LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

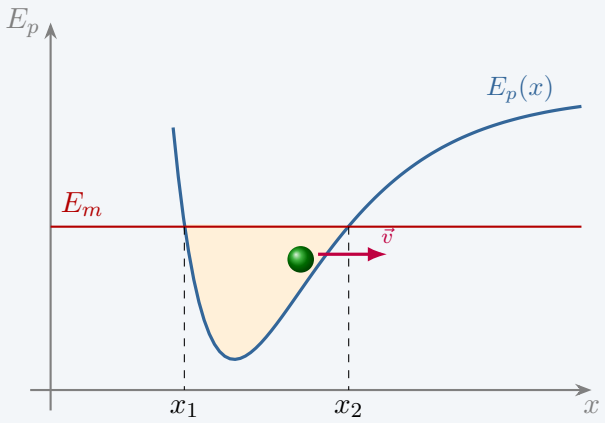
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M3

MÉCANIQUE

Puissance et travail d'une force, théorème de l'énergie cinétique

Puissance et travail — Théorème de l'énergie cinétique — Énergie potentielle — Énergie mécanique — Puits de potentiel et stabilité



> *Il est important de comprendre qu'en physique aujourd'hui, nous ne savons pas ce qu'est l'énergie.*
>
> — Richard Feynman, *Le cours de physique de Feynman* (1963)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Mouvement dans un puits de potentiel »

M3 — Travail et énergie

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Calculer la puissance et le travail d'une force ; reconnaître une force motrice ou résistante.
- Énoncer et utiliser les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique.
- Établir l'énergie potentielle des forces conservatives usuelles ; utiliser $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$.
- Exploiter la conservation ou la non-conservation de l'énergie mécanique.
- Lire un graphe d'énergie potentielle : domaine accessible, équilibres, stabilité, barrière.
- Approcher un puits par un puits harmonique ; interpréter un portrait de phase conservatif.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Mouvement dans un puits de potentiel » montre une particule dans un profil $E_p(x)$ réglable : on y voit les points de rebroussement, l'échange entre énergies cinétique et potentielle et le franchissement d'une barrière.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Puissance et travail d'une force . . . 3
I.1 Puissance d'une force . . . 3
I.2 Travail d'une force . . . 3
II Théorème de l'énergie cinétique . . . 4
III Forces conservatives et énergie potentielle . . . 5
III.1 Définition . . . 6
III.2 Lien avec le gradient . . . 6
III.3 Énergies potentielles usuelles . . . 7
IV Énergie mécanique . . . 7
V Mouvement conservatif à un degré de liberté . . . 9
V.1 Domaine accessible, états liés et états de diffusion . . . 9
V.2 Positions d'équilibre et stabilité . . . 9
V.3 Petits mouvements : approximation harmonique . . . 10
V.4 Portrait de phase d'un système conservatif . . . 11
V.5 Période dans un puits quelconque . . . 11
VI Synthèse . . . 12
VII Exercices d'approfondissement . . . 12
VIII Classiques des concours . . . 13

I Puissance et travail d'une force

I.1 Puissance d'une force

Le chapitre M2 relie l'accélération aux forces. Il est souvent plus efficace de raisonner sur une grandeur scalaire, l'**énergie**, qui évite de projeter des vecteurs et donne directement des relations entre vitesse et position.

Définition — Puissance d'une force R

La puissance de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le point M de vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ est

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \qquad [\mathrm{W}]$$

La force est **motrice** si $\mathcal{P} > 0$, **résistante** si $\mathcal{P} < 0$. Elle ne fournit aucune puissance si elle est perpendiculaire à la vitesse.

✗ Attention, erreurs fréquentes

La puissance **dépend du référentiel**, par l'intermédiaire de la vitesse. Le poids d'une valise posée dans un train ne travaille pas dans le référentiel du train, mais travaille dans le référentiel terrestre si le train monte une côte.

I.2 Travail d'une force

Définition — Travail élémentaire, travail R

Pendant la durée $\mathrm{d}t$, le point se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$. Le **travail élémentaire** de $\vec{F}$ est

$$\delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

Le travail de $\vec{F}$ lorsque M va de A à B **le long d'un chemin** Γ est la circulation de $\vec{F}$:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{J}]$$

Remarque

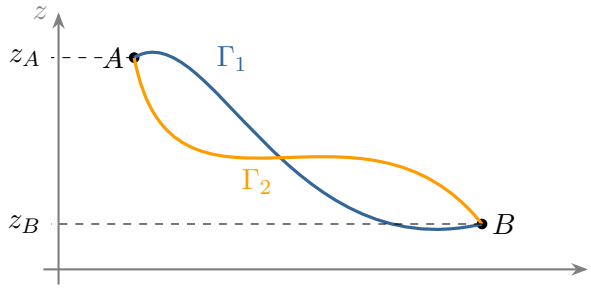
La notation δW (et non $\mathrm{d}W$) rappelle qu'en général le travail n'est pas la variation d'une fonction de la position : il dépend du chemin suivi. On retrouvera cette distinction en thermodynamique (chapitre T4).

Travaux usuels R D

- **Force constante** : $W_{A\to B} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$, indépendant du chemin.
- **Poids** ($\vec{u}_z$ vertical ascendant) : $W_{A\to B}(m\vec{g}) = -mg\,(z_B - z_A)$; il est moteur à la descente, résistant à la montée.
- **Réaction normale** d'un support fixe, **tension** d'un fil de longueur fixe dont l'autre extrémité est fixe : $W = 0$ (force perpendiculaire au déplacement).
- **Frottement solide** de norme constante $T = fN$ sur une longueur parcourue L : $W = -fN\,L$,

qui dépend du chemin.

Démonstration pour le poids : $\delta W = -mg\,\vec{u}_z \cdot (\mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z) = -mg\,\mathrm{d}z$, que l'on intègre de z_A à z_B.



Le travail du poids vaut $mg(z_A - z_B)$ sur les deux chemins ; celui d'un frottement est plus grand en valeur absolue sur le chemin le plus long.

Fig. 1 : Travail le long de deux chemins de mêmes extrémités.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Travaux et puissances ✦✧✧✧✧

Q-1) Travail du poids d'un objet de $2{,}0\,\mathrm{kg}$ qui descend de $3{,}0\,\mathrm{m}$? qui monte de $3{,}0\,\mathrm{m}$ puis redescend de $3{,}0\,\mathrm{m}$?

Q-2) Un bloc est traîné sur $5{,}0\,\mathrm{m}$ sur un sol horizontal ; la force de frottement a une norme constante de $4{,}0\,\mathrm{N}$. Travail de cette force ? Que vaut-il si le bloc fait un aller-retour ?

Q-3) Une voiture de $1{,}2\,\mathrm{t}$ monte une côte de pente $5\,\%$ (dénivelé de $5\,\mathrm{m}$ pour $100\,\mathrm{m}$ parcourus) à $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Puissance du poids ?

II Théorème de l'énergie cinétique

Définition — Énergie cinétique R

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ est

$$E_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2_{/\mathcal{R}} = \frac{p^2}{2m} \qquad [\mathrm{J}]$$

Comme la vitesse, elle dépend du référentiel.

Remarque

- **Un peu d'histoire.** Au xvii$^{\mathrm{e}}$ siècle, Leibniz défendait la « force vive » mv^2, conservée dans les chocs élastiques, contre la « quantité de mouvement » mv des cartésiens. Les deux se conservent, dans des circonstances différentes. Le terme d'énergie potentielle (Rankine, 1853) et la conservation de l'énergie (Helmholtz, 1847) sont plus tardifs.
- Pour des vitesses proches de celle de la lumière, $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$; un développement limité pour $v \ll c$ redonne $\frac{1}{2}mv^2$.

Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique R D

Dans un référentiel **galiléen**, pour un point matériel soumis aux forces $\vec{F}_i$:

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) \qquad \text{et} \qquad \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{A\to B}(\vec{F}_i)$$

Démonstration : on multiplie scalairement le PFD $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_i$ par $\vec{v}$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\,\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = m\vec{v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_i\cdot\vec{v}$. On intègre ensuite entre t_A et t_B.

☞ Méthode — Choisir entre PFD et théorèmes énergétiques M

- Le TEC est une **seule équation scalaire** : il suffit pour un mouvement à **un degré de liberté** (une seule coordonnée inconnue).
- Il relie directement **vitesse et position** sans passer par le temps : idéal pour une distance d'arrêt, une vitesse en un point, une hauteur atteinte.
- Les forces qui ne travaillent pas (réaction normale, tension d'un pendule) disparaissent du bilan : on les calcule ensuite, si besoin, par le PFD projeté sur la normale.

Ordres de grandeur

Puissances mécaniques : cœur humain $1\,\mathrm{W}$; cycliste 100 à $400\,\mathrm{W}$; voiture sur autoroute $\approx 25\,\mathrm{kW}$ pour vaincre la traînée ; TGV $9\,\mathrm{MW}$; centrale nucléaire $1\,\mathrm{GW}$ électrique.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 — Distance de freinage ✦✧✧✧✧

Une voiture de masse $m = 1200\,\mathrm{kg}$ roulant à $v_0 = 90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ freine roues bloquées jusqu'à l'arrêt sur une route horizontale ; le coefficient de frottement pneu/route vaut $f = 0{,}70$.

Q-1) Calculer la distance de freinage d et sa durée.

Q-2) Comment d dépend-elle de v_0 ? Commenter la limitation de vitesse.

Q-3) En l'absence de blocage, toute l'énergie est dissipée dans les disques de frein (masse $8{,}0\,\mathrm{kg}$, capacité thermique massique $460\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$). Estimer leur échauffement.

EXERCICE 3 — Bille lancée verticalement ✦✦✧✧✧

Une bille de $100\,\mathrm{g}$ est lancée verticalement vers le haut à $v_0 = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Elle s'élève de $h = 4{,}5\,\mathrm{m}$ seulement.

Q-1) Quelle hauteur atteindrait-elle sans frottement ?

Q-2) Calculer le travail des frottements pendant la montée. Que peut-on dire de la vitesse au retour au point de départ ?

III Forces conservatives et énergie potentielle

III.1 Définition

Définition — Force conservative, énergie potentielle R

Une force est **conservative** si elle ne dépend que de la position du point et si son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. On peut alors lui associer une fonction de la position $E_p(M)$, l'**énergie potentielle**, définie à une constante additive près, telle que

$$\delta W = -\mathrm{d}E_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p$$

✗ Attention, erreurs fréquentes

Le travail d'une force conservative le long d'un chemin **fermé** est nul. Les forces de frottement ne sont **pas** conservatives : leur travail sur un aller-retour est strictement négatif.

Conservatives	Non conservatives
poids, gravitation, force de Coulomb, rappel élastique	frottements fluides (dépendent de la vitesse) ; frottement solide (travail dépendant du chemin) ; réaction d'un support et tension d'un fil (dépendent des autres forces : ce sont des forces de liaison, qui souvent ne travaillent pas) ; poussée d'une fusée (dépend du temps)

Remarque

On écrit δW pour une quantité **échangée** (qui dépend du chemin) et $\mathrm{d}E_p$ pour la **variation** d'une fonction de l'état : écrire « $\mathrm{d}W$ » ou « δE_p » est une faute de sens, pas seulement de notation.

III.2 Lien avec le gradient

Pour une fonction $f(x,y,z)$, $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, ce qui définit le **gradient**.

Force et énergie potentielle R

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p$$

- cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$;
- cylindriques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$;
- sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$;
- à une dimension : $F_x = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$.

Remarque

Le gradient est orthogonal aux surfaces « équipotentielles » ($E_p = \text{cste}$) et dirigé vers les E_p croissantes : une force conservative pousse le système vers les **énergies potentielles décroissantes**, comme une bille qui dévale une pente.

III.3 Énergies potentielles usuelles

Force	Expression	Énergie potentielle
Poids ($\vec{u}_z$ ascendant)	$-mg\,\vec{u}_z$	$E_{pp} = mgz + \text{cste}$
Rappel élastique	$-k(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_{\text{ext}}$	$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 + \text{cste}$
Gravitation (masse M en O)	$-\dfrac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\,\vec{u}_r$	$E_p = -\dfrac{\mathcal{G}Mm}{r}$ (nulle à l'infini)
Coulomb (charge q_1 en O)	$\dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$	$E_p = \dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (nulle à l'infini)

Démonstrations D. Ressort : $\delta W = -k(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_{\text{ext}}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -k(\ell-\ell_0)\,\mathrm{d}\ell = -\mathrm{d}\big[\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\big]$, car seule la variation de longueur $\mathrm{d}\ell = \vec{u}_{\text{ext}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ compte. Gravitation : avec $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \dots$, $\delta W = -\dfrac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\Big(-\dfrac{\mathcal{G}Mm}{r}\Big)$. Le cas coulombien est identique en remplaçant $-\mathcal{G}Mm$ par $\dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0}$.

Remarque

$E_{pp} = mgz$ n'est valable que près du sol. En partant de $E_p = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{R_T+z}$ et en développant pour $z \ll R_T$: $E_p \approx -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{R_T} + mg_0 z$ avec $g_0 = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}$. On retrouve mgz à une constante près, avec une erreur relative de l'ordre de z/R_T.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 — Retrouver une énergie potentielle ✦✧✧✧✧

Q-1) Déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F} = -kx\,\vec{u}_x$, puis la force $\vec{F} = -\dfrac{K}{r^2}\vec{u}_r$ $(K>0)$.

Q-2) Dans le plan (Oxy), on considère la force $\vec{F} = F_0\Big(\dfrac{xy}{a^2}\,\vec{u}_x + \dfrac{x^2}{a^2}\,\vec{u}_y\Big)$. Calculer son travail de $O(0,0)$ à $A(a,a)$ le long du segment $[OA]$, puis le long du chemin $O \to B(a,0) \to A$. Conclure.

EXERCICE 5 — Ressort vertical : le poids « disparaît » ✦✦✧✧✧

Une masse m est suspendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Axe (Oz) descendant, origine au point d'attache.

Q-1) Déterminer la longueur à l'équilibre ℓ_e.

Q-2) Écrire l'énergie potentielle totale en fonction de $X = \ell - \ell_e$. Conclure.

IV Énergie mécanique

Définition — Énergie mécanique R

$E_m = E_c + E_p$, où E_p est la somme des énergies potentielles de **toutes** les forces conservatives appliquées.

Théorème de l'énergie mécanique R D

Dans un référentiel galiléen, en notant $\vec{F}_{\text{nc}}$ les forces non conservatives :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{nc}}) \qquad \text{et} \qquad \Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{\text{nc}})$$

Si les forces non conservatives ne travaillent pas, le mouvement est dit **conservatif** : E_m est constante, c'est une **intégrale première** du mouvement.

Démonstration : dans le TEC, on sépare les forces : $\Delta E_c = \sum W_{\text{c}} + \sum W_{\text{nc}} = -\Delta E_p + \sum W_{\text{nc}}$.

Remarque

Les frottements font toujours décroître E_m : l'énergie « perdue » n'a pas disparu, elle a été convertie en énergie interne (échauffement) du système et du milieu extérieur. Le bilan complet relève du premier principe de la thermodynamique (chapitre T4) : $\Delta U + \Delta E_m = W_{\text{ext}} + Q$.

☞ Méthode — Obtenir l'équation du mouvement par l'énergie M

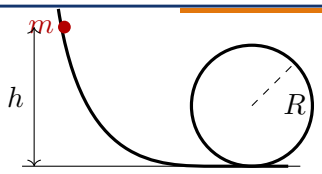
Pour un système conservatif à un degré de liberté x : on écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = \text{cste}$ puis on dérive par rapport au temps :

$$\dot{x}\left(m\ddot{x} + E_p'(x)\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad m\ddot{x} = -E_p'(x) \quad (\text{pour } \dot{x} \neq 0).$$

Exemple : pendule simple de longueur ℓ, $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$, d'où $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ (chapitre M5).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Le looping ✦✦✧✧✧



Une bille de masse m, assimilée à un point, est lâchée sans vitesse d'une hauteur h sur un rail sans frottement qui se termine par une boucle circulaire verticale de rayon R.

Q-1) Exprimer la vitesse en un point de la boucle repéré par l'angle θ mesuré depuis le point bas.

Q-2) Par le PFD projeté sur la normale, exprimer la réaction du rail.

Q-3) Quelle hauteur minimale permet de faire le tour complet ? A.N. : $R = 20\,\text{cm}$, $m = 100\,\text{g}$; réaction au sommet pour $h = 60\,\text{cm}$.

EXERCICE 7 Pendule lâché à $60°$ ✦✧✧✧✧

Un pendule simple ($\ell = 1{,}0\,\text{m}$, $m = 0{,}50\,\text{kg}$) est lâché sans vitesse de l'angle $\theta_0 = 60°$.

Q-1) Calculer la vitesse au point le plus bas.

Q-2) Calculer la tension du fil en ce point.

EXERCICE 8 **Le saut à la perche** ✦✦✧✧✧

Un perchiste court à $v_0 = 9{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ au moment de planter sa perche ; son centre de masse est alors à $h_0 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ du sol. On suppose que toute son énergie cinétique est convertie, via la déformation élastique de la perche, en énergie potentielle de pesanteur.

Q-1) Estimer la hauteur maximale atteinte par son centre de masse.

Q-2) Le record du monde dépasse $6{,}2\,\mathrm{m}$. Proposer des explications.

V Mouvement conservatif à un degré de liberté

V.1 Domaine accessible, états liés et états de diffusion

Pour un mouvement conservatif sur un axe, $E_c = E_m - E_p(x) \geq 0$.

Domaine accessible R

Le mouvement n'est possible que dans les régions où

$$E_p(x) \leq E_m$$

Aux points où $E_p(x) = E_m$, la vitesse s'annule : ce sont des **points de rebroussement**.

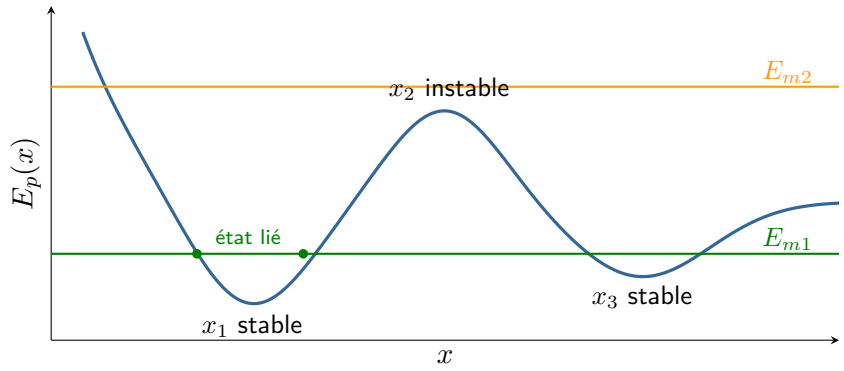


Fig. 2 : Avec E_{m1}, le mouvement est **lié** : périodique entre deux points de rebroussement, dans l'un des puits. Avec E_{m2}, la **barrière de potentiel** située en x_2 est franchie et la particule part vers l'infini (**état de diffusion**).

Remarque

L'énergie minimale à fournir pour sortir du puits x_1 vers la droite est la **hauteur de barrière** $E_p(x_2) - E_p(x_1)$. En mécanique quantique, une particule peut traverser une barrière plus haute que son énergie (effet tunnel) ; c'est impossible en mécanique classique.

V.2 Positions d'équilibre et stabilité

Équilibre et stabilité R D

- x_e est une **position d'équilibre** si la force y est nulle : $E_p'(x_e) = 0$.
- L'équilibre est **stable** si E_p y présente un minimum ($E_p''(x_e) > 0$), **instable** si E_p y présente un maximum ($E_p''(x_e) < 0$).

Justification : au voisinage de x_e, $F(x) = -E_p'(x) \approx -E_p''(x_e)\,(x - x_e)$. Si $E_p''(x_e) > 0$, la force ramène le point vers x_e (force de rappel) ; sinon elle l'en éloigne. On lit le profil $E_p(x)$ comme une piste sur laquelle roulerait une bille : la force pousse toujours vers le bas de la pente.

Remarque

Si $E_p''(x_e) = 0$, il faut pousser le développement : un minimum « plat » en $(x - x_e)^4$ reste stable (exercice d'approfondissement sur l'oscillateur quartique), un point d'inflexion à tangente horizontale est toujours instable (la force pousse dans le même sens des deux côtés).

V.3 Petits mouvements : approximation harmonique

Puits harmonique R D

Au voisinage d'un minimum, $E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{1}{2}E_p''(x_e)(x - x_e)^2$: le puits est approché par un **puits harmonique**. Avec $X = x - x_e$, $m\ddot{X} = -E_p''(x_e)\,X$, soit

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{E_p''(x_e)}{m}}$$

Les petites oscillations sont sinusoïdales, de pulsation indépendante de l'amplitude (chapitre M5).

Remarque

Près d'un maximum ($E_p''(x_e) < 0$), on obtient $\ddot{X} - \beta^2 X = 0$, dont les solutions en $\mathrm{e}^{\pm\beta t}$ divergent : on retrouve l'instabilité. Pour un degré de liberté angulaire θ (pendule), $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ avec $J = m\ell^2$ et $\omega_0^2 = E_p''(\theta_e)/J$: pour le pendule simple, $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

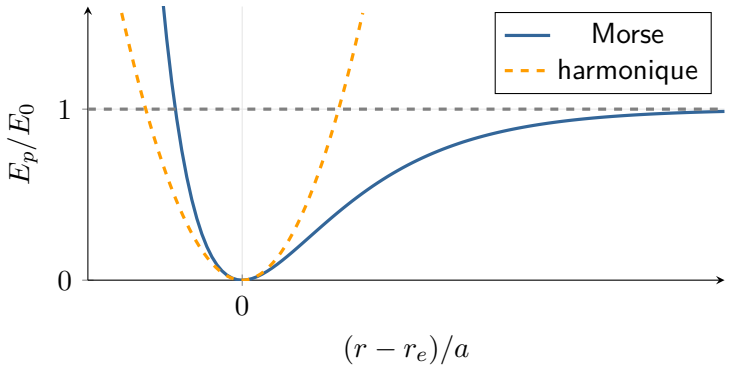


Fig. 3 : Potentiel de Morse $E_p = E_0\big(1 - \mathrm{e}^{-(r-r_e)/a}\big)^2$ et son approximation harmonique $E_0(r - r_e)^2/a^2$. Au-dessus de E_0, la molécule est dissociée (état de diffusion).

Ordres de grandeur

Vibration de la molécule de dihydrogène, modélisée par un potentiel de Morse : profondeur $E_0 \approx 4{,}7\,\mathrm{eV}$, largeur $a \approx 0{,}05\,\mathrm{nm}$, longueur de liaison $r_e \approx 0{,}074\,\mathrm{nm}$. Raideur équivalente $k = E_p''(r_e) = 2E_0/a^2 \approx 600\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$; avec la masse réduite $\mu = m_H/2 = 8{,}4 \times 10^{-28}\,\mathrm{kg}$, $\omega_0 = \sqrt{k/\mu} \approx 8{,}5 \times 10^{14}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, soit une longueur d'onde associée $\lambda = 2\pi c/\omega_0 \approx 2{,}2\,\mu\mathrm{m}$ (infrarouge). Plus le puits est profond et étroit, plus le « ressort équivalent » est raide.

V.4 Portrait de phase d'un système conservatif

Le **plan de phase** représente l'état $(x, \dot{x})$ du système. Les trajectoires de phase sont les courbes $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = E_m$, parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre (si $\dot{x} > 0$, x augmente). Autour d'un minimum de E_p, ce sont des courbes **fermées** : le mouvement est **périodique** (état lié) ; un état de diffusion correspond à une trajectoire de phase **ouverte**. Un maximum de E_p est un **point col**.

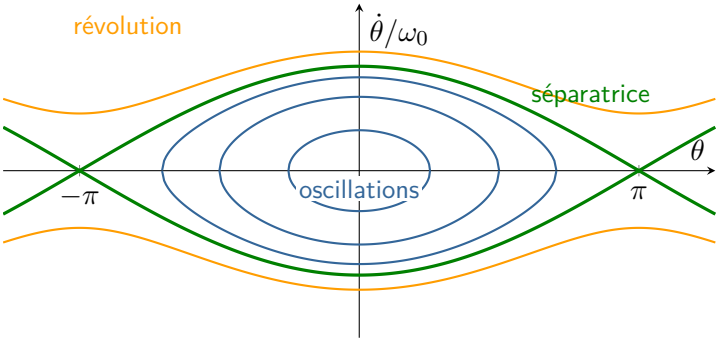


Fig. 4 : Portrait de phase du pendule simple : oscillations (courbes fermées), séparatrice passant par les points cols $\theta = \pm\pi$, mouvements révolutifs.

V.5 Période dans un puits quelconque

Période d'un mouvement lié D

Entre les points de rebroussement x_1 et x_2, $|\dot{x}| = \sqrt{\frac{2}{m}\big(E_m - E_p(x)\big)}$. Le point fait un aller et un retour par période :

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\dfrac{2}{m}\big(E_m - E_p(x)\big)}}$$

Dans un puits non parabolique, le mouvement est périodique mais **non sinusoïdal**, et sa période dépend de l'amplitude (**non-isochronisme**).

Activité numérique — pendule simple : effet de la non-linéarité

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt
w0 = 2*np.pi                                   # période des petites oscillations T0 = 1 s
def f(t, Y):                                   # Y = [theta, dtheta/dt]
    return [Y[1], -w0**2*np.sin(Y[0])]
for th0 in [10, 60, 120, 170]:                 # amplitudes en degrés
    sol = solve_ivp(f, [0, 4], [np.radians(th0), 0], max_step=1e-3)
    plt.plot(sol.t, np.degrees(sol.y[0]), label=str(th0))
plt.xlabel("t (s)"); plt.legend(); plt.show()
```

✗ Attention, erreurs fréquentes

Pour un système conservatif, la méthode d'Euler explicite ($x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t$, $v_{n+1} = v_n + a_n\Delta t$) fait **croître** artificiellement l'énergie à chaque pas : les oscillations calculées s'amplifient au lieu de rester bornées, et diminuer Δt ne fait que retarder la divergence. On préfère des intégrateurs plus précis (`solve_ivp`, `odeint`) ou le schéma d'Euler semi-implicite, où l'on utilise v_{n+1} pour calculer x_{n+1}.

On observe que la période augmente avec l'amplitude (formule de Borda, $T \approx T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$ pour des amplitudes modérées) et que les oscillations de grande amplitude ne sont plus sinusoïdales.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 9 Double puits

✦✦✧✧✧

Une particule de masse m se déplace sur un axe dans le potentiel $E_p(x) = E_0\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$, avec $E_0 > 0$.

Q-1) Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité. Tracer l'allure de E_p.

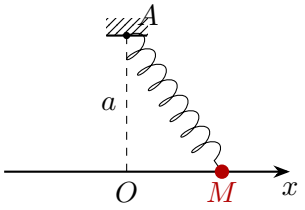
Q-2) Décrire qualitativement le mouvement selon la valeur de E_m.

Q-3) Calculer la période des petites oscillations au fond d'un puits.

EXERCICE 10 Point relié à un ressort incliné : une bifurcation

✦✦✦✧✧

Un point M de masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal (Ox). Il est relié au point fixe A, situé à la distance a au-dessus de O, par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.



Q-1) Exprimer $E_p(x)$ et $E_p'(x)$.

Q-2) Discuter les positions d'équilibre et leur stabilité selon le signe de $\ell_0 - a$.

Q-3) Calculer la pulsation des petites oscillations autour de $x = 0$ lorsque $\ell_0 < a$.

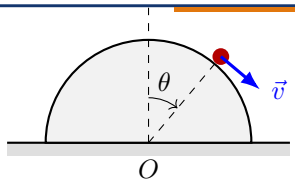
VI Synthèse

★ À retenir

- Puissance : $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$; travail : $W_{A\to B} = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ (dépend en général du chemin).
- TPC et TEC (référentiel galiléen) : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}$; $\Delta E_c = \sum W$, avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.
- Force conservative : $W_{A\to B} = -\Delta E_p$; $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p$; à 1D, $F_x = -E_p'(x)$.
- E_p usuelles : mgz ($\vec{u}_z$ ascendant) ; $\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$; $-\dfrac{\mathcal{G}Mm}{r}$; $\dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.
- TEM : $\Delta E_m = W_{\text{nc}}$; mouvement conservatif : $E_m =$ cste (intégrale première).
- Domaine accessible : $E_p(x) \le E_m$; points de rebroussement : $E_p = E_m$.
- Équilibre : $E_p'(x_e) = 0$; stable si $E_p''(x_e) > 0$; petites oscillations : $\omega_0 = \sqrt{E_p''(x_e)/m}$.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 11 Décrochage d'un objet sur une sphère ✦✦✦✧✧



Un petit objet de masse m, posé au sommet d'une demi-sphère fixe de rayon R, glisse sans frottement après une impulsion négligeable. On repère sa position par l'angle θ avec la verticale.

Q-1) Exprimer v^2 en fonction de θ.

Q-2) Exprimer la réaction N de la sphère. En déduire l'angle θ_d pour lequel l'objet quitte la sphère, ainsi que sa vitesse à cet instant.

Q-3) Quelle est ensuite la nature de sa trajectoire ?

EXERCICE 12 Mouvements possibles d'un pendule : tige ou fil ✦✦✦✧✧

Un point de masse m est attaché à un point fixe O par une tige rigide sans masse de longueur ℓ (cas a) ou par un fil idéal de même longueur (cas b). On lui communique, depuis la position d'équilibre basse, une vitesse horizontale v_0.

Q-1) Exprimer $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ. Pour quelles valeurs de v_0 le point fait-il des tours complets dans le cas (a) ?

Q-2) Dans le cas (b), exprimer la tension du fil. Montrer qu'il faut $v_0 \geq \sqrt{5g\ell}$ pour un tour complet.

Q-3) Décrire le mouvement en cas (b) pour $\sqrt{2g\ell} < v_0 < \sqrt{5g\ell}$, puis pour $v_0 \leq \sqrt{2g\ell}$.

EXERCICE 13 Un oscillateur non harmonique ✦✦✦✧✧

On reprend l'exercice du ressort incliné dans le cas particulier $a = \ell_0$.

Q-1) Montrer que, pour $|x| \ll \ell_0$, $E_p \approx \dfrac{k}{8\ell_0^2}\,x^4$. Le mouvement est-il harmonique ?

Q-2) Le point est lâché sans vitesse en $x = x_0$. Exprimer la période sous forme d'une intégrale et montrer qu'elle est inversement proportionnelle à x_0.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 14 Le potentiel de Lennard-Jones ✦✦✦✦✧

L'interaction entre deux atomes d'argon distants de r est modélisée par

$$E_p(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right], \qquad \varepsilon = 1{,}65\times10^{-21}\,\mathrm{J}, \quad \sigma = 0{,}34\,\mathrm{nm}.$$

Q-1) Quelle est l'origine physique de chacun des deux termes ? Tracer l'allure de $E_p(r)$.

Q-2) Déterminer la distance d'équilibre r_e et l'énergie de liaison. Calculer r_e.

Q-3) Montrer que $E_p \approx -\varepsilon + \frac{1}{2}K(r-r_e)^2$ au voisinage de r_e, avec $K = \dfrac{72\varepsilon}{2^{1/3}\sigma^2}$. Calculer K.

Q-4) On admet que le mouvement relatif est celui d'un point de masse $\mu = m/2$ ($m = 39{,}9\,\mathrm{u}$, $1\,\mathrm{u} = 1{,}66\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$). Calculer la fréquence des petites vibrations.

Q-5) À partir de quelle température l'agitation thermique ($\sim k_BT$, $k_B = 1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$) peut-elle rompre cette liaison ? Comparer à la température de liquéfaction de l'argon ($87\,\mathrm{K}$).

Q-6) Pourquoi les vibrations de grande amplitude ne sont-elles pas harmoniques ? Comment évolue la distance moyenne entre les atomes quand l'énergie augmente ?

EXERCICE 15 Anneau sur un cerceau tournant

Un petit anneau de masse m glisse sans frottement sur un cerceau vertical de centre O et de rayon R, qui tourne autour de son diamètre vertical à la vitesse angulaire constante ω. On repère l'anneau par l'angle θ entre la verticale descendante et $\overrightarrow{OM}$. On admet que, dans le référentiel du cerceau, tout se passe comme si l'anneau possédait l'énergie potentielle supplémentaire $-\frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta$ (énergie potentielle centrifuge, étudiée en deuxième année), et que son énergie mécanique s'y conserve.

Q-1) Écrire l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$.

Q-2) Déterminer les positions d'équilibre. Montrer qu'au-delà d'une vitesse critique ω_c à exprimer apparaît une position d'équilibre $\theta_e \neq 0$.

Q-3) Étudier la stabilité de chaque équilibre pour $\omega < \omega_c$ et $\omega > \omega_c$.

Q-4) Calculer la pulsation Ω des petites oscillations autour de θ_e pour $\omega > \omega_c$.

EXERCICE 16 Toboggan et tremplin

Un skieur de masse $m = 75\,\mathrm{kg}$ part sans vitesse du haut d'une piste (A) et descend un dénivelé $H = 40\,\mathrm{m}$ jusqu'au bas d'un tremplin (B), puis remonte de $h = 5{,}0\,\mathrm{m}$ jusqu'à l'extrémité C du tremplin, d'où il s'envole avec une vitesse inclinée de $\beta = 30°$ au-dessus de l'horizontale. La longueur totale de piste parcourue de A à C vaut $L = 120\,\mathrm{m}$.

Q-1) Sans frottement, calculer v_B et v_C.

Q-2) En réalité, on mesure $v_C = 22\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer le travail des forces non conservatives et la force de frottement moyenne correspondante, supposée de norme constante et tangente à la piste.

Q-3) Après C, on néglige les frottements. Déterminer l'altitude maximale atteinte au-dessus de C et la vitesse au sommet de la trajectoire.