LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

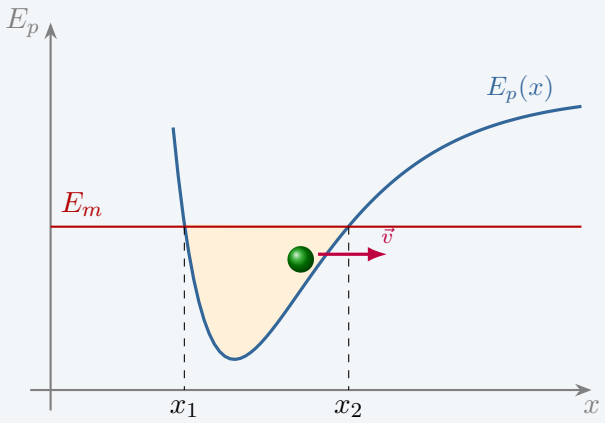
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

FICHE RÉSUMÉ

M3 MÉCANIQUE

Puissance et travail d'une force, théorème de l'énergie cinétique

Puissance et travail — Théorème de l'énergie cinétique — Énergie potentielle — Énergie mécanique — Puits de potentiel et stabilité



> *Il est important de comprendre qu'en physique aujourd'hui, nous ne savons pas ce qu'est l'énergie.*
>
> — Richard Feynman, *Le cours de physique de Feynman* (1963)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Mouvement dans un puits de potentiel »

M3 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Le travail d'une force mesure l'énergie qu'elle transfère au point ; le **théorème de l'énergie cinétique** (une seule équation scalaire) relie directement vitesse et position, sans passer par le temps. Le travail d'une force **conservative** ne dépend pas du chemin : il dérive d'une **énergie potentielle**, et si les autres forces ne travaillent pas, l'énergie mécanique se conserve. Le graphe $E_p(x)$ suffit alors pour prévoir le mouvement : domaine accessible, équilibres, stabilité, petites oscillations.

I Puissance et travail d'une force

Définition — Puissance, travail élémentaire, travail R

Pour une force $\vec{F}$ appliquée au point M de vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$:

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \qquad \delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \qquad W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A,\Gamma}^{B}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$\mathcal{P}$ en watts ($1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$), W en joules ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$). La force est **motrice** si $\mathcal{P} > 0$, **résistante** si $\mathcal{P} < 0$. En général $W_{A\to B}$ **dépend du chemin** Γ suivi (d'où la notation δW).

Travaux usuels R D

- Toute force **perpendiculaire à la vitesse** ne travaille pas : réaction normale d'un support fixe, tension d'un pendule, force magnétique.
- Force constante : $W_{A\to B} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$; **poids** ($\vec{u}_z$ ascendant) : $W_{A\to B}(m\vec{g}) = -mg\,(z_B - z_A)$, moteur à la descente.
- Frottement solide de norme constante fR_N sur une longueur parcourue L : $W = -fR_N\,L < 0$, qui dépend du chemin.

II Théorèmes énergétiques

Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique R D

Dans un référentiel **galiléen**, avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$:

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{ext}}) \qquad \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Démonstration : on multiplie scalairement le PFD par $\vec{v}$: $m\vec{v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum\vec{F}\cdot\vec{v}$, puis on intègre.

Définition — Force conservative, énergie potentielle R

Une force est **conservative** si son travail entre A et B ne dépend pas du chemin suivi (travail nul sur tout contour fermé : $\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0$). Il existe alors une énergie potentielle $E_p(M)$, définie à une constante près, telle que

$$\delta W = -\mathrm{d}E_p \qquad W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \qquad \vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p \qquad \mathcal{P} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}$$

avec $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$; à une dimension : $F_x = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$. La force est dirigée vers les E_p **décroissantes**.

★ À retenir

Force conservative	Expression	Énergie potentielle (à une constante près)
Poids ($\vec{u}_z$ ascendant)	$m\vec{g} = -mg\,\vec{u}_z$	$E_{pp} = mgz = -m\vec{g}\cdot\overrightarrow{OM}$
Force constante	$\vec{F}_0$	$E_p = -\vec{F}_0 \cdot \overrightarrow{OM}$
Rappel élastique	$-k(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_{\text{ext}}$	$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$
Gravitation (M fixe en O)	$-\dfrac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\,\vec{u}_r$	$E_p = -\dfrac{\mathcal{G}Mm}{r}$ (nulle à l'infini)
Coulomb (q_1 fixe en O)	$\dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$	$E_p = \dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (nulle à l'infini)
Électrostatique	$q\vec{E} = -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$	$E_p = qV$

Gradient (cartésiennes) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$

Gradient (cylindriques) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$

Théorème de l'énergie mécanique R D

Avec $E_m = E_c + E_p$ (E_p : somme des énergies potentielles de **toutes** les forces conservatives), dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{nc}}) \qquad \Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{\text{nc}})$$

Système **conservatif** ($\mathcal{P}(\vec{F}_{\text{nc}}) = 0$) : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(M) = \frac{1}{2}mv_0^2 + E_p(M_0) = \text{cte}$: c'est une **intégrale première** du mouvement (équation du premier ordre). Les frottements font toujours décroître E_m.

III Mouvement conservatif à un degré de liberté

Domaine accessible R

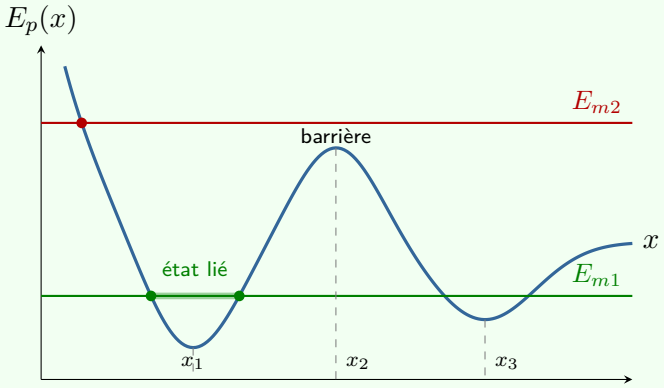
Comme $E_c = E_m - E_p(x) \geq 0$, le mouvement n'a lieu que là où

$$E_p(x) \leq E_m$$

Aux points où $E_p(x) = E_m$, $v = 0$: **points de rebroussement**.

- E_{m1} : **état lié**, mouvement périodique entre deux points de rebroussement, dans un puits ;
- E_{m2} : la **barrière de potentiel** en x_2 est franchie : **état de diffusion** (départ vers l'infini).

Énergie minimale pour sortir du puits x_1 : $E_p(x_2) - E_p(x_1)$.



x_1, x_3 : équilibres stables (minima) ; x_2 : instable (maximum).

Équilibre et stabilité R D

- **Équilibre** en x_e : force nulle, $\left.\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} = 0$.
- Au voisinage : $E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{1}{2}E_p''(x_e)(x-x_e)^2$, d'où $F_x \approx -E_p''(x_e)(x-x_e)$.
  - $E_p''(x_e) > 0$ (minimum) : force de rappel, équilibre **stable** ;
  - $E_p''(x_e) < 0$ (maximum) : la force éloigne le point, équilibre **instable** ;
  - $E_p''(x_e) = 0$: on pousse le développement ; si la première dérivée non nulle est d'ordre **impair** (point d'inflexion), l'équilibre est instable ; d'ordre pair, on conclut selon son signe.

Petits mouvements : approximation harmonique R D

Autour d'un minimum, avec $X = x - x_e$: $m\ddot{X} = -E_p''(x_e)\,X$, soit

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{E_p''(x_e)}{m} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Plus généralement, si $E_c = \frac{1}{2}A(q)\,\dot{q}^2$ (paramètre $q = x, \theta, r\ldots$) : $\Omega^2 = \dfrac{1}{A(q_e)}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_e}$. Pendule simple : $E_p = -mg\ell\cos\theta$, $A = m\ell^2$, $\Omega = \sqrt{g/\ell}$.

Ordres de grandeur

Puissances : cœur humain $1\,\mathrm{W}$; cycliste 100 à $400\,\mathrm{W}$; voiture à $130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$: $\approx 25\,\mathrm{kW}$ contre les frottements ; TGV $9\,\mathrm{MW}$; réacteur nucléaire $1\,\mathrm{GW}$ électrique. $E_p = mgz$ valable si $z \ll R_T$ (erreur relative $\sim z/R_T$). Pendule : $T \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$ (Borda), écart $0{,}2\,\%$ à $10°$, $18\,\%$ à $90°$.

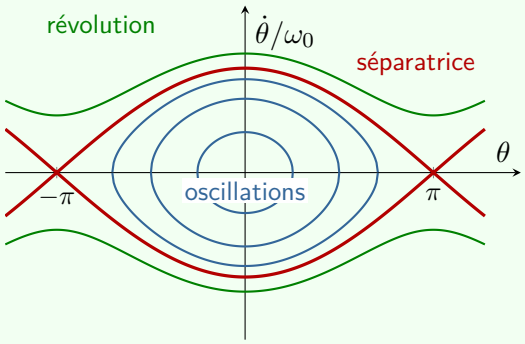
Portrait de phase, période R

Trajectoires de phase : courbes $\frac{1}{2}m\dot{x}^2+E_p(x)=E_m$, parcourues dans le sens horaire.

- autour d'un minimum : courbes **fermées**, mouvement **périodique** ;
- état de diffusion : trajectoire **ouverte** ;
- maximum de E_p : point **col**, traversé par la **séparatrice**.

Puits non harmonique : mouvement périodique mais non sinusoïdal, période dépendant de l'amplitude (non-isochronisme) :

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E_m - E_p(x)\big)}}$$



Portrait de phase du pendule simple.

IV Méthodes et pièges

☞ Méthode — Choisir entre PFD et énergie M

- Un seul degré de liberté, ou relation **vitesse–position** cherchée (vitesse en un point, hauteur atteinte, distance d'arrêt) : **TEC ou TEM**. Les forces qui ne travaillent pas disparaissent du bilan.
- Une force de liaison inconnue (réaction, tension, condition de décollement $R_N = 0$) : **PFD projeté** sur la normale, après avoir obtenu v^2 par l'énergie.
- Équation du mouvement d'un système conservatif : on dérive $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = \text{cte}$: $\dot{x}\big(m\ddot{x} + E_p'(x)\big) = 0$, d'où $m\ddot{x} = -E_p'(x)$.

☞ Méthode — Étudier la stabilité par linéarisation M

On pose $q(t) = q_e + \varepsilon(t)$ avec ε, $\dot{\varepsilon}$, $\ddot{\varepsilon}$ infiniment petits d'ordre 1 ; on remplace dans l'équation du mouvement et on ne garde que les termes d'ordre 1 ($\sin\varepsilon \approx \varepsilon$, $\cos\varepsilon \approx 1$, on supprime ε^2, $\varepsilon\dot{\varepsilon}$…). On obtient $\ddot{\varepsilon} \pm \alpha^2\varepsilon = 0$: signe $+$, solution sinusoïdale, équilibre **stable** ; signe $-$, solution exponentielle divergente, équilibre **instable** ; si $\alpha = 0$, il faut un développement à un ordre supérieur.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La puissance et le travail **dépendent du référentiel** ; les théorèmes énergétiques s'appliquent dans un référentiel galiléen.
- $W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$: attention au signe. On écrit δW (quantité échangée) mais $\mathrm{d}E_p$ (variation d'une fonction d'état).
- Ne pas compter deux fois le poids : soit son travail dans le TEC, soit E_{pp} dans E_m.
- $E_{pp} = mgz$ suppose $\vec{u}_z$ **ascendant** ; avec un axe descendant, $E_{pp} = -mgz$.
- Les frottements ne sont pas conservatifs ; les forces de liaison (réaction, tension) n'ont pas d'énergie potentielle, mais souvent ne travaillent pas.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais calculer la puissance et le travail d'une force, et dire si elle est motrice ou résistante.
- ☐ Je sais énoncer et démontrer le TPC et le TEC, et choisir entre PFD et énergie.
- ☐ Je sais reconnaître une force conservative et retrouver les énergies potentielles usuelles.
- ☐ Je sais utiliser $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$ et le TEM avec des forces non conservatives.
- ☐ Je sais lire un graphe $E_p(x)$: domaine accessible, états liés ou de diffusion, barrière.
- ☐ Je sais trouver les équilibres, discuter leur stabilité et calculer la pulsation des petites oscillations.
- ☐ Je sais tracer et interpréter un portrait de phase conservatif.