LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

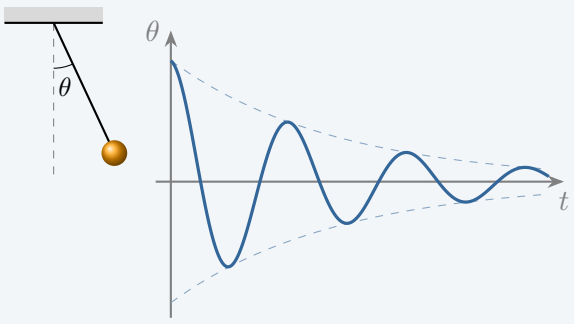
Classes préparatoires aux grandes écoles
**MPSI — Physique-chimie**
Année 2026-2027

# M5

## MÉCANIQUE

# Oscillateur linéaire à un degré de liberté

Oscillateur harmonique — Pendule simple — Régimes libres amortis — Facteur de qualité — Régime forcé et résonance — Analogie électromécanique




> *La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout.*
>
> — Henri Poincaré, *La Valeur de la science* (1905)

physionova
physionova.academy

**Pr. CHARIFI**
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Pendule simple »

# M5 — Oscillateur linéaire

## Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Établir et résoudre l'équation d'un oscillateur harmonique ; exploiter l'isochronisme et la conservation de l'énergie.
- Mettre l'équation d'un oscillateur amorti sous forme canonique ; définir $\omega_0$ et le facteur de qualité $Q$.
- Identifier les régimes libres apériodique, critique et pseudo-périodique ; estimer $Q$ par le décrément logarithmique.
- Utiliser la notation complexe pour étudier le régime sinusoïdal forcé.
- Étudier la résonance en élongation et en vitesse ; relier bande passante et facteur de qualité.
- Lire un portrait de phase ; exploiter l'analogie avec le circuit $RLC$ série (chapitres E3 et E4).

### Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Pendule simple » permet de faire varier l'amplitude, la longueur et l'amortissement d'un pendule, et de suivre en direct $\theta(t)$, le portrait de phase et les énergies.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

## Table des matières

I L'oscillateur harmonique . . . 3
I.1 Un modèle universel . . . 3
I.2 Le système masse–ressort . . . 3
I.3 Aspect énergétique et portrait de phase . . . 4
I.4 Le pendule simple . . . 4
II Oscillateur amorti en régime libre . . . 5
II.1 Forme canonique et facteur de qualité . . . 5
II.2 Les trois régimes libres . . . 6
II.3 Décrément logarithmique et aspect énergétique . . . 7
III Oscillations forcées et résonance . . . 8
III.1 Régime transitoire et régime établi . . . 8
III.2 Notation complexe . . . 8
III.3 Résonance en élongation . . . 8
III.4 Résonance en vitesse et bande passante . . . 9
IV Analogie électromécanique . . . 11
V Synthèse . . . 11
VI Exercices d'approfondissement . . . 12
VII Classiques des concours . . . 14

# I L'oscillateur harmonique

## I.1 Un modèle universel

Au chapitre M3, on a vu qu'au voisinage d'une position d'équilibre $x_e$, $E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2$ avec $k = E_p''(x_e)$ : la force vaut $-k(x-x_e)$ et le PFD donne $m\ddot{x} = -k(x-x_e)$.

- si $k > 0$ (équilibre **stable**), $x - x_e$ oscille sinusoïdalement ;
- si $k < 0$ (équilibre **instable**), $x - x_e$ est une combinaison d'exponentielles réelles et diverge ;
- si $k = 0$ au second ordre (équilibre **indifférent** à cet ordre, comme une bille sur un plan horizontal), $x$ est affine en $t$.

Tout système faiblement écarté d'un équilibre stable se comporte donc, en première approximation, comme un oscillateur harmonique : c'est ce qui rend ce modèle omniprésent (molécules, circuits, structures, horloges).

**Définition — Oscillateur harmonique** R

Un système à un degré de liberté $x$ est un **oscillateur harmonique** si l'écart $X = x - x_e$ à l'équilibre vérifie

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

$\omega_0$ est la **pulsation propre** (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ : c'est la vitesse de variation d'un angle, la phase) ; période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, fréquence propre $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$.

## I.2 Le système masse–ressort

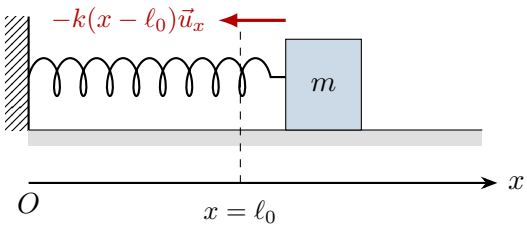



**Fig. 1 :** Oscillateur horizontal sans frottement : la position de la masse est repérée par la longueur $x$ du ressort.

**Équation et solution** R D

Le poids et la réaction se compensent ; le PFD projeté sur $\vec{u}_x$ donne $m\ddot{x} = -k(x-\ell_0)$, soit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Solution générale : $x(t) = \ell_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = \ell_0 + X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Avec $x(0) = \ell_0 + X_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$ :

$$x(t) = \ell_0 + X_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \qquad X_m = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

**Remarque**

- **Isochronisme** : la période $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ ne dépend pas de l'amplitude.
- Une **analyse dimensionnelle** ($T_0 = m^a k^b \ell_0^c$, $[k] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$) donne $T_0 \propto \sqrt{m/k}$ indépendamment de $\ell_0$, mais ne fournit pas le facteur $2\pi$.
- Une force constante (poids pour un ressort vertical, poussée d'Archimède) ne modifie pas $\omega_0$ : elle ne fait que **déplacer la position d'équilibre** (chapitre M3).

## I.3 Aspect énergétique et portrait de phase

**Conservation de l'énergie** R D

Avec $X = x - \ell_0 = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $k = m\omega_0^2$ :

$$E_p = \tfrac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi), \qquad E_c = \tfrac{1}{2}m\dot{X}^2 = \tfrac{1}{2}kX_m^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi), \qquad E_m = \tfrac{1}{2}kX_m^2 = \text{cste}.$$

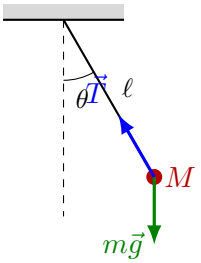
$E_c$ et $E_p$ oscillent à la pulsation $2\omega_0$ et s'échangent ; en moyenne sur une période, $\langle E_c\rangle = \langle E_p\rangle = \dfrac{E_m}{2}$.

Dans le plan de phase $(X, \dot{X}/\omega_0)$, la conservation de l'énergie s'écrit $X^2 + \left(\dot{X}/\omega_0\right)^2 = X_m^2$ : la trajectoire de phase est un **cercle** parcouru dans le sens horaire (une ellipse dans le plan $(X, \dot{X})$).

## I.4 Le pendule simple

Un point $M$ de masse $m$ est suspendu à un fil idéal de longueur $\ell$ ; on le repère par l'angle $\theta$ avec la verticale. Le PFD projeté sur $\vec{u}_\theta$ (chapitre M2) ou la dérivée de l'énergie mécanique (chapitre M3) donnent

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$




Cette équation est **non linéaire**. Pour $|\theta| \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$ et l'on obtient un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

**Remarque**

Pour des amplitudes $\theta_0$ non petites, la période augmente : $T \approx T_0\left(1 + \dfrac{\theta_0^2}{16}\right)$ (formule de Borda). L'écart n'est que de $0{,}2\,\%$ pour $\theta_0 = 10°$, mais atteint $18\,\%$ pour $\theta_0 = 90°$ : l'isochronisme n'est qu'approché (chapitre M3, activité numérique).

### ☞ Exercices d'application

**EXERCICE 1** **Ordres de grandeur** ✦✧✧✧✧

**Q-1)** Calculer la période d'un système masse–ressort ($m = 200\,\mathrm{g}$, $k = 20\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) et d'un pendule simple de $1{,}0\,\mathrm{m}$.

**Q-2)** Comment varie la période si l'on quadruple la masse ? si l'on remplace le ressort par deux ressorts identiques montés en parallèle ? en série ?

**Q-3)** La masse est lancée depuis l'équilibre avec $v_0 = 0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer l'amplitude et l'énergie mécanique.

**Correction**

**Q-1)** $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}63\,\mathrm{s}$ ; $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g} = 2{,}0\,\mathrm{s}$ (le « pendule qui bat la seconde » a une demi-période d'une seconde).

**Q-2)** Masse quadruplée : période doublée. Parallèle ($k \to 2k$, chapitre M2) : période divisée par $\sqrt{2}$ ; série ($k \to k/2$) : multipliée par $\sqrt{2}$.

**Q-3)** $\omega_0 = 10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $X_m = v_0/\omega_0 = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ ; $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = 25\,\mathrm{mJ}$.

## EXERCICE 2 — Mesure de $g$ avec un pendule

Un pendule simple de longueur $\ell = 0{,}750\,\mathrm{m}$ effectue 20 petites oscillations en $34{,}74\,\mathrm{s}$.

**Q-1)** En déduire $g$.

**Q-2)** Pourquoi mesure-t-on la durée de 20 oscillations plutôt que d'une seule ? Estimer l'incertitude sur $g$ si la durée est connue à $0{,}1\,\mathrm{s}$ près et $\ell$ à $2\,\mathrm{mm}$ près.

**Correction**

**Q-1)** $T_0 = 1{,}737\,\mathrm{s}$ et $g = \dfrac{4\pi^2\ell}{T_0^2} = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

**Q-2)** L'erreur de déclenchement du chronomètre est divisée par 20. $\dfrac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 + \left(2\dfrac{\Delta T}{T}\right)^2} = \sqrt{(2{,}7\times10^{-3})^2 + (5{,}8\times10^{-3})^2} \approx 0{,}6\,\%$, soit $g = (9{,}81 \pm 0{,}06)\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

# II Oscillateur amorti en régime libre

## II.1 Forme canonique et facteur de qualité

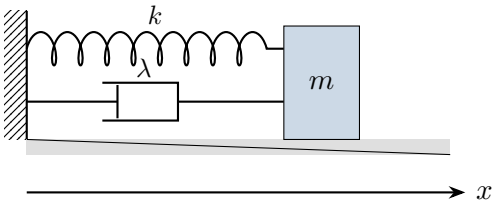



**Fig. 2 :** Oscillateur amorti : ressort de raideur $k$ et amortisseur exerçant un frottement fluide $-\lambda\dot{x}\,\vec{u}_x$.

**Forme canonique** R D

Le PFD donne $m\ddot{X} = -kX - \lambda\dot{X}$ ($X$ : écart à l'équilibre), soit

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$$

$Q$ est le **facteur de qualité**, sans dimension. On rencontre aussi les notations $\dfrac{\omega_0}{Q} = 2\alpha = 2\xi\omega_0$, avec $\alpha$ coefficient d'amortissement et $\xi = \frac{1}{2Q}$ taux d'amortissement.

**Remarque**

$Q$ compare deux temps : $Q = \dfrac{\omega_0}{2}\tau$, où $\tau = \dfrac{2m}{\lambda}$ est le temps d'amortissement de l'amplitude et $1/\omega_0$ le temps caractéristique des oscillations. Pour $Q \to \infty$ (pas de frottement) on retrouve l'oscillateur harmonique. Un faible $Q$ n'est pas un défaut : un amortisseur de voiture est précisément conçu pour ne pas osciller.

## II.2 Les trois régimes libres

L'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$, qui change de signe pour $Q = \frac{1}{2}$.

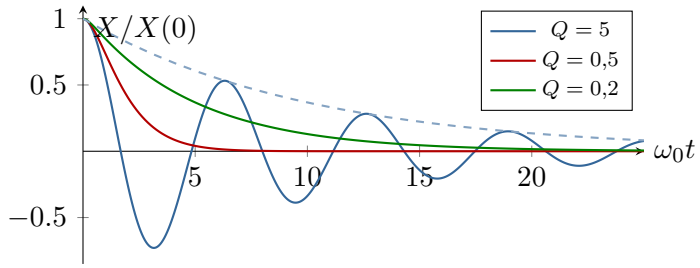
**Régimes libres** R

- $Q < \frac{1}{2}$ : régime **apériodique** : $X = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}$, avec $r_{1,2} = \dfrac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) < 0$ ; la racine la plus proche de $0$ impose la durée du retour à l'équilibre, qui s'allonge quand $Q$ diminue.
- $Q = \frac{1}{2}$ : régime **critique** : $X = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$ ; c'est le retour à l'équilibre le plus rapide sans oscillation.
- $Q > \frac{1}{2}$ : régime **pseudo-périodique** :

$$X = X_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi), \qquad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}, \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ est légèrement supérieure à $T_0$ ($3\,\%$ d'écart seulement pour $Q = 2$).

Les constantes sont fixées par les conditions initiales $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.



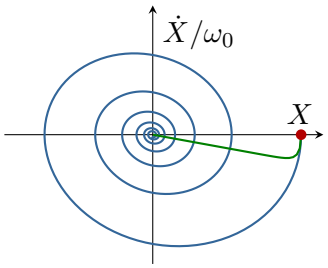




**Fig. 3 :** Réponse libre pour $X(0) \neq 0$, $\dot{X}(0) = 0$ : pseudo-périodique ($Q = 5$), critique et apériodique ; à droite, portraits de phase correspondants : spirale convergeant vers l'équilibre (foyer) pour $Q = 5$, courbe sans enroulement pour $Q = 0{,}2$.

**Remarque**

Si un léger dépassement de la position finale est toléré (appareils de mesure à aiguille, asservissements), le retour à $5\,\%$ près de l'équilibre est le plus rapide pour $Q \approx 0{,}7$, et non pour le régime critique. L'absence d'oscillation ne signifie pas non plus monotonie : avec une vitesse initiale, un régime apériodique peut dépasser une fois l'équilibre.

## II.3 Décrément logarithmique et aspect énergétique

**Définition — Décrément logarithmique** R

En régime pseudo-périodique, $X(t+T) = \mathrm{e}^{-T/\tau} X(t)$ aux mêmes phases. On définit

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X(t)}{X(t+nT)} = \frac{T}{\tau} \approx \frac{\pi}{Q} \quad (Q \gg 1)$$

**Interprétation énergétique de $Q$** R D

$\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(-\lambda \dot{X}\,\vec{u}_x) = -\lambda \dot{X}^2 \leq 0$ : l'énergie mécanique décroît. Pour $Q \gg 1$, $E_m \approx \frac{1}{2} k X_0^2\, \mathrm{e}^{-2t/\tau}$ ; sur une pseudo-période, $\dfrac{|\Delta E_m|}{E_m} \approx \dfrac{2T}{\tau} = \dfrac{2\pi}{Q}$, d'où

$$Q \approx 2\pi \, \frac{\text{énergie de l'oscillateur}}{\text{énergie dissipée pendant une pseudo-période}}$$

Pratiquement, le nombre d'oscillations visibles avant l'arrêt est de l'ordre de $Q$.

**Ordres de grandeur**

Amortisseur de voiture : $Q \approx 0{,}5$ ; pendule de laboratoire : $Q \sim 10^2$ ; diapason : $Q \sim 10^3$ ; quartz de montre : $Q \sim 10^5$ ; cavités optiques et supraconductrices : jusqu'à $10^{10}$.

**Remarque**

Avec un frottement **solide** (lois de Coulomb, chapitre M2), l'amplitude décroît **linéairement** (de $4fmg/k$ par période), la pseudo-période reste égale à $T_0$ et le mouvement s'arrête en un nombre fini d'oscillations. Cette décroissance linéaire permet de distinguer expérimentalement les deux types d'amortissement (exercice d'approfondissement).

### ☞ Exercices d'application

**EXERCICE 3** — **Suspension de voiture** ✦✧✧✧✧

Une voiture de masse $m = 1000\,\mathrm{kg}$ repose sur quatre ressorts équivalents à un ressort unique de raideur $k$ ; lorsqu'on la charge de $100\,\mathrm{kg}$, elle s'enfonce de $2{,}0\,\mathrm{cm}$.

**Q-1)** Calculer $k$ et la période propre des oscillations verticales sans amortisseur.

**Q-2)** Quel coefficient $\lambda$ faut-il pour obtenir le régime critique ? Pourquoi viser ce régime ?

**Correction**

**Q-1)** $k = \dfrac{100 \times 9{,}81}{0{,}020} = 4{,}9 \times 10^4\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ ; $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}90\,\mathrm{s}$.

**Q-2)** $Q = \frac{1}{2} \iff \lambda = 2\sqrt{km} = 1{,}4 \times 10^4\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$ : retour le plus rapide à l'équilibre sans oscillation après un dos-d'âne (confort et adhérence).

**EXERCICE 4** **Lecture d'un enregistrement** ✦✦✧✧✧

L'enregistrement de $x(t)$ pour un oscillateur amorti lâché sans vitesse donne $x(0) = 3{,}0\,\text{cm}$ et, une pseudo-période $T = 315\,\text{ms}$ plus tard, $x(T) = 1{,}6\,\text{cm}$.

**Q-1)** Calculer le décrément logarithmique, le temps $\tau$ et une estimation de $Q$.

**Q-2)** Sur un autre oscillateur, l'amplitude est divisée par 2 en 10 pseudo-périodes. Estimer $Q$.

**Correction**

**Q-1)** $\delta = \ln\dfrac{3{,}0}{1{,}6} = 0{,}63$ ; $\tau = T/\delta = 0{,}50\,\text{s}$ ; $Q \approx \pi/\delta \approx 5$ (on vérifie $Q = \omega_0\tau/2 \approx \frac{2\pi}{0{,}315} \times \frac{0{,}50}{2} = 5{,}0$).

**Q-2)** $\delta = \dfrac{\ln 2}{10} = 0{,}069$, $Q \approx \pi/\delta \approx 45$.

# III Oscillations forcées et résonance

## III.1 Régime transitoire et régime établi

On soumet l'oscillateur à une force excitatrice sinusoïdale $F(t) = F_0\cos\omega t$ (directement appliquée à la masse, ou par l'intermédiaire de l'extrémité mobile du ressort, $x_A = a\cos\omega t$, ce qui revient à $F_0 = ka$) :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

La solution est la somme de la solution générale de l'équation homogène, qui s'amortit en quelques $\tau = 2Q/\omega_0$ (**régime transitoire**), et d'une solution particulière sinusoïdale **à la pulsation de l'excitateur** (**régime sinusoïdal forcé** ou établi) : $X(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$.

## III.2 Notation complexe

**☞ Méthode — Utiliser les amplitudes complexes** M

À $X(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$ on associe $\underline{X}(t) = \underline{X}_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{X}_m = X_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, de sorte que $X = \mathrm{Re}(\underline{X})$, $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg\underline{X}_m$. Dériver revient à **multiplier par** $\mathrm{j}\omega$, et une équation différentielle linéaire devient une équation **algébrique** :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)\underline{X}_m = \frac{F_0}{m}.$$

Pour calculer un argument, on évite $\arctan$ lorsque la partie réelle du dénominateur peut être négative : on raisonne sur le signe de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.

## III.3 Résonance en élongation

En posant $u = \omega/\omega_0$ :

$$\underline{X}_m = \frac{F_0/k}{1 - u^2 + \mathrm{j}\,u/Q}, \qquad X_m(u) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}}$$

### Résonance en élongation R D

$X_m$ est maximale si $f(u) = (1-u^2)^2 + u^2/Q^2$ est minimale ; $f'(u) = 2u\left[2(u^2-1) + 1/Q^2\right]$ s'annule pour $u > 0$ si et seulement si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a alors **résonance** à

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

Pour $Q \gg 1$ : $\omega_r \approx \omega_0$ (moins de $1\,\%$ d'écart dès $Q > 5$) et $X_{m,\max} \approx Q\,F_0/k$. Le déphasage $\varphi$ de $X$ par rapport à la force passe de $0$ (basses fréquences) à $-\pi$ (hautes fréquences) et vaut $-\pi/2$ en $\omega = \omega_0$.

**✗ Attention, erreurs fréquentes**

Ne pas confondre le seuil $Q = \frac{1}{2}$ (nature du régime **transitoire**) et le seuil $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (existence de la résonance en **élongation** en régime forcé).

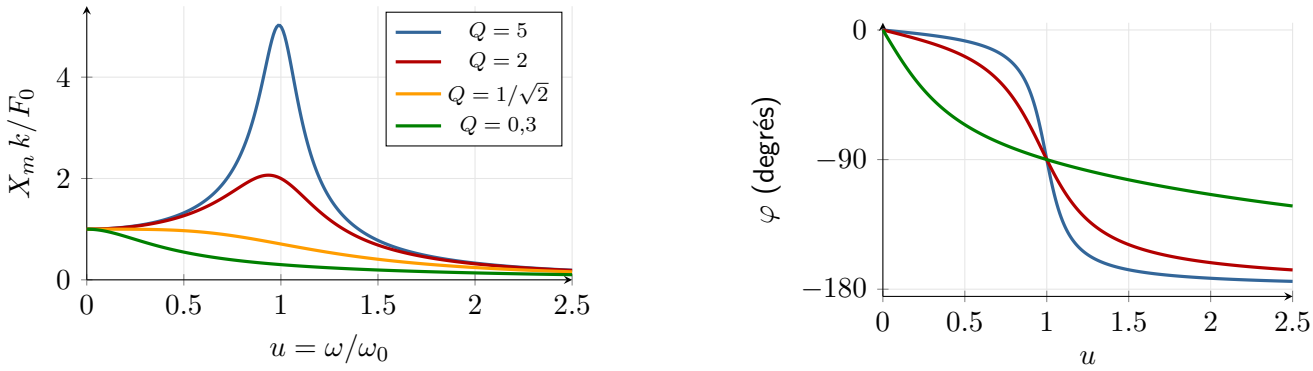



**Fig. 4 :** Amplitude et déphasage de l'élongation en régime forcé. La résonance n'existe que pour $Q > 1/\sqrt{2}$ ; elle est d'autant plus aiguë que $Q$ est grand.

## III.4 Résonance en vitesse et bande passante

### Résonance en vitesse R D

L'amplitude complexe de la vitesse est $\underline{V}_m = \mathrm{j}\omega\,\underline{X}_m$, soit

$$\underline{V}_m = \frac{F_0/\lambda}{1 + \mathrm{j}Q\left(u - \dfrac{1}{u}\right)}$$

Son module est maximal pour $u = 1$ **quel que soit** $Q$ : la résonance en vitesse a toujours lieu à $\omega = \omega_0$, avec $V_{m,\max} = F_0/\lambda$ et une vitesse en phase avec la force. La **bande passante** à $-3\,\mathrm{dB}$ (où $V_m > V_{m,\max}/\sqrt{2}$) vaut exactement

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

*Démonstration :* $V_m = V_{m,\max}/\sqrt{2} \iff Q\left(u - \frac{1}{u}\right) = \pm 1 \iff u^2 \mp \frac{u}{Q} - 1 = 0$, dont les racines positives vérifient $u_2 - u_1 = \frac{1}{Q}$.

**Bilan énergétique en régime forcé** R

La puissance moyenne fournie par l'excitateur, $\langle F\dot{X}\rangle = \frac{1}{2}F_0 V_m \cos\varphi_v$, est égale à la puissance moyenne dissipée par frottement, $\langle \lambda \dot{X}^2\rangle = \frac{1}{2}\lambda V_m^2$. Elle est maximale à la résonance de vitesse, et la courbe $\langle \mathcal{P}\rangle(\omega)$ a une largeur à mi-hauteur $\Delta\omega = \omega_0/Q$. Avec $\tau = 2Q/\omega_0$ : $\Delta\omega \cdot \tau = 2$ : plus la résonance est fine, plus le régime transitoire est long.

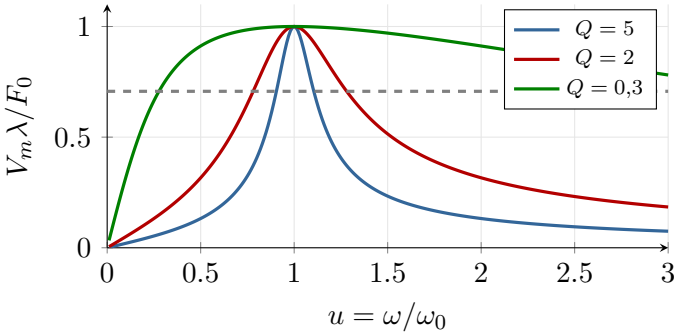



**Fig. 5 :** Résonance en vitesse : toujours en $\omega_0$ ; la bande passante, lue à $1/\sqrt{2}$ du maximum, vaut $\omega_0/Q$.

**Méthode — Mesurer un facteur de qualité** M

- En régime libre : décrément logarithmique $\delta \approx \pi/Q$, ou nombre d'oscillations visibles $\approx Q$.
- En régime forcé : $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$, mesuré sur la résonance en **vitesse** (relation exacte), ou sur celle en élongation si $Q \gg 1$.

## Exercices d'application

### EXERCICE 5 — Facteur de qualité par la bande passante

★★☆☆☆

Un oscillateur forcé présente une résonance en vitesse à $f_0 = 12{,}0\,\text{Hz}$ ; l'amplitude de la vitesse est divisée par $\sqrt{2}$ pour $f_1 = 11{,}4\,\text{Hz}$ et $f_2 = 12{,}6\,\text{Hz}$.

**Q-1)** Calculer $Q$.

**Q-2)** La résonance en élongation existe-t-elle ? À quelle fréquence ? Quelle est la durée caractéristique du régime transitoire ?

**Correction**

**Q-1)** $Q = \dfrac{f_0}{f_2 - f_1} = 10.$

**Q-2)** $Q > 1/\sqrt{2}$ : oui, à $f_r = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{200}} = 11{,}97\,\text{Hz}$, quasiment confondue avec $f_0$. $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{Q}{\pi f_0} = 0{,}27\,\text{s}.$

### EXERCICE 6 Excitation par l'extrémité du ressort ✦✦✧✧✧

L'extrémité $A$ du ressort d'un oscillateur amorti $(m,\ k,\ \lambda)$ est animée du mouvement $x_A = a\cos\omega t$.

**Q-1)** Établir l'équation du mouvement de l'écart $X$ à l'équilibre et l'amplitude $X_m(\omega)$.

**Q-2)** Quelle est la limite de $X_m$ à basse fréquence ? Interpréter.

**Correction**

**Q-1)** La force du ressort vaut $-k(X - x_A)$ : $m\ddot{X} + \lambda\dot{X} + kX = ka\cos\omega t$ ; c'est le cas $F_0 = ka$ : $X_m = \dfrac{a}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}}$.

**Q-2)** $X_m \to a$ : à basse fréquence, la masse suit l'extrémité du ressort sans retard, le ressort restant à sa longueur d'équilibre.

## IV Analogie électromécanique

L'oscillateur mécanique et le circuit $RLC$ série (chapitres E3 et E4) obéissent à la même équation : $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$ et $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$.

| | **Oscillateur mécanique** | **Circuit $RLC$ série** |
|---|---|---|
| Variable / dérivée | $x$ / $v = \dot{x}$ | $q$ / $i = \dot{q}$ |
| Inertie | $m$ | $L$ |
| Rappel | $k$ | $1/C$ |
| Dissipation | $\lambda$ | $R$ |
| Excitation | $F(t)$ | $e(t)$ |
| Énergies | $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ; $\frac{1}{2}kx^2$ | $\frac{1}{2}Li^2$ ; $\frac{q^2}{2C}$ |
| $\omega_0$ ; $Q$ | $\sqrt{k/m}$ ; $\sqrt{km}/\lambda$ | $1/\sqrt{LC}$ ; $\frac{1}{R}\sqrt{L/C}$ |
| Résonance en… | élongation ($Q > 1/\sqrt{2}$) / vitesse (en $\omega_0$) | tension $u_C$ / intensité (en $\omega_0$) |

## V Synthèse

**★ À retenir**

- Harmonique : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ ; $X = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ; isochronisme ; $\langle E_c\rangle = \langle E_p\rangle = E_m/2$ ; phase : cercle.
- Masse–ressort : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ; pendule simple (petits angles) : $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.
- Amorti : $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$, $Q = \sqrt{km}/\lambda$ ; apériodique ($Q < \frac{1}{2}$), critique, pseudo-périodique ($Q > \frac{1}{2}$) avec $\tau = 2Q/\omega_0$, $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$.
- $\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{X(t)}{X(t+nT)} \approx \frac{\pi}{Q}$ ; $Q \approx 2\pi\, E_m/|\Delta E_m|$ par période.
- Forcé : complexes ; élongation $X_m = \dfrac{F_0/k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}}$, résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.
- Vitesse : résonance toujours en $\omega_0$, $\Delta\omega = \omega_0/Q$, $\Delta\omega\cdot\tau = 2$.

# VI Exercices d'approfondissement

## EXERCICE 7 Le train qui traverse la Terre

★★★☆☆

On creuse un tunnel rectiligne passant par le centre de la Terre (supposée homogène, de rayon $R = 6400\,\mathrm{km}$). On admet qu'à l'intérieur, un objet à la distance $r$ du centre subit la force $-mg\dfrac{r}{R}\vec{u}_r$. On néglige les frottements.

**Q-1)** Montrer qu'un objet lâché sans vitesse à l'entrée du tunnel a un mouvement harmonique. Calculer la durée de la traversée.

**Q-2)** Calculer la vitesse au centre. La comparer à la vitesse d'un satellite en orbite rasante.

**Q-3)** Montrer que la durée est la même pour un tunnel rectiligne qui ne passe pas par le centre.

**Correction**

**Q-1)** $m\ddot{x} = -\dfrac{mg}{R}x$ : $\omega_0 = \sqrt{g/R}$, $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g} = 84\,\mathrm{min}$ ; la traversée dure $T_0/2 = 42\,\mathrm{min}$.

**Q-2)** $v_{\max} = \omega_0 R = \sqrt{gR} = 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ : c'est la vitesse d'un satellite en orbite rasante, de période $84\,\mathrm{min}$ également (la projection d'un mouvement circulaire uniforme est sinusoïdale).

**Q-3)** Le long d'une corde, la composante tangentielle de la force vaut $-\dfrac{mg}{R}s$, où $s$ est l'abscisse comptée depuis le milieu de la corde ; la réaction du tunnel compense la composante normale : même pulsation, même durée.

## EXERCICE 8 Amortissement par frottement solide

★★★☆☆

Une masse $m = 200\,\mathrm{g}$, liée à un ressort horizontal ($k = 20\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$), glisse sur un support avec un coefficient de frottement $f = 0{,}10$ (statique et dynamique). On l'écarte de $X_0 = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ de la position où le ressort est au repos et on la lâche.

**Q-1)** Montrer que, pendant chaque demi-oscillation, le mouvement est harmonique autour d'une position décalée de $\pm x_f$ avec $x_f = \dfrac{fmg}{k}$.

**Q-2)** Calculer la diminution d'amplitude par demi-période et le nombre de demi-oscillations avant l'arrêt. Où s'arrête la masse ?

**Correction**

**Q-1)** Pendant une demi-oscillation, la vitesse garde un signe constant, donc le frottement aussi : $m\ddot{x} = -kx \pm fmg$, oscillation harmonique de pulsation $\omega_0$ autour de $\pm x_f$, avec $x_f = 0{,}98\,\mathrm{cm}$.

**Q-2)** Chaque demi-oscillation est symétrique autour du centre décalé : l'amplitude diminue de $2x_f = 1{,}96\,\mathrm{cm}$. Positions extrêmes successives : $10{,}0$ ; $-8{,}0$ ; $6{,}1$ ; $-4{,}1$ ; $2{,}2$ ; $-0{,}2\,\mathrm{cm}$. Au dernier arrêt, $|x| < x_f$ : la force de rappel ne vaut plus que $k|x| < fmg$, la masse reste immobile, à $0{,}2\,\mathrm{cm}$ de la position de repos, après 5 demi-oscillations, soit $\frac{5}{2}T_0 = 1{,}6\,\mathrm{s}$.

## EXERCICE 9 Masse immergée excitée par son support

★★★☆☆

Une masse $M$ de volume $V$ est suspendue dans l'eau à un ressort $(k,\,\ell_0)$ dont l'extrémité supérieure $A$ est fixe, puis animée du mouvement vertical $z_A = Z\cos\omega t$. L'eau exerce la poussée d'Archimède $\Pi$ et un frottement $-\alpha\vec{v}$. Axe $(Oz)$ descendant ; à l'équilibre ($A$ fixe), la masse est à la cote $h$.

**Q-1)** Écrire la condition d'équilibre. Montrer que la pulsation propre ne dépend pas de $\Pi$.

**Q-2)** Établir l'équation vérifiée par $y = z - h$ quand $A$ bouge, et l'amplitude $Y_m(\omega)$ en régime forcé.

**Q-3)** Montrer que l'on peut obtenir $Y_m > Z$ sur un intervalle de pulsations, à condition que $M > \dfrac{\alpha^2}{2k}$.

**Q-4)** A.N. : $M = 2{,}0\,\text{kg}$, $k = 50\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, $\alpha = 4{,}0\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer $\omega_0$, $Q$, la pulsation de résonance et l'amplification maximale $Y_{m,\max}/Z$.

**Correction**

**Q-1)** $Mg = \Pi + k(h-\ell_0)$. Le PFD donne $M\ddot{z} = Mg - \Pi - k(z - z_A - \ell_0) - \alpha\dot{z}$ : les forces constantes ne font que fixer $h$, et $\omega_0 = \sqrt{k/M}$.

**Q-2)** $\ddot{y} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 Z\cos\omega t$ avec $Q = \dfrac{\sqrt{kM}}{\alpha}$ ; $Y_m = \dfrac{Z}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}}$.

**Q-3)** $Y_m > Z \iff (1-u^2)^2 + \dfrac{u^2}{Q^2} < 1 \iff u^2 < 2 - \dfrac{1}{Q^2}$, possible si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $kM > \dfrac{\alpha^2}{2}$ : $M > \dfrac{\alpha^2}{2k}$.

**Q-4)** $\omega_0 = 5{,}0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $Q = 2{,}5$ ; $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 4{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ; $\dfrac{Y_{m,\max}}{Z} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-u_r^2)^2 + u_r^2/Q^2}} = 2{,}6$ ; amplification au-dessus de 1 jusqu'à $\omega_1 = \omega_0\sqrt{2 - 1/Q^2} = 6{,}8\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

## EXERCICE 10 Gravimètre à ressort

★★★☆☆

Une masse $m$ est suspendue à un ressort vertical de raideur $k$. On mesure l'allongement à l'équilibre $\Delta\ell$ et la période $T_0$ des petites oscillations.

**Q-1)** Montrer que $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Delta\ell}{g}}$ : l'appareil mesure $g$.

**Q-2)** Quelle précision relative sur $T_0$ faut-il pour détecter une variation $\dfrac{\Delta g}{g} = 10^{-6}$ (prospection géophysique) ? Pourquoi préfère-t-on des montages de très grande période ?

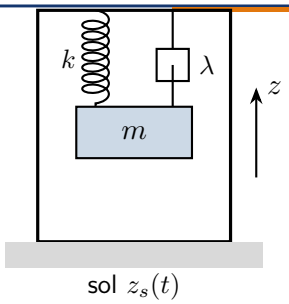
**Correction**

**Q-1)** À l'équilibre $k\Delta\ell = mg$, d'où $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{\Delta\ell}$.

**Q-2)** À $\Delta\ell$ fixé, $\dfrac{\Delta T_0}{T_0} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g} = 5\times10^{-7}$. La sensibilité $\dfrac{\mathrm{d}(\Delta\ell)}{\mathrm{d}g} = \dfrac{m}{k} = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2}$ croît comme $T_0^2$ : un montage « astatique » de très grande période amplifie les variations d'allongement, mesurées directement.

# VII Classiques des concours

## EXERCICE 11 Sismomètre et accéléromètre




Un boîtier, solidaire du sol, a un mouvement vertical $z_s(t)$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Une masse $m$ y est suspendue par un ressort $(k)$ et un amortisseur $(\lambda)$. On note $X$ l'écart de la position de la masse **par rapport au boîtier** à sa position d'équilibre.

**Q-1)** Montrer que $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -\ddot{z}_s$.

**Q-2)** Le sol vibre sinusoïdalement : $z_s = Z_s \cos \omega t$. Établir $\underline{H} = \underline{X}_m / \underline{Z}_s$. Quelle est la nature de ce filtre ?

**Q-3)** **Sismomètre** : dans quel domaine de fréquences a-t-on $X \approx -z_s$ ? Faut-il une fréquence propre faible ou élevée ?

**Q-4)** **Accéléromètre** : montrer que pour $\omega \ll \omega_0$, $X \approx -\ddot{z}_s/\omega_0^2$. Quelle valeur de $Q$ choisir pour une mesure fidèle sur la bande la plus large ?

**Correction**

**Q-1)** Dans le référentiel terrestre, la cote de la masse est $z_s + X$+cste ; le PFD (poids compensé à l'équilibre) donne $m(\ddot{z}_s + \ddot{X}) = -kX - \lambda\dot{X}$, d'où le résultat avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $Q = \sqrt{km}/\lambda$.

**Q-2)** En complexes, $\left(1 - u^2 + \mathrm{j}\frac{u}{Q}\right)\underline{X}_m = u^2 \underline{Z}_s$ : $\underline{H} = \dfrac{u^2}{1 - u^2 + \mathrm{j}u/Q}$, passe-haut du second ordre.

**Q-3)** Pour $\omega \gg \omega_0$, $\underline{H} \to -1$ : $X \approx -z_s$, la masse reste immobile dans le référentiel terrestre et le boîtier bouge autour d'elle. Il faut une fréquence propre très **basse** (sismomètres longue période, $T_0$ de quelques secondes à $100\,\mathrm{s}$).

**Q-4)** Pour $u \ll 1$ : $\underline{X}_m \approx u^2 \underline{Z}_s = -\dfrac{(\mathrm{j}\omega)^2 \underline{Z}_s}{\omega_0^2}$, soit $X \approx -\ddot{z}_s/\omega_0^2$ : la mesure de $X$ donne l'accélération, d'autant mieux que $\omega_0$ est **élevée**. On choisit $Q \approx 1/\sqrt{2}$, qui rend le gain le plus plat possible (pas de résonance).

## EXERCICE 12 Suspension d'un véhicule sur une route ondulée

On modélise la suspension d'une roue par une masse $m = 300\,\mathrm{kg}$ (quart du véhicule) reliée à la roue par un ressort de raideur $k = 3{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et un amortisseur exerçant la force $-h(\dot{z} - \dot{z}_s)$, où $z$ est la cote de la caisse (comptée depuis l'équilibre) et $z_s$ celle de la roue, qui suit le profil de la route $z_s = A\cos\dfrac{2\pi x}{L}$, de période spatiale $L = 5{,}0\,\mathrm{m}$. Le véhicule roule à vitesse constante $V$.

**Q-1)** Montrer que la roue impose une excitation sinusoïdale de pulsation $\omega = 2\pi V/L$.

**Q-2)** Établir l'équation différentielle vérifiée par $z$ en faisant apparaître $\omega_0$ et $Q$.

**Q-3)** En régime établi, montrer que $\dfrac{\underline{Z}}{A} = \dfrac{1 + \mathrm{j}u/Q}{1 - u^2 + \mathrm{j}u/Q}$.

**Q-4)** Calculer la vitesse pour laquelle $u = 1$, et l'amplitude du mouvement de la caisse pour $Q = 1$ et $Q = 0{,}5$.

**Q-5)** Même question à $90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Commenter le rôle de filtre de la suspension et le choix de $Q$.

**Correction**

**Q-1)** $x = Vt$ donc $z_s = A\cos\omega t$ avec $\omega = \dfrac{2\pi V}{L}$.

**Q-2)** $m\ddot{z} = -k(z-z_s) - h(\dot{z}-\dot{z}_s)$, soit $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_s + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z}_s$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $Q = \sqrt{km}/h$.

**Q-3)** En complexes : $\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)\underline{Z} = \left(\omega_0^2 + \mathrm{j}\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)A$ ; on divise par $\omega_0^2$.

**Q-4)** $V = \dfrac{L\omega_0}{2\pi} = 8{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $(29\,\mathrm{km\cdot h^{-1}})$ ; $\dfrac{Z}{A} = \sqrt{1+Q^2}$ : $1{,}41$ pour $Q = 1$, $1{,}12$ pour $Q = 0{,}5$.

**Q-5)** $u = 3{,}14$ : $\dfrac{Z}{A} = 0{,}35$ $(Q = 1)$ et $0{,}59$ $(Q = 0{,}5)$. À grande vitesse, la suspension filtre les ondulations rapides (comportement passe-bas). Un amortissement faible filtre mieux en haute fréquence mais amplifie près de la résonance : on retient un compromis $Q \approx 0{,}5$ à $0{,}7$. Un amortisseur usé ($Q$ élevé) provoque de fortes oscillations à la résonance et peut faire décoller la roue.