LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

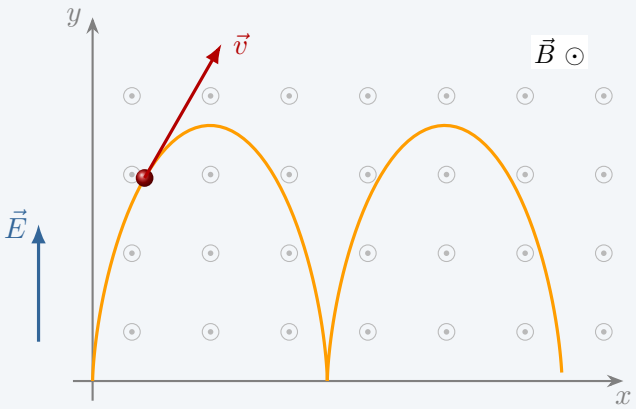
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M4

MÉCANIQUE

Mouvement de particules chargées

Force de Lorentz — Champ électrique uniforme : accélération et déviation — Limite newtonienne — Champ magnétique uniforme : mouvement cyclotron



« *Ce que nous connaissons est peu de chose, ce que nous ignorons est immense.*

— Pierre-Simon de Laplace, dernières paroles rapportées par Joseph Fourier (1829)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Particule chargée dans E et B »

M4 — Particules chargées

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Utiliser le produit vectoriel ; exprimer la force de Lorentz et justifier que le poids est négligeable.
- Établir la puissance de la force de Lorentz : seul le champ électrique modifie l'énergie cinétique.
- Étudier le mouvement dans un champ électrique uniforme : accélération par une tension, déviation.
- Connaître les limites de la mécanique newtonienne ; utiliser $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ et $p = \gamma mv$ fournies.
- Établir le mouvement circulaire uniforme dans un champ magnétique uniforme ; rayon et pulsation cyclotron.
- Analyser des dispositifs : canon à électrons, oscilloscope, spectromètre de masse, cyclotron, filtre de Wien.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Particule chargée dans E et B » permet de régler $\vec{E}$, $\vec{B}$, la charge et la vitesse initiale, et d'observer droites, paraboles, cercles, hélices et cycloïdes.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I La force de Lorentz . . . 3
I.1 Préambule : le produit vectoriel . . . 3
I.2 Expression de la force de Lorentz . . . 3
I.3 Le poids est négligeable . . . 4
I.4 Puissance et énergie potentielle . . . 4
II Mouvement dans un champ électrique uniforme . . . 5
II.1 Réalisation d'un champ uniforme . . . 5
II.2 Une accélération constante . . . 5
II.3 Accélération par une différence de potentiel . . . 5
II.4 Limite de la mécanique newtonienne . . . 6
II.5 Déviation électrostatique . . . 6
III Mouvement dans un champ magnétique uniforme . . . 8
III.1 Analyse qualitative . . . 8
III.2 Mouvement cyclotron . . . 8
III.3 Cas général : trajectoire hélicoïdale . . . 9
III.4 Applications . . . 10
IV Synthèse . . . 11
V Exercices d'approfondissement . . . 11
VI Classiques des concours . . . 13

I La force de Lorentz

I.1 Préambule : le produit vectoriel

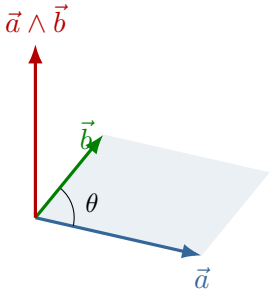
Définition — Produit vectoriel R

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ faisant l'angle θ est le vecteur $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$:

- **orthogonal** à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$;
- de **sens** tel que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ soit direct (règle de la main droite : pouce selon $\vec{a}$, index selon $\vec{b}$, majeur selon $\vec{c}$) ;
- de **norme** $\|\vec{c}\| = ab\,|\sin\theta|$.

Propriétés : $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$ (antisymétrie) ; $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ si les vecteurs sont colinéaires ; linéarité par rapport à chaque vecteur. Dans une base orthonormée directe, $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$, $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$, $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$ (permutation circulaire), de même pour $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. En coordonnées :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$



I.2 Expression de la force de Lorentz

Définition — Force de Lorentz R

Une particule de charge q, de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude, placée en un point où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, subit

$$\vec{F} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

q en coulombs (C), $\vec{E}$ en volts par mètre ($\mathrm{V \cdot m^{-1}}$), $\vec{B}$ en teslas (T).

Dans tout le chapitre, les champs sont **uniformes** (indépendants du point) et **stationnaires** (indépendants du temps). Ils sont créés par des « charges sources » (électrodes, aimants, bobines) ; la particule étudiée est une « charge test » qui ne les modifie pas. La force de Coulomb du chapitre M2 est un cas particulier : une charge q_1 fixe en O crée le champ $\vec{E} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$.

Ordres de grandeur

Champ électrique : atmosphère par beau temps $100\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$; claquage de l'air $3 \times 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Champ magnétique : terrestre $5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$; aimant permanent $0{,}1$ à $1\,\mathrm{T}$; IRM $1{,}5$ à $3\,\mathrm{T}$; aimants supraconducteurs du LHC $8\,\mathrm{T}$. Particules : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

I.3 Le poids est négligeable

Situation	qE	qvB	mg
ion N_2^+ à $100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans l'atmosphère	$2\times10^{-17}\,\mathrm{N}$	$8\times10^{-22}\,\mathrm{N}$	$5\times10^{-25}\,\mathrm{N}$
proton du vent solaire à $10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ près de la Terre	$2\times10^{-17}\,\mathrm{N}$	$8\times10^{-18}\,\mathrm{N}$	$2\times10^{-26}\,\mathrm{N}$
électron à $c/10$ dans $0{,}1\,\mathrm{T}$ (et $10^5\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$)	$2\times10^{-14}\,\mathrm{N}$	$5\times10^{-13}\,\mathrm{N}$	$9\times10^{-30}\,\mathrm{N}$

Approximation R

Pour une particule élémentaire (électron, proton, ion), le poids est négligeable devant la force électromagnétique, d'au moins une dizaine d'ordres de grandeur. Selon les situations, les parties électrique et magnétique peuvent être d'ordres de grandeur très différents ou comparables.

I.4 Puissance et énergie potentielle

Puissance de la force de Lorentz R D

$$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{E}\cdot\vec{v} + q\,(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v} = q\,\vec{E}\cdot\vec{v}$$

car $\vec{v}\wedge\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{v}$. La force magnétique **ne travaille pas** : un champ magnétique peut **courber** la trajectoire mais pas modifier la norme de la vitesse. Seul le champ électrique peut accélérer ou freiner une particule.

Définition — Potentiel et énergie potentielle électrostatiques

Le champ électrostatique dérive d'un **potentiel** V (en volts) : $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$. La force électrique $q\vec{E}$ est alors conservative, d'énergie potentielle

$$E_p = qV$$

Pour un champ uniforme $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$, $V(x) = -Ex + \text{cste}$: le champ est dirigé vers les **potentiels décroissants**.

Définition — Électron-volt R

L'électron-volt est l'énergie acquise par une charge e accélérée sous une tension de $1\,\mathrm{V}$: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Sens de la force magnétique ✦✧✧✧✧

Un électron a la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ dans le champ $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$.

Q-1) Donner la direction et le sens de la force magnétique. Même question pour un proton.

Q-2) Quel champ électrique faut-il superposer pour que l'électron ne soit pas dévié ? A.N. : $v = 2{,}0\times10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $B = 0{,}050\,\mathrm{T}$.

Correction

Q-1) $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y$: pour l'électron, $\vec{F} = -e\,vB\,(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = +evB\,\vec{u}_y$; pour le proton, $\vec{F} = -evB\,\vec{u}_y$.

Q-2) Il faut $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$, soit $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} = vB\,\vec{u}_y$, de norme $E = vB = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, **indépendant de la charge** : c'est le principe du filtre de Wien (§ III.4).

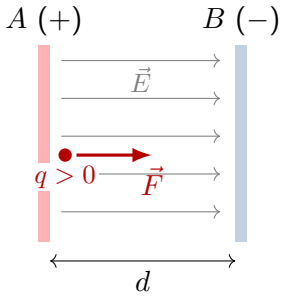
II Mouvement dans un champ électrique uniforme

II.1 Réalisation d'un champ uniforme

Entre deux plaques conductrices planes et parallèles (électrodes), distantes de d petite devant leurs dimensions et soumises à la tension $U = V_A - V_B > 0$, règne un champ **uniforme** dirigé de A vers B, de norme

$$E = \frac{U}{d}$$

En effet $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = Ed$.



II.2 Une accélération constante

Mouvement dans $\vec{E}$ uniforme R D

Le PFD (poids négligé) donne $m\vec{a} = q\vec{E}$: l'accélération $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\vec{E}$ est **constante**. L'étude est identique à celle de la chute libre (chapitre M2) en remplaçant $\vec{g}$ par $q\vec{E}/m$:

$$\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}\,t + \vec{v}_0, \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{q}{2m}\vec{E}\,t^2 + \vec{v}_0\,t.$$

La trajectoire est une **droite** si $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{E}$ (ou nulle), une **parabole** sinon.

Ordres de grandeur

Un proton initialement au repos dans un champ de $30\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$ pendant $1\,\mathrm{ns}$ atteint $v = \frac{eE}{m}\Delta t \approx 3 \times 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; un électron, 1800 fois plus léger, atteint $5 \times 10^6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ dans les mêmes conditions.

II.3 Accélération par une différence de potentiel

Vitesse acquise sous une tension U R D

Une particule de charge q, partant de A sans vitesse, accélérée jusqu'en B : le TEC donne $\frac{1}{2}mv_B^2 = W_{A\to B} = q(V_A - V_B) = qU$, soit

$$v_B = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Il faut $qU > 0$: une charge positive va des potentiels élevés vers les potentiels bas, une charge négative l'inverse. Le résultat ne dépend pas de la forme du champ, seulement de la tension.

II.4 Limite de la mécanique newtonienne

Pour un électron accéléré sous $U = 100\,\mathrm{kV}$, la formule précédente donne $v = 1{,}9 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, proche de c : la mécanique newtonienne atteint sa limite. En relativité restreinte, on admet :

Expressions relativistes (fournies) R

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2, \qquad \vec{p} = \gamma m\vec{v}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Le PFD s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$ et le TEC reste valable avec cette énergie cinétique.

Avec $E_c = eU$: $\gamma = 1 + \dfrac{eU}{mc^2} = 1{,}196$ et $v = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 1{,}64 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, soit $12\,\%$ de moins que le calcul newtonien. Dans un champ constant, $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = qE$ donne $p = qEt$ puis

$$v(t) = \frac{qEct}{\sqrt{m^2c^2 + q^2E^2t^2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} c,$$

alors que la vitesse newtonienne croît indéfiniment.

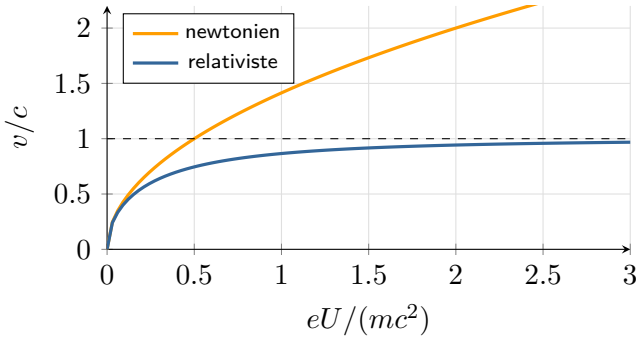


Fig. 1 : Vitesse acquise sous la tension U : la mécanique newtonienne n'est valable que si $E_c \ll mc^2$ ($mc^2 = 511\,\mathrm{keV}$ pour l'électron, $938\,\mathrm{MeV}$ pour le proton).

II.5 Déviation électrostatique

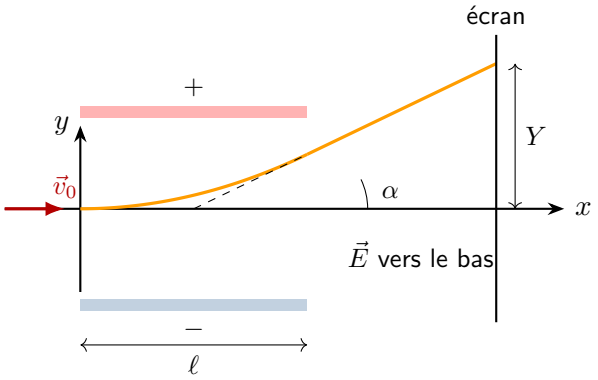


Fig. 2 : Déviation d'un électron entre deux plaques : trajectoire parabolique, puis rectiligne. La droite de sortie semble issue du milieu des plaques.

Un électron entre en O avec la vitesse $v_0\vec{u}_x$ entre deux plaques de longueur ℓ. La plaque supérieure étant au potentiel le plus élevé, le champ vaut $\vec{E} = -E\,\vec{u}_y$ ($E > 0$) et la force $-e\vec{E} = eE\,\vec{u}_y$ dévie l'électron vers le haut. Avec $a_y = \dfrac{eE}{m}$:

$$x = v_0 t, \qquad y = \frac{eE}{2mv_0^2}\,x^2, \qquad \tan\alpha = \frac{eE\,\ell}{mv_0^2}.$$

C'est le principe de l'**oscilloscope analogique** : la déviation du spot sur l'écran est proportionnelle à la tension appliquée aux plaques.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 — Canon à électrons

Des électrons émis sans vitesse par une cathode chauffée sont accélérés par une tension $U = 2{,}0\,\text{kV}$.

Q-1) Calculer leur vitesse en sortie. L'approximation newtonienne est-elle justifiée ?

Q-2) Quelle serait la vitesse de protons accélérés sous la même tension ?

Correction

Q-1) $v = \sqrt{2eU/m_e} = 2{,}65\times10^{7}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 0{,}09\,c$; $eU = 2\,\text{keV} \ll 511\,\text{keV}$: l'approximation newtonienne est justifiée (erreur relative de l'ordre de $\frac{3}{4}\frac{eU}{mc^2} \approx 0{,}3\,\%$).

Q-2) $v_p = v_e\sqrt{m_e/m_p} = v_e/43 = 6{,}2\times10^{5}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (et il faut inverser la tension).

EXERCICE 3 — Proton lancé obliquement entre deux électrodes

Un proton entre en O avec la vitesse $v_0 = 1{,}0\times10^{5}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ faisant l'angle $\alpha = 30°$ avec l'électrode inférieure (plan $y = 0$). Il règne le champ $\vec{E} = -E\,\vec{u}_y$ avec $E = 500\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.

Q-1) Montrer que le poids est négligeable, puis établir l'équation de la trajectoire.

Q-2) À quelle distance de O le proton retombe-t-il sur l'électrode inférieure ? Quelle distance minimale d doit séparer les électrodes pour qu'il ne touche pas l'électrode supérieure ?

Correction

Q-1) $\dfrac{eE}{m_p g} = 5\times10^{9}$. Analogie avec le tir balistique ($g \to a = eE/m_p = 4{,}8\times10^{10}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) : $y = x\tan\alpha - \dfrac{a\,x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

Q-2) Portée $D = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{a} = 18\,\text{cm}$; flèche $h = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2a} = 2{,}6\,\text{cm}$: il faut $d > 2{,}6\,\text{cm}$.

EXERCICE 4 — Sensibilité d'un oscilloscope analogique

Des électrons, accélérés sous $U_0 = 2{,}0\,\text{kV}$, entrent avec la vitesse $v_0\vec{u}_x$ entre deux plaques de longueur $\ell = 2{,}0\,\text{cm}$, distantes de $d = 1{,}0\,\text{cm}$, soumises à la tension U. L'écran est à la distance $D = 20\,\text{cm}$ du milieu des plaques.

Q-1) Établir l'équation de la trajectoire entre les plaques en fonction de U, U_0 et d.

Q-2) Montrer que la droite de sortie passe par le milieu des plaques et en déduire la déviation Y sur l'écran.

Q-3) Calculer la sensibilité Y/U. Pourquoi ne dépend-elle ni de la charge ni de la masse ?

Correction

Q-1) $\ddot{y} = \dfrac{eU}{md}$ et $mv_0^2 = 2eU_0$: $y = \dfrac{eU}{2mdv_0^2}x^2 = \dfrac{U}{4dU_0}x^2$.

Q-2) La tangente en $x = \ell$ a la pente $\dfrac{U\ell}{2dU_0}$ et passe par $\left(\ell, \frac{U\ell^2}{4dU_0}\right)$: elle coupe l'axe en $x = \ell/2$. D'où $Y = D\,\dfrac{U\ell}{2dU_0}$.

Q-3) $\dfrac{Y}{U} = \dfrac{D\ell}{2dU_0} = 0{,}10\,\text{mm}\cdot\text{V}^{-1}$: $5\,\text{mm}$ pour $50\,\text{V}$. Le rapport e/m intervient de la même façon dans l'accélération par U_0 et dans la déviation : il se simplifie.

III Mouvement dans un champ magnétique uniforme

III.1 Analyse qualitative

On étudie une particule de charge q et de vitesse initiale $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, dans $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ uniforme ($\vec{E} = \vec{0}$).

- La force magnétique ne travaille pas : E_c est constante, le mouvement est **uniforme** : $\|\vec{v}\| = v_0$.
- Projection du PFD sur $\vec{u}_z$: $m\ddot{z} = 0$ avec $\dot{z}(0) = 0$: le mouvement est **plan**, perpendiculaire à $\vec{B}$.
- La force, de norme constante $|q|v_0B$, est perpendiculaire à la vitesse : elle est **normale** à la trajectoire.

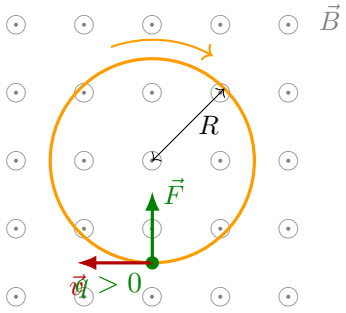
III.2 Mouvement cyclotron

Mouvement circulaire uniforme R D

Dans la base de Frenet, $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et $m\dfrac{v_0^2}{R_c} = |q|v_0B$: le rayon de courbure est constant, la trajectoire est un **cercle** parcouru uniformément, de rayon et de pulsation

$$R = \frac{mv_0}{|q|B} \qquad \omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

La **pulsation cyclotron** ω_c ne dépend pas de la vitesse : période $T_c = \dfrac{2\pi m}{|q|B}$. Le sens de rotation dépend du signe de q : $\vec{\omega} = -\dfrac{q\vec{B}}{m}$.



Pour $q > 0$ et $\vec{B}$ sortant, la force $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est dirigée vers le centre et la rotation se fait dans le sens horaire ($\vec{\omega}$ opposé à $\vec{B}$). Un électron tourne en sens inverse.

Fig. 3 : Mouvement cyclotron dans un champ magnétique uniforme sortant.

☞ Méthode — Résoudre les équations couplées par les composantes M

En posant $\omega = qB/m$ (algébrique), le PFD donne $\dot{v}_x = \omega v_y$ et $\dot{v}_y = -\omega v_x$: les équations sont **couplées**.

- **Substitution** : en dérivant la première, $\ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$: v_x (et de même v_y) est sinusoïdale de pulsation $|\omega|$.
- **Variable complexe** : $\underline{u} = v_x + \mathrm{i}\, v_y$ vérifie $\dot{\underline{u}} = -\mathrm{i}\,\omega\,\underline{u}$, d'où $\underline{u} = \underline{u}_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$: le vecteur vitesse tourne uniformément à la pulsation $|\omega|$.

Une intégration donne alors $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \dfrac{v_0^2}{\omega^2}$: on retrouve le cercle de rayon R.

III.3 Cas général : trajectoire hélicoïdale

Hélice R

Si $\vec{v}_0$ a une composante $v_\parallel$ selon $\vec{B}$ et une composante $v_\perp$ perpendiculaire, $v_\parallel$ est conservée (la force n'a pas de composante selon $\vec{B}$) et le mouvement projeté est circulaire uniforme de rayon $R = \dfrac{m v_\perp}{|q|B}$: la trajectoire est une **hélice** d'axe parallèle à $\vec{B}$ et de pas $p = v_\parallel T_c = \dfrac{2\pi m v_\parallel}{|q|B}$.

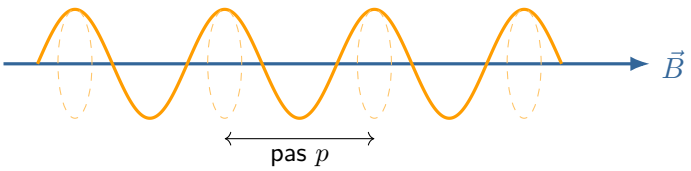


Fig. 4 : Les particules chargées s'enroulent autour des lignes de champ : c'est ainsi que le champ magnétique terrestre guide les particules du vent solaire vers les pôles (aurores polaires).

Ordres de grandeur

Électron à $10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dans le champ terrestre ($5\times10^{-5}\,\mathrm{T}$) : $R \approx 11\,\mathrm{cm}$. Proton de $1\,\mathrm{MeV}$ dans $1\,\mathrm{T}$: $R \approx 14\,\mathrm{cm}$. Fréquence cyclotron de l'électron : $\frac{eB}{2\pi m_e} \approx 28\,\mathrm{GHz}$ pour $B = 1\,\mathrm{T}$ (chauffage des plasmas).

III.4 Applications

- **Spectromètre de masse** : des ions de même charge, accélérés sous la même tension U, entrent dans $\vec{B}$ et décrivent des demi-cercles de rayons $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$: ils sont séparés selon leur masse (analyse isotopique, datation).
- **Filtre de Wien** : dans des champs croisés $\vec{E} \perp \vec{B}$, une particule de vitesse $\vec{v} \perp \vec{E}, \vec{B}$ n'est pas déviée si $q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, soit $v = E/B$: sélecteur de vitesse.
- **Cyclotron** : deux demi-boîtes (« dees ») dans un champ $\vec{B}$; une tension alternative de pulsation ω_c accélère la particule à chaque passage entre les dees, et le rayon croît (classique des concours ci-dessous).

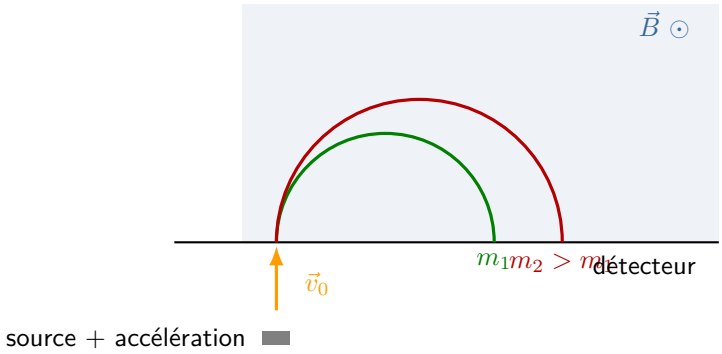


Fig. 5 : Principe du spectromètre de masse (Dempster) : à charge égale, le rayon croît comme $\sqrt{m}$ (ions de charge positive).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Électrons dans un champ magnétique ✦✧✧✧✧

Les électrons du canon précédent ($U = 2{,}0\,\mathrm{kV}$) pénètrent dans une région où règne un champ $B = 1{,}0\,\mathrm{mT}$ perpendiculaire à leur vitesse.

Q-1) Calculer le rayon de la trajectoire et la période du mouvement.

Q-2) Comment varie le rayon si l'on double la tension accélératrice ? la période ?

Correction

Q-1) $R = \dfrac{m_e v}{eB} = 15\,\mathrm{cm}$; $T_c = \dfrac{2\pi m_e}{eB} = 36\,\mathrm{ns}$.

Q-2) $v \propto \sqrt{U}$ donc R est multiplié par $\sqrt{2}$; la période ne change pas : elle est indépendante de la vitesse.

EXERCICE 6 Séparation isotopique de l'uranium ✦✦✧✧✧

Des ions $^{235}\mathrm{U}^+$ et $^{238}\mathrm{U}^+$ accélérés sous $U = 10\,\mathrm{kV}$ entrent dans un champ $B = 0{,}50\,\mathrm{T}$ et décrivent un demi-cercle. Calculer la distance séparant leurs points d'impact ($m = A \times 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$).

Correction

$R = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{2mU}{e}}$: $R_{235} = 0{,}443\,\mathrm{m}$ et $R_{238} = R_{235}\sqrt{238/235} = 0{,}446\,\mathrm{m}$. L'écart des impacts vaut $2(R_{238} - R_{235}) \approx 5{,}6\,\mathrm{mm}$: c'est le procédé (calutron) utilisé pendant la Seconde Guerre mondiale pour enrichir l'uranium, avec un très faible rendement.

IV Synthèse

★ À retenir

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$; poids négligeable pour une particule élémentaire.
- $\mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$: $\vec{B}$ ne travaille pas ; $E_p = qV$; $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$.
- $\vec{E}$ uniforme : $\vec{a} = q\vec{E}/m$ constante, trajectoire rectiligne ou parabolique ; entre deux plaques, $E = U/d$.
- Accélération sous U : $\frac{1}{2}mv^2 = qU$; newtonien valable si $E_c \ll mc^2$, sinon $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ et $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$.
- $\vec{B}$ uniforme, $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$: cercle uniforme, $R = \dfrac{mv_0}{|q|B}$, $\omega_c = \dfrac{|q|B}{m}$ indépendante de v_0 ; cas général : hélice.
- Filtre de Wien : $v = E/B$; spectromètre : $R = \frac{1}{B}\sqrt{2mU/q}$.

V Exercices d'approfondissement

EXERCICE 7 Focalisation magnétique

✦✦✦✧✧

Des électrons accélérés sous $U = 1{,}0\,\text{kV}$ pénètrent dans un long solénoïde où règne $B = 10\,\text{mT}$, avec un angle faible α (variable d'un électron à l'autre) par rapport à l'axe.

Q-1) Calculer leur vitesse et la période cyclotron.

Q-2) Montrer que, pour α petit, tous les électrons issus d'un même point de l'axe se recoupent sur l'axe à une distance p à calculer.

Correction

Q-1) $v = \sqrt{2eU/m_e} = 1{,}9 \times 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $T_c = \dfrac{2\pi m_e}{eB} = 3{,}6\,\text{ns}$.

Q-2) Chaque électron décrit une hélice dont la projection est un cercle passant par l'axe : il revient sur l'axe au bout de T_c, quel que soit α, en ayant avancé de $v\cos\alpha\, T_c \approx vT_c$ au premier ordre en α. Point de focalisation : $p = vT_c = 6{,}7\,\text{cm}$. C'est une « lentille magnétique », utilisée en microscopie électronique.

EXERCICE 8 Spectrographe de Dempster

✦✦✦✧✧

Des ions $^6\text{Li}^+$ et $^7\text{Li}^+$ ($m \approx 6$ et $7\,\text{u}$, $1\,\text{u} = 1{,}66 \times 10^{-27}\,\text{kg}$) sont accélérés sous $U = 2{,}0\,\text{kV}$ puis décrivent un demi-cercle dans $B = 0{,}10\,\text{T}$.

Q-1) Calculer les rayons des trajectoires et la distance entre les points d'impact.

Q-2) Quelle stabilité relative de la tension accélératrice faut-il pour que les deux taches ne se recouvrent pas ?

Correction

Q-1) $R = \dfrac{1}{B}\sqrt{\dfrac{2mU}{e}}$: $R_6 = 15{,}8\,\text{cm}$, $R_7 = 17{,}0\,\text{cm}$; écart des impacts $2(R_7 - R_6) = 2{,}5\,\text{cm}$.

Q-2) $\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta U}{U}$ doit rester petit devant $\dfrac{R_7 - R_6}{R} \approx 7{,}7\,\%$: $\dfrac{\Delta U}{U} \ll 15\,\%$; en pratique $1\,\%$ suffit largement.

EXERCICE 9 Champs croisés : mouvement cycloïdal

Un proton part de O sans vitesse dans les champs $\vec{E} = E\,\vec{u}_y$ et $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$. On pose $\omega = \dfrac{eB}{m}$ et $\underline{u} = v_x + \mathrm{i}\,v_y$.

Q-1) Écrire les équations du mouvement et montrer que $\dot{\underline{u}} = -\mathrm{i}\,\omega\,\underline{u} + \mathrm{i}\,\dfrac{eE}{m}$.

Q-2) En déduire $x(t)$ et $y(t)$ et tracer la trajectoire.

Q-3) Quelle est la vitesse moyenne de dérive ? Comparer à $\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{B^2}$.

Correction

Q-1) $\vec{v}\wedge\vec{B} = B(v_y\vec{u}_x - v_x\vec{u}_y)$: $m\dot{v}_x = ev_yB$, $m\dot{v}_y = eE - ev_xB$. D'où $\dot{\underline{u}} = \omega v_y + \mathrm{i}\left(\dfrac{eE}{m} - \omega v_x\right) = -\mathrm{i}\omega\underline{u} + \mathrm{i}\dfrac{eE}{m}$.

Q-2) Solution particulière constante $\underline{u}_p = \dfrac{eE}{m\omega} = \dfrac{E}{B}$; avec $\underline{u}(0) = 0$: $\underline{u} = \dfrac{E}{B}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$, soit $v_x = \dfrac{E}{B}(1 - \cos\omega t)$, $v_y = \dfrac{E}{B}\sin\omega t$, puis

$$x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t), \qquad y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos\omega t)\ :$$

une **cycloïde** (figure de la page de garde), le proton s'arrêtant à chaque point de rebroussement $y = 0$.

Q-3) $\langle v_x\rangle = \dfrac{E}{B}$, $\langle v_y\rangle = 0$; et $\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{B^2} = \dfrac{E}{B}\,\vec{u}_y\wedge\vec{u}_z = \dfrac{E}{B}\,\vec{u}_x$: identique, et indépendante de la charge et de la masse.

EXERCICE 10 Déviation magnétique dans un tube cathodique

Un faisceau d'électrons de vitesse $v_0 = 3{,}0\times10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ traverse une zone de longueur $\ell = 2{,}0\,\text{cm}$ où règne un champ $B = 1{,}0\,\text{mT}$ perpendiculaire au faisceau, puis parcourt $D = 30\,\text{cm}$ jusqu'à l'écran.

Q-1) Calculer le rayon de courbure et l'angle de déviation α.

Q-2) Estimer la déviation sur l'écran. Comparer la dépendance en v_0 à celle de la déviation électrostatique.

Correction

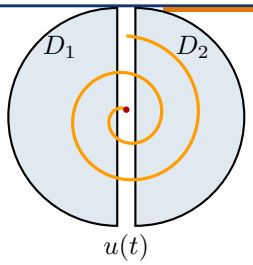
Q-1) $R = \dfrac{m_e v_0}{eB} = 17\,\text{cm}$; $\sin\alpha = \dfrac{\ell}{R} = 0{,}12$, $\alpha = 6{,}7°$.

Q-2) $Y \approx D\tan\alpha + \dfrac{\ell^2}{2R} \approx 3{,}7\,\text{cm}$. La déviation magnétique varie en $1/v_0$, contre $1/v_0^2$ pour la déviation électrostatique : elle permet de grands angles avec des courants modérés (téléviseurs), la déviation électrostatique étant réservée aux oscilloscopes (rapidité).

VI Classiques des concours

EXERCICE 11 Le cyclotron

★★★★☆



Un cyclotron est constitué de deux demi-cylindres creux D_1 et D_2 (« dees ») de rayon $R_{\max} = 0{,}50\,\mathrm{m}$, placés dans un champ magnétique uniforme $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$ perpendiculaire à leur plan. Entre les dees, un intervalle étroit est soumis à une tension sinusoïdale d'amplitude $U_m = 50\,\mathrm{kV}$. On accélère des protons injectés au centre avec une vitesse négligeable.

Q-1) Montrer qu'à l'intérieur d'un dee le proton décrit un demi-cercle à vitesse constante, en une durée indépendante de sa vitesse.

Q-2) Quelle doit être la fréquence de la tension accélératrice ? La calculer.

Q-3) De combien l'énergie cinétique augmente-t-elle à chaque tour (passages synchronisés avec le maximum de tension) ?

Q-4) Calculer l'énergie cinétique (en MeV) en sortie et le nombre de tours effectués.

Q-5) Vérifier la validité de l'approximation newtonienne. Que se passerait-il à plus haute énergie ?

Correction

Q-1) Dans un dee (conducteur creux), $\vec{E} = \vec{0}$: seule la force magnétique agit, v est constante et la trajectoire est un demi-cercle de rayon $\dfrac{mv}{eB}$, parcouru en $\dfrac{\pi R}{v} = \dfrac{\pi m}{eB}$, indépendant de v.

Q-2) La tension doit changer de signe à chaque demi-tour : $f = \dfrac{eB}{2\pi m_p} = 22{,}9\,\mathrm{MHz}$.

Q-3) Deux passages par tour : $\Delta E_c = 2eU_m = 100\,\mathrm{keV}$.

Q-4) En sortie, $R_{\max} = \dfrac{m_p v}{eB}$: $E_c = \dfrac{(eBR_{\max})^2}{2m_p} = 4{,}3 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} = 27\,\mathrm{MeV}$; nombre de tours $N = \dfrac{27}{0{,}1} \approx 270$.

Q-5) $m_p c^2 = 938\,\mathrm{MeV}$: $E_c/m_p c^2 \approx 3\,\%$, newtonien acceptable. À plus haute énergie, la période $\dfrac{2\pi\gamma m_p}{eB}$ croît avec γ : le synchronisme est perdu, d'où le synchrocyclotron (fréquence variable) puis le synchrotron.

EXERCICE 12 Les accélérateurs du CERN

★★★★☆

1. Accélération électrique. Un proton entre avec une énergie cinétique négligeable dans une zone de longueur L où règne le champ uniforme E créé par une tension U.

Q-1) Montrer que le poids est négligeable pour $E = 100\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$. Exprimer l'énergie cinétique en sortie en fonction de U.

2. Accélérateur linéaire. Les protons traversent une succession de tubes conducteurs coaxiaux (champ nul à l'intérieur) ; entre deux tubes consécutifs, ils sont accélérés par une tension U_c. Ils sont injectés avec l'énergie eU_0.

Q-2) Exprimer l'énergie cinétique à la sortie du n-ième intervalle. Calculer la vitesse pour $n = 10$, $U_0 = 200\,\mathrm{kV}$, $U_c = 2{,}0\,\mathrm{MV}$. Les protons sont-ils relativistes (on les considère comme tels au-delà de $c/3$) ?

Q-3) La tension entre les tubes est alternative, de fréquence f : le proton doit traverser chaque tube en une demi-période. Exprimer la longueur L_n du n-ième tube. Pourquoi les tubes sont-ils de plus en plus longs ?

3. Synchrotron. Un proton de vitesse $\vec{v}_0 \perp \vec{B}_0$ pénètre dans une zone de champ magnétique uniforme.

Q-4) Calculer le rayon de la trajectoire des protons issus du Linac dans un champ de $1{,}0\,\mathrm{T}$. Le synchrotron a un rayon de $100\,\mathrm{m}$: quel champ faut-il pour ces protons ? Pourquoi augmente-t-on B au cours de l'accélération ?

Q-5) Une particule chargée en mouvement circulaire rayonne de l'énergie (rayonnement synchrotron), d'autant plus qu'elle est légère. Pourquoi le LHC accélère-t-il des protons plutôt que des électrons ?

Correction

Q-1) $\dfrac{eE}{m_p g} \approx 10^{12}$. TEC : $E_c = eEL = eU$.

Q-2) $E_{c,n} = e(U_0 + nU_c) = 20{,}2\,\mathrm{MeV}$; $v = \sqrt{2E_c/m_p} = 6{,}2 \times 10^7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 0{,}21\,c < c/3$: non relativistes, de justesse.

Q-3) $L_n = v_n \dfrac{T}{2} = \dfrac{v_n}{2f}$ avec $v_n = \sqrt{\dfrac{2e(U_0 + nU_c)}{m_p}}$: les tubes s'allongent (comme $\sqrt{n}$ pour n grand) car le proton va de plus en plus vite.

Q-4) $R = \dfrac{m_p v}{eB} = 0{,}65\,\mathrm{m}$; pour $R = 100\,\mathrm{m}$, $B = 6{,}5\,\mathrm{mT}$. Comme $R = p/(eB)$, il faut augmenter B proportionnellement à la quantité de mouvement pour que les protons restent sur l'anneau : d'où le nom de « synchrotron ».

Q-5) À énergie égale, un électron (1836 fois plus léger) perdrait l'essentiel de son énergie par rayonnement synchrotron : on accélère donc des protons pour atteindre de très hautes énergies.

EXERCICE 13 L'expérience de Millikan

★★★★☆

Une gouttelette d'huile sphérique ($r = 1{,}0\,\mu\mathrm{m}$, $\rho = 900\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), portant la charge $q = -3e$, est placée entre deux plaques horizontales distantes de $d = 1{,}0\,\mathrm{cm}$. L'air exerce la force de Stokes $-6\pi\eta r\vec{v}$ ($\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}$) ; on néglige la poussée d'Archimède. Ici le poids n'est **pas** négligeable.

Q-1) Sans tension, calculer la vitesse limite de chute. Comment en déduit-on le rayon ?

Q-2) Quelle tension faut-il appliquer, et dans quel sens, pour maintenir la gouttelette immobile ?

Q-3) Comment Millikan a-t-il mis en évidence la quantification de la charge ?

Correction

Q-1) $v_\ell = \dfrac{mg}{6\pi\eta r} = \dfrac{2\rho g r^2}{9\eta} = 0{,}11\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$; la mesure de v_ℓ au microscope donne $r = \sqrt{\dfrac{9\eta v_\ell}{2\rho g}}$.

Q-2) $|q|\dfrac{U}{d} = mg$, avec $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 3{,}8 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg}$: $U = \dfrac{mgd}{3e} = 770\,\mathrm{V}$, la plaque supérieure étant au potentiel le plus élevé (le champ, dirigé vers le bas, exerce une force vers le haut sur la charge négative).

Q-3) En mesurant la charge de très nombreuses gouttelettes (par l'équilibre ou par les vitesses de montée et de descente), il constata que toutes étaient des multiples entiers d'une même valeur $e \approx 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (1909–1913).