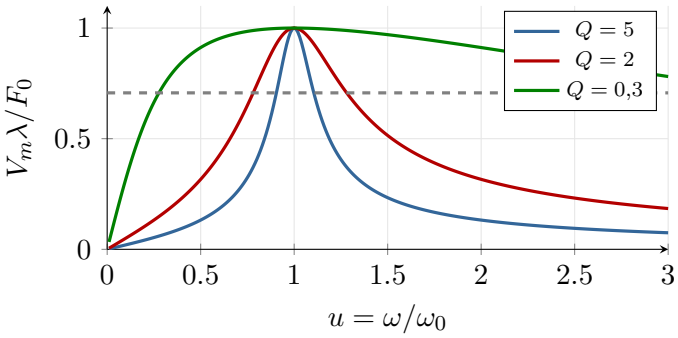


Fig. 5 : Résonance en vitesse : toujours en ω_0 ; la bande passante, lue à $1/\sqrt{2}$ du maximum, vaut ω_0/Q.

☞ Méthode — Mesurer un facteur de qualité M

- En régime libre : décrément logarithmique $\delta \approx \pi/Q$, ou nombre d'oscillations visibles $\approx Q$.
- En régime forcé : $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$, mesuré sur la résonance en **vitesse** (relation exacte), ou sur celle en élongation si $Q \gg 1$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Facteur de qualité par la bande passante

Un oscillateur forcé présente une résonance en vitesse à $f_0 = 12{,}0\,\text{Hz}$; l'amplitude de la vitesse est divisée par $\sqrt{2}$ pour $f_1 = 11{,}4\,\text{Hz}$ et $f_2 = 12{,}6\,\text{Hz}$.

Q-1) Calculer Q.

Q-2) La résonance en élongation existe-t-elle ? À quelle fréquence ? Quelle est la durée caractéristique du régime transitoire ?

EXERCICE 6 Excitation par l'extrémité du ressort

L'extrémité A du ressort d'un oscillateur amorti $(m,\ k,\ \lambda)$ est animée du mouvement $x_A = a\cos\omega t$.

Q-1) Établir l'équation du mouvement de l'écart X à l'équilibre et l'amplitude $X_m(\omega)$.

Q-2) Quelle est la limite de X_m à basse fréquence ? Interpréter.

IV Analogie électromécanique

L'oscillateur mécanique et le circuit RLC série (chapitres E3 et E4) obéissent à la même équation : $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$ et $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$.

	Oscillateur mécanique	**Circuit RLC série**
Variable / dérivée	x / $v = \dot{x}$	q / $i = \dot{q}$
Inertie	m	L
Rappel	k	$1/C$
Dissipation	λ	R
Excitation	$F(t)$	$e(t)$
Énergies	$\frac{1}{2}mv^2$; $\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}Li^2$; $\frac{q^2}{2C}$
ω_0 ; Q	$\sqrt{k/m}$; $\sqrt{km}/\lambda$	$1/\sqrt{LC}$; $\frac{1}{R}\sqrt{L/C}$
Résonance en…	élongation ($Q > 1/\sqrt{2}$) / vitesse (en ω_0)	tension u_C / intensité (en ω_0)

V Synthèse

★ À retenir

- Harmonique : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$; $X = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$; isochronisme ; $\langle E_c\rangle = \langle E_p\rangle = E_m/2$; phase : cercle.
- Masse–ressort : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; pendule simple (petits angles) : $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.
- Amorti : $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$, $Q = \sqrt{km}/\lambda$; apériodique ($Q < \frac{1}{2}$), critique, pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$) avec $\tau = 2Q/\omega_0$, $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$.
- $\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X(t)}{X(t+nT)} \approx \frac{\pi}{Q}$; $Q \approx 2\pi\, E_m/|\Delta E_m|$ par période.
- Forcé : complexes ; élongation $X_m = \dfrac{F_0/k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}}$, résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.
- Vitesse : résonance toujours en ω_0, $\Delta\omega = \omega_0/Q$, $\Delta\omega\cdot\tau = 2$.

VI Exercices d'approfondissement

EXERCICE 7 Le train qui traverse la Terre

★★★☆☆

On creuse un tunnel rectiligne passant par le centre de la Terre (supposée homogène, de rayon $R = 6400\,\mathrm{km}$). On admet qu'à l'intérieur, un objet à la distance r du centre subit la force $-mg\dfrac{r}{R}\vec{u}_r$. On néglige les frottements.

Q-1) Montrer qu'un objet lâché sans vitesse à l'entrée du tunnel a un mouvement harmonique. Calculer la durée de la traversée.

Q-2) Calculer la vitesse au centre. La comparer à la vitesse d'un satellite en orbite rasante.

Q-3) Montrer que la durée est la même pour un tunnel rectiligne qui ne passe pas par le centre.

EXERCICE 8 Amortissement par frottement solide

★★★☆☆

Une masse $m = 200\,\mathrm{g}$, liée à un ressort horizontal ($k = 20\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$), glisse sur un support avec un coefficient de frottement $f = 0{,}10$ (statique et dynamique). On l'écarte de $X_0 = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ de la position où le ressort est au repos et on la lâche.

Q-1) Montrer que, pendant chaque demi-oscillation, le mouvement est harmonique autour d'une position décalée de $\pm x_f$ avec $x_f = \dfrac{fmg}{k}$.

Q-2) Calculer la diminution d'amplitude par demi-période et le nombre de demi-oscillations avant l'arrêt. Où s'arrête la masse ?

EXERCICE 9 Masse immergée excitée par son support

★★★☆☆

Une masse M de volume V est suspendue dans l'eau à un ressort (k, ℓ_0) dont l'extrémité supérieure A est fixe, puis animée du mouvement vertical $z_A = Z\cos\omega t$. L'eau exerce la poussée d'Archimède Π et un frottement $-\alpha\vec{v}$. Axe (Oz) descendant ; à l'équilibre (A fixe), la masse est à la cote h.

Q-1) Écrire la condition d'équilibre. Montrer que la pulsation propre ne dépend pas de Π.

Q-2) Établir l'équation vérifiée par $y = z - h$ quand A bouge, et l'amplitude $Y_m(\omega)$ en régime forcé.

Q-3) Montrer que l'on peut obtenir $Y_m > Z$ sur un intervalle de pulsations, à condition que $M > \dfrac{\alpha^2}{2k}$.

Q-4) A.N. : $M = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, $k = 50\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $\alpha = 4{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Calculer ω_0, Q, la pulsation de résonance et l'amplification maximale $Y_{m,\max}/Z$.

EXERCICE 10 Gravimètre à ressort

★★★☆☆

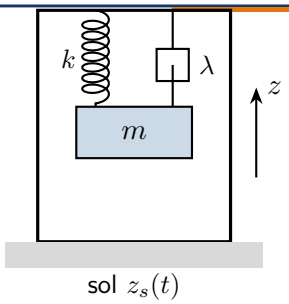
Une masse m est suspendue à un ressort vertical de raideur k. On mesure l'allongement à l'équilibre $\Delta\ell$ et la période T_0 des petites oscillations.

Q-1) Montrer que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta\ell}{g}}$: l'appareil mesure g.

Q-2) Quelle précision relative sur T_0 faut-il pour détecter une variation $\dfrac{\Delta g}{g} = 10^{-6}$ (prospection géophysique) ? Pourquoi préfère-t-on des montages de très grande période ?

VII Classiques des concours

EXERCICE 11 Sismomètre et accéléromètre



Un boîtier, solidaire du sol, a un mouvement vertical $z_s(t)$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Une masse m y est suspendue par un ressort (k) et un amortisseur (λ). On note X l'écart de la position de la masse **par rapport au boîtier** à sa position d'équilibre.

Q-1) Montrer que $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -\ddot{z}_s$.

Q-2) Le sol vibre sinusoïdalement : $z_s = Z_s \cos \omega t$. Établir $\underline{H} = \underline{X}_m / \underline{Z}_s$. Quelle est la nature de ce filtre ?

Q-3) **Sismomètre** : dans quel domaine de fréquences a-t-on $X \approx -z_s$? Faut-il une fréquence propre faible ou élevée ?

Q-4) **Accéléromètre** : montrer que pour $\omega \ll \omega_0$, $X \approx -\ddot{z}_s/\omega_0^2$. Quelle valeur de Q choisir pour une mesure fidèle sur la bande la plus large ?

EXERCICE 12 Suspension d'un véhicule sur une route ondulée

On modélise la suspension d'une roue par une masse $m = 300\,\mathrm{kg}$ (quart du véhicule) reliée à la roue par un ressort de raideur $k = 3{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et un amortisseur exerçant la force $-h(\dot{z} - \dot{z}_s)$, où z est la cote de la caisse (comptée depuis l'équilibre) et z_s celle de la roue, qui suit le profil de la route $z_s = A \cos \dfrac{2\pi x}{L}$, de période spatiale $L = 5{,}0\,\mathrm{m}$. Le véhicule roule à vitesse constante V.

Q-1) Montrer que la roue impose une excitation sinusoïdale de pulsation $\omega = 2\pi V / L$.

Q-2) Établir l'équation différentielle vérifiée par z en faisant apparaître ω_0 et Q.

Q-3) En régime établi, montrer que $\dfrac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \dfrac{1 + \mathrm{j}u/Q}{1 - u^2 + \mathrm{j}u/Q}$.

Q-4) Calculer la vitesse pour laquelle $u = 1$, et l'amplitude du mouvement de la caisse pour $Q = 1$ et $Q = 0{,}5$.

Q-5) Même question à $90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Commenter le rôle de filtre de la suspension et le choix de Q.