LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

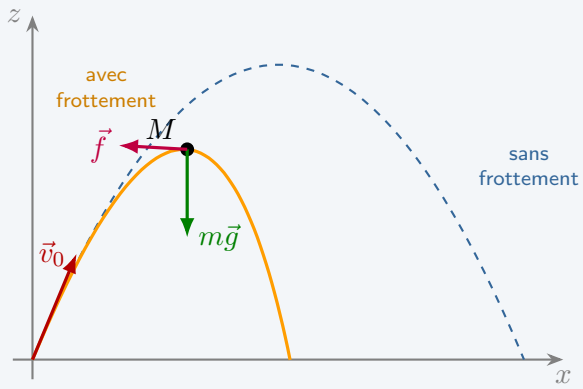
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M2

MÉCANIQUE

Lois de Newton dans un référentiel galiléen

Quantité de mouvement — Référentiels galiléens — Forces usuelles — Principe fondamental de la dynamique — Tir et frottements fluides



> *Si j'ai vu plus loin, c'est en me tenant sur les épaules de géants.*
>
> — Isaac Newton, lettre à Robert Hooke (1676)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Tir avec frottements »

M2 — Lois de Newton

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Définir la quantité de mouvement d'un point et d'un système ; utiliser le centre d'inertie.
- Énoncer les trois lois de Newton et discuter le caractère galiléen d'un référentiel.
- Faire un bilan des forces usuelles (contact, ressort, fil, Archimède, frottements fluides).
- Exploiter les lois de Coulomb du frottement de glissement.
- Mettre en équation un mouvement avec le PFD ; résoudre analytiquement ou numériquement.
- Étudier un tir dans le champ de pesanteur, avec ou sans frottement fluide.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Tir avec frottements » permet de comparer en direct la trajectoire parabolique et la trajectoire freinée, en faisant varier la vitesse initiale, l'angle de tir et le coefficient de frottement.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Éléments cinétiques . . . 3
I.1 Masse et quantité de mouvement . . . 3
I.2 Centre d'inertie d'un système . . . 3
II Les trois lois de Newton . . . 4
II.1 Première loi : principe d'inertie . . . 4
II.2 Référentiels galiléens usuels . . . 4
II.3 Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique . . . 5
II.4 Troisième loi : principe des actions réciproques . . . 5
III Les forces usuelles . . . 7
III.1 Les quatre interactions fondamentales . . . 7
III.2 Forces à distance . . . 7
III.3 Réaction d'un support et lois de Coulomb du frottement . . . 8
III.4 Tension d'un fil . . . 9
III.5 Force de rappel d'un ressort . . . 9
III.6 Poussée d'Archimède . . . 9
III.7 Forces de frottement fluide . . . 10
IV Méthode de résolution d'un problème de dynamique . . . 12
V Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme . . . 13
V.1 Mise en équation . . . 13
V.2 Trajectoire, flèche et portée . . . 13
VI Mouvement avec frottement fluide . . . 15
VI.1 Frottement linéaire : chute verticale . . . 15
VI.2 Tir avec frottement linéaire . . . 16
VI.3 Frottement quadratique . . . 17
VI.4 Résolution numérique par la méthode d'Euler . . . 17
VII Synthèse . . . 18
VIII Exercices d'approfondissement . . . 19
IX Classiques des concours . . . 21

I Éléments cinétiques

I.1 Masse et quantité de mouvement

Au chapitre M1, on a décrit le mouvement sans se soucier de ses causes : c'était la cinématique. La **dynamique** relie le mouvement aux **actions mécaniques** qui le provoquent. Il faut pour cela une grandeur qui mesure la « résistance » d'un corps à la modification de son mouvement : la masse.

Définition — Masse inertielle R

La **masse** m d'un point matériel est une grandeur scalaire positive, **additive** et **invariante** (indépendante du référentiel et du temps en mécanique classique). Elle s'exprime en kilogrammes (kg).

Définition — Quantité de mouvement R

La **quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m, de vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, est

$$\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m\,\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} \qquad [\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}]$$

Pour un système de N points M_i de masses m_i : $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)$. Sa dérivée $m\vec{a}$ est parfois appelée **quantité d'accélération**.

Remarque

La masse joue deux rôles a priori distincts : la **masse inerte** m_i mesure la résistance à la mise en mouvement (elle apparaît dans $m\vec{a}$), la **masse grave** m_g mesure la sensibilité à la gravitation (elle apparaît dans le poids). Le **principe d'équivalence** postule $m_i = m_g$; il est vérifié expérimentalement à mieux que 10^{-14} près (satellite MICROSCOPE, 2022). C'est lui qui explique que tous les corps tombent de la même façon dans le vide.

I.2 Centre d'inertie d'un système

Définition — Centre d'inertie (ou centre de masse)

Le centre d'inertie G d'un système de points $\{M_i, m_i\}$ de masse totale $m = \sum_i m_i$ est le barycentre des points affectés de leurs masses :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}.$$

Quantité de mouvement d'un système R D

En dérivant la relation précédente par rapport au temps dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{p}_{/\mathcal{R}} = \sum_i m_i\,\vec{v}(M_i) = m\,\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}}$$

La quantité de mouvement d'un système est celle d'un point fictif placé en G et portant toute la masse.

Remarque

C'est ce résultat qui justifie le modèle du point matériel pour un solide en **translation** : tous ses points ont la même vitesse, celle de G. Pour un solide en rotation, on étudiera aussi le moment cinétique (chapitre M6).

II Les trois lois de Newton

II.1 Première loi : principe d'inertie

Définition — Point isolé, pseudo-isolé

Un point est **isolé** s'il n'est soumis à aucune action mécanique ; il est **pseudo-isolé** si les actions qu'il subit se compensent ($\sum \vec{F} = \vec{0}$).

Première loi de Newton (principe d'inertie) R

Il existe une classe de référentiels, dits **galiléens**, dans lesquels tout point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit animé d'un **mouvement rectiligne uniforme**.

✗ Attention, erreurs fréquentes

La première loi n'est pas un cas particulier de la deuxième : elle **définit** les référentiels dans lesquels la deuxième loi s'applique. Un palet sur une table à coussin d'air, immobile dans le wagon d'un train qui freine, se met en mouvement sans qu'aucune force horizontale ne s'exerce : le référentiel du wagon n'est alors pas galiléen.

II.2 Référentiels galiléens usuels

Relativité galiléenne R

Tout référentiel en **translation rectiligne uniforme** par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen. Réciproquement, deux référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Le caractère galiléen d'un référentiel n'est jamais absolu : il dépend de la durée de l'expérience et de la précision recherchée.

Référentiel	Définition	Galiléen si...
de Copernic (ou héliocentrique)	origine au centre de masse du système solaire (quasiment le centre du Soleil), axes vers trois étoiles lointaines	excellente approximation, même sur des milliers d'années
géocentrique	origine au centre de la Terre, axes parallèles à ceux de Copernic	durée $\ll 1\,\text{an}$ (révolution de la Terre)
terrestre	lié au sol (laboratoire)	durée $\ll 1\,\text{jour}$ (rotation propre)

Remarque

Le pendule de Foucault (1851), dont le plan d'oscillation tourne en environ $32\,\text{h}$ à Paris, met en évidence le caractère non galiléen du référentiel terrestre sur des durées de quelques heures. L'étude des référentiels

non galiléens relève de la deuxième année.

II.3 Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique

Deuxième loi de Newton (PFD) R

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces qui s'exercent sur lui :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{F} \qquad m \text{ constante} \iff \qquad m\,\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \sum \vec{F}$$

Une **force** modélise une action mécanique : c'est un vecteur (direction, sens, norme en newtons, $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$) appliqué en un point.

Théorème de la résultante cinétique (TRC) R D

Pour un système fermé de masse m et de centre d'inertie G, dans un référentiel galiléen :

$$m\,\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Seules les forces **extérieures** interviennent : les forces intérieures se compensent deux à deux d'après la troisième loi.

II.4 Troisième loi : principe des actions réciproques

Troisième loi de Newton R

Si un point A exerce sur un point B la force $\vec{F}_{A\to B}$, alors B exerce sur A la force

$$\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$$

ces deux forces ayant pour support commun la droite (AB).

✗ Attention, erreurs fréquentes

Les deux forces réciproques s'appliquent à **deux systèmes différents** : elles ne se compensent jamais dans un même bilan. La pomme attire la Terre avec la même force que la Terre attire la pomme ; l'accélération de la Terre est simplement environ 10^{24} fois plus faible.

☞ **Exercices d'application**

EXERCICE 1 Ascenseur

Une cabine d'ascenseur de masse $m = 800\,\text{kg}$ est suspendue à un câble. On prend $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Q-1) Calculer la tension du câble lorsque la cabine monte à vitesse constante.

Q-2) Même question lors du démarrage à la montée, avec une accélération de $1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, puis lors du freinage à la montée avec une décélération de même norme.

Q-3) Que « ressent » un passager de $70\,\text{kg}$ posé sur un pèse-personne dans chacune des phases ?

Correction

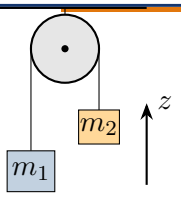
Système : la cabine, dans le référentiel terrestre supposé galiléen ; axe (Oz) vertical ascendant. Forces : poids $-mg\,\vec{u}_z$, tension $T\vec{u}_z$. PFD : $m\ddot{z} = T - mg$.

Q-1) $\ddot{z} = 0$: $T = mg = 7{,}85\,\text{kN}$.

Q-2) Démarrage : $\ddot{z} = +1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $T = m(g+\ddot{z}) = 9{,}05\,\text{kN}$. Freinage : $\ddot{z} = -1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $T = m(g-1{,}5) = 6{,}65\,\text{kN}$.

Q-3) Le pèse-personne mesure la réaction $N = m'(g+\ddot{z})$: il affiche $N/g = 80{,}7\,\text{kg}$ au démarrage, $70\,\text{kg}$ en régime uniforme et $59{,}3\,\text{kg}$ au freinage. On se sent « plus lourd » lorsque l'accélération est dirigée vers le haut.

EXERCICE 2 Machine d'Atwood



Deux masses $m_1 = 3{,}0\,\text{kg}$ et $m_2 = 2{,}0\,\text{kg}$ sont reliées par un fil inextensible et de masse négligeable passant sur une poulie idéale (sans masse, sans frottement), de sorte que la tension T est la même de part et d'autre.

Q-1) Justifier que les deux masses ont des accélérations opposées.

Q-2) Établir l'accélération a de m_1 (vers le bas) et la tension T. Applications numériques.

Q-3) Quel intérêt historique présente ce dispositif pour mesurer g ?

Correction

Q-1) Le fil est inextensible : la somme des longueurs des deux brins est constante, donc $\dot{z}_1 = -\dot{z}_2$ et $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$.

Q-2) En projetant le PFD sur la verticale ascendante, avec $\ddot{z}_1 = -a$ et $\ddot{z}_2 = +a$: $-m_1 a = T - m_1 g$ et $m_2 a = T - m_2 g$. Par différence :

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g = 1{,}96\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}, \qquad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g = 23{,}5\,\text{N}.$$

Q-3) En choisissant $m_1 \approx m_2$, l'accélération devient très inférieure à g : le mouvement est lent et les durées se mesurent facilement, ce qui permettait à Atwood (1784) de vérifier les lois du mouvement uniformément accéléré.

III Les forces usuelles

III.1 Les quatre interactions fondamentales

Toutes les forces connues se ramènent à quatre interactions fondamentales :

Interaction	Concerne	Portée	Intensité relative
forte	quarks, nucléons	$10^{-15}\,\mathrm{m}$	1
électromagnétique	particules chargées	infinie $(1/r^2)$	10^{-2}
faible	toutes les particules	$10^{-18}\,\mathrm{m}$	10^{-6}
gravitationnelle	toutes les masses	infinie $(1/r^2)$	10^{-38}

À notre échelle, seules les interactions gravitationnelle et électromagnétique se manifestent : toutes les **forces de contact** (réaction, frottements, tension, pression) sont d'origine électromagnétique.

III.2 Forces à distance

Interaction gravitationnelle R

Deux points A et B de masses m_A et m_B, distants de $r = AB$, s'attirent :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\mathcal{G}\,\frac{m_A m_B}{r^2}\,\vec{u}_{A\to B}, \qquad \mathcal{G} = 6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$$

où $\vec{u}_{A\to B}$ est le vecteur unitaire dirigé de A vers B.

Définition — Poids et champ de pesanteur

Le **poids** d'un corps de masse m est $\vec{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur local. Il inclut l'attraction terrestre et un petit effet de la rotation de la Terre ; à la surface, $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, de $9{,}78\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ à l'équateur à $9{,}83\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ aux pôles (aplatissement et rotation de la Terre). Sur un domaine de quelques kilomètres, $\vec{g}$ est considéré **uniforme**.

Interaction électrostatique (loi de Coulomb) R

Deux charges ponctuelles q_A et q_B immobiles, distantes de r :

$$\vec{F}_{A\to B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_A q_B}{r^2}\,\vec{u}_{A\to B}, \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$$

Attractive si les charges sont de signes opposés, répulsive sinon. On la retrouvera au chapitre M4.

Ordres de grandeur

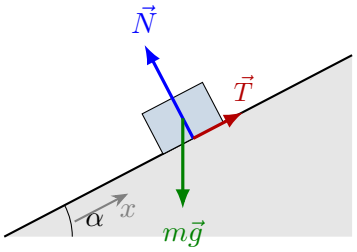
Dans l'atome d'hydrogène ($r = 53\,\mathrm{pm}$), le rapport de la force électrique à la force gravitationnelle entre le proton et l'électron vaut $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\mathcal{G}m_p m_e} \approx 2\times10^{39}$: à l'échelle atomique, la gravitation est totalement négligeable.

III.3 Réaction d'un support et lois de Coulomb du frottement

Remarque

Il faut distinguer deux familles de forces. Les **lois de force** (poids, gravitation, Coulomb, ressort, frottements fluides) donnent l'expression de la force en fonction de la position ou de la vitesse. Les **forces de liaison** (réaction d'un support, tension d'un fil) n'ont pas d'expression a priori : elles prennent la valeur nécessaire pour imposer la contrainte (rester sur la table, garder le fil tendu) et se **déduisent** du PFD. Une boîte posée sur une table reçoit une réaction opposée à son poids ; si on appuie dessus, la réaction augmente ; si on la soulève, elle diminue et s'annule au décollement.

Un solide posé sur un support subit une action de contact, la **réaction** $\vec{R}$, que l'on décompose en une composante **normale** $\vec{N}$ (perpendiculaire au support, dirigée vers le solide) et une composante **tangentielle** $\vec{T}$ (le frottement).



Lois de Coulomb du frottement de glissement R

Pour un solide en translation sur un support fixe :

- **non-décollement** : le contact existe tant que $N = \left\|\vec{N}\right\| > 0$; le solide décolle lorsque N s'annule ;
- **non-glissement** : tant que le solide ne glisse pas, $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s \left\|\vec{N}\right\|$;
- **glissement** : lorsque le solide glisse à la vitesse $\vec{v}$, $\vec{T}$ est opposée à $\vec{v}$ et $\left\|\vec{T}\right\| = f_d \left\|\vec{N}\right\|$.

f_s et f_d sont les coefficients de frottement statique et dynamique ($f_d \lesssim f_s$, souvent pris égaux à f).

Remarque

- Les lois de Coulomb sont **phénoménologiques** : f dépend des matériaux et de l'état des surfaces, mais pas de l'aire de contact ni de la vitesse.
- Au repos, $\vec{R}$ reste à l'intérieur d'un **cône de frottement** de demi-angle $\varphi = \arctan f_s$ autour de la normale. Un solide posé sur un plan incliné d'angle α reste immobile tant que $\tan\alpha \leq f_s$.
- Sans frottement, la réaction est normale : $\vec{R} = \vec{N}$.

Ordres de grandeur

Acier sur acier : $f \approx 0{,}2$; pneu sur route sèche : $0{,}7$ à 1 ; pneu sur route mouillée : $0{,}4$; ski sur neige : $0{,}05$; Téflon sur Téflon : $0{,}04$.

III.4 Tension d'un fil

Définition — Tension d'un fil

Un fil tendu exerce sur un objet accroché à son extrémité une force $\vec{T}$ dirigée **selon le fil, vers le fil**. Pour un fil **idéal** (inextensible, sans masse, parfaitement souple), la norme de la tension est la même en tout point du fil, même lorsqu'il passe sur une poulie idéale.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Un fil ne peut que tirer : la condition $T \geq 0$ traduit le fait que le fil reste tendu. Si le calcul donne $T < 0$, le fil est détendu et le modèle doit être changé.

III.5 Force de rappel d'un ressort

Loi de Hooke R

Un ressort idéal (sans masse) de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, de longueur ℓ, exerce sur l'objet fixé à son extrémité la force

$$\vec{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{ext}}$$

où $\vec{u}_{\text{ext}}$ est le vecteur unitaire dirigé selon l'axe du ressort, vers l'extérieur du ressort (de l'attache fixe vers l'objet). Le ressort tire lorsqu'il est allongé ($\ell > \ell_0$) et pousse lorsqu'il est comprimé.

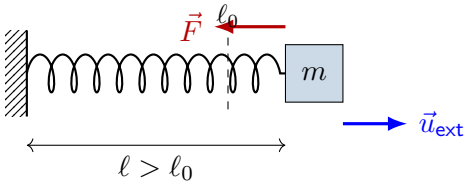


Fig. 1 : Ressort allongé : la force de rappel est dirigée vers l'attache.

III.6 Poussée d'Archimède

Poussée d'Archimède R

Un corps de volume V totalement immergé dans un fluide au repos de masse volumique ρ_f subit de la part du fluide une force verticale, dirigée vers le haut, égale à l'opposé du poids du fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -\rho_f\, V\, \vec{g}$$

Elle s'applique au centre de masse du fluide déplacé (centre de poussée). Elle résulte des forces de pression et sera démontrée en statique des fluides.

Remarque

Dans l'air, la poussée d'Archimède sur un solide est négligeable devant son poids ($\rho_{\text{air}}/\rho \approx 10^{-3}$ à 10^{-4}) ; dans l'eau, elle ne l'est jamais pour un corps usuel.

III.7 Forces de frottement fluide

Un corps en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide au repos subit une force de **traînée** opposée à $\vec{v}$. Son expression dépend du **nombre de Reynolds** $\mathcal{R}_e = \dfrac{\rho_f\, v\, L}{\eta}$ (L : taille de l'objet, η : viscosité dynamique du fluide), qui compare les effets d'inertie du fluide aux effets visqueux.

Modèles de frottement fluide R

- **Frottement linéaire** (faibles vitesses, $\mathcal{R}_e \lesssim 1$) : $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$. Pour une sphère de rayon r : $\alpha = 6\pi\eta r$ (**formule de Stokes**).
- **Frottement quadratique** ($10^3 \lesssim \mathcal{R}_e \lesssim 10^5$) : $\vec{f} = -\beta\,\|\vec{v}\|\,\vec{v}$, avec $\beta = \frac{1}{2}\rho_f\, C_x\, S$ (S : maître-couple, C_x : coefficient de traînée sans dimension).

Ordres de grandeur

Viscosités : air $1{,}8\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}$; eau $1{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$; glycérine $1{,}5\,\mathrm{Pa\cdot s}$. Coefficients C_x : avion de ligne $0{,}03$; voiture moderne $0{,}25$ à $0{,}35$; sphère lisse $0{,}45$; cycliste $0{,}7$ à $0{,}9$; parachute 1 à 2. Pour une sphère, C_x dépend du nombre de Reynolds et de l'état de surface : les alvéoles d'une balle de golf retardent le décollement de la couche limite et diminuent la traînée. Une voiture à $130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^7.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 — **Glissade sur un plan incliné** ✦✦✧✧✧

Un bloc de masse m est lâché sans vitesse sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. Le coefficient de frottement (statique et dynamique) vaut f.

Q-1) À quelle condition sur α le bloc se met-il en mouvement ?

Q-2) Exprimer alors son accélération. A.N. : $\alpha = 30°$, $f = 0{,}30$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-3) Quelle vitesse atteint-il après avoir parcouru $d = 2{,}0\,\mathrm{m}$?

Correction

Axe (Ox) selon la ligne de plus grande pente, vers le bas ; (Oy) normal au plan. Forces : $m\vec{g}$, $\vec{N} = N\vec{u}_y$, $\vec{T} = T\vec{u}_x$.

Q-1) À l'équilibre : $0 = mg\sin\alpha + T$ et $0 = N - mg\cos\alpha$, donc $|T| = mg\sin\alpha$ et $N = mg\cos\alpha$. L'équilibre est possible si $|T| \le fN$, soit $\tan\alpha \le f$. Le bloc glisse donc si $\tan\alpha > f$.

Q-2) En glissement vers le bas : $T = -fN = -fmg\cos\alpha$ et $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$:

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 2{,}36\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \quad (\tan 30° = 0{,}577 > 0{,}30).$$

Q-3) Mouvement uniformément accéléré : $v^2 = 2\ddot{x}\,d$, soit $v = 3{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

EXERCICE 4 Bille dans la glycérine

Une bille d'acier ($\rho_a = 7800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) de rayon $r = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ est lâchée sans vitesse dans de la glycérine ($\rho_g = 1260\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\eta = 1{,}49\,\mathrm{Pa\cdot s}$). On adopte la formule de Stokes.

Q-1) Faire le bilan des forces et établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v (axe vertical descendant).

Q-2) En déduire la vitesse limite v_ℓ et le temps caractéristique τ d'établissement du régime permanent.

Q-3) Vérifier a posteriori la validité de la formule de Stokes.

Correction

Q-1) Poids mg, poussée d'Archimède $-\rho_g V g$, frottement $-6\pi\eta r v$, avec $m = \rho_a V$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. PFD :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right) g, \qquad \tau = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho_a r^2}{9\eta}.$$

Q-2) En régime permanent, $v_\ell = \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right) g\tau = \frac{2r^2(\rho_a - \rho_g)g}{9\eta} = 9{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\tau = 1{,}2\,\mathrm{ms}$: le régime permanent est atteint quasi instantanément.

Q-3) $\mathcal{R}_e = \frac{\rho_g v_\ell\,(2r)}{\eta} = 1{,}6 \times 10^{-2} \ll 1$: le modèle linéaire est justifié. C'est le principe du **viscosimètre à chute de bille**.

EXERCICE 5 Partie immergée d'un iceberg

Un iceberg de glace ($\rho_g = 917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) flotte en équilibre dans l'eau de mer ($\rho_m = 1025\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$).

Q-1) Quelle fraction de son volume est immergée ?

Q-2) Un glaçon flotte dans un verre d'eau douce. Le niveau monte-t-il lorsqu'il fond ?

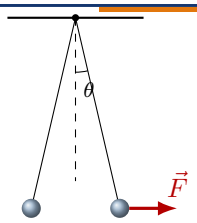
Correction

Q-1) À l'équilibre, la poussée d'Archimède (sur le seul volume immergé V_i) compense le poids : $\rho_m V_i g = \rho_g V g$, d'où $\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g}{\rho_m} = 89\,\%$. On ne voit que $11\,\%$ de l'iceberg.

Q-2) Le glaçon déplace un volume d'eau douce de masse égale à la sienne ; une fois fondu, il occupe exactement ce volume : le niveau ne change pas. (Pour la banquise qui fond dans l'eau de mer, plus dense, le niveau monte très légèrement.)

EXERCICE 6 Pendule électrostatique

Deux petites boules de polystyrène métallisé, de masse $m = 0{,}80\,\mathrm{g}$ chacune, sont suspendues au même point par deux fils de longueur $\ell = 25\,\mathrm{cm}$. Elles portent la même charge q et, à l'équilibre, les fils font chacun l'angle $\theta = 12°$ avec la verticale.



Q-1) Faire le bilan des forces sur une boule et écrire la condition d'équilibre.

Q-2) En déduire $|q|$. On donne $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$.

Correction

Q-1) Poids $m\vec{g}$, tension $\vec{T}$ dirigée vers le point d'attache, force électrostatique horizontale répulsive $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ avec $d = 2\ell\sin\theta$. À l'équilibre : $T\cos\theta = mg$ et $T\sin\theta = F$, soit $F = mg\tan\theta$.

Q-2) $|q| = d\sqrt{4\pi\varepsilon_0\, mg\tan\theta}$ avec $d = 10{,}4\,\text{cm}$: $|q| = 4{,}5\times10^{-8}\,\text{C}$, soit environ 3×10^{11} charges élémentaires.

IV Méthode de résolution d'un problème de dynamique

☞ Méthode — Appliquer le principe fondamental de la dynamique M

1. **Définir le système** étudié (un point, un solide en translation, un ensemble de solides).
2. **Choisir le référentiel** et justifier son caractère galiléen.
3. **Choisir un repère et une base de projection** adaptés à la géométrie : cartésienne pour un mouvement rectiligne ou parabolique, polaire pour un mouvement circulaire (chapitre M1).
4. **Faire le bilan des forces** sur un schéma clair : forces à distance (poids) puis forces de contact (une par objet touchant le système). Ne pas oublier les forces inconnues (réaction, tension).
5. **Appliquer le PFD** et le **projeter** sur les axes : on obtient des équations différentielles et des relations donnant les forces inconnues.
6. **Résoudre** avec les conditions initiales, puis **vérifier** : homogénéité, cas limites, signes, ordres de grandeur, conditions de validité ($N \geq 0$, $T \geq 0$, $|T_{\text{frot}}| \leq fN$).

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La « force centrifuge » ou la « force d'inertie » n'existent pas dans un référentiel galiléen : elles n'apparaissent jamais dans un bilan de ce chapitre.
- $m\vec{a}$ n'est pas une force : il ne faut jamais l'ajouter au bilan.
- La réaction normale d'un support n'est pas toujours égale à mg : elle se déduit du PFD.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 Deux blocs poussés ✦✧✧✧✧

Deux blocs de masses $m_1 = 2{,}0\,\text{kg}$ et $m_2 = 3{,}0\,\text{kg}$ sont posés côte à côte sur une table horizontale sans frottement. On pousse le bloc 1 avec une force horizontale constante $F = 10\,\text{N}$.

Q-1) Calculer l'accélération de l'ensemble.

Q-2) Calculer la force de contact exercée par le bloc 1 sur le bloc 2. Que devient-elle si l'on pousse le bloc 2 ?

Correction

Q-1) Système $\{1+2\}$: la force de contact est intérieure. TRC horizontal : $(m_1+m_2)a = F$, $a = 2{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Q-2) Système $\{2\}$ seul : $m_2 a = F_{1\to 2}$, soit $F_{1\to 2} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}F = 6{,}0\,\text{N}$. En poussant le bloc 2, la force de contact vaut $\dfrac{m_1}{m_1+m_2}F = 4{,}0\,\text{N}$: le bloc poussé « transmet » la force nécessaire à l'accélération de l'autre.

EXERCICE 8 Masse en mouvement circulaire au bout d'un fil

Une bille de masse m, attachée à un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité O est fixe, décrit un cercle vertical. On repère la bille par l'angle θ entre le fil et la verticale descendante.

Q-1) Établir l'équation différentielle du mouvement et exprimer la tension du fil en fonction de θ, $\dot\theta$, m, g, ℓ.

Q-2) En déduire une condition sur la vitesse v_h au sommet du cercle pour que le fil reste tendu.

Correction

Q-1) En base polaire ($\vec{u}_r$ dirigé de O vers la bille) : $\vec{a} = -\ell\dot\theta^2\vec{u}_r + \ell\ddot\theta\vec{u}_\theta$ (chapitre M1). Forces : $m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$ et $\vec{T} = -T\vec{u}_r$. Projection sur $\vec{u}_\theta$: $m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta$, soit $\ddot\theta + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0$ (équation du pendule simple, chapitre M5). Projection sur $\vec{u}_r$: $-m\ell\dot\theta^2 = mg\cos\theta - T$, d'où

$$T = m\ell\dot\theta^2 + mg\cos\theta.$$

Q-2) Au sommet ($\theta = \pi$, $v_h = \ell\left|\dot\theta\right|$) : $T = \dfrac{mv_h^2}{\ell} - mg \geq 0$, soit $v_h \geq \sqrt{g\ell}$. Le chapitre M3 permettra de relier v_h à la vitesse au point bas.

V Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

V.1 Mise en équation

On lance un projectile, assimilé à un point matériel de masse m, depuis l'origine O avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant l'angle α avec l'horizontale. On néglige tout frottement ; le référentiel terrestre est galiléen et $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$ est uniforme.

Équations horaires du tir sans frottement R D

Le PFD donne $m\vec{a} = m\vec{g}$, soit $\vec{a} = \vec{g}$: le mouvement est **indépendant de la masse**. Deux intégrations successives donnent

$$\vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{v}_0, \qquad \overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0\,t.$$

Le mouvement est **plan** (dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$) et, en projection :

$$x(t) = v_0\cos\alpha\;t, \qquad z(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\;t$$

V.2 Trajectoire, flèche et portée

Caractéristiques de la trajectoire R D

En éliminant le temps ($t = x/(v_0 \cos\alpha)$), la trajectoire est une **parabole** :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 + x \tan\alpha$$

- **Flèche** (altitude maximale), atteinte quand $\dot{z} = 0$: $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.
- **Portée** (abscisse du point de retour à $z = 0$) : $D = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$, maximale pour $\alpha = 45°$: $D_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}$.

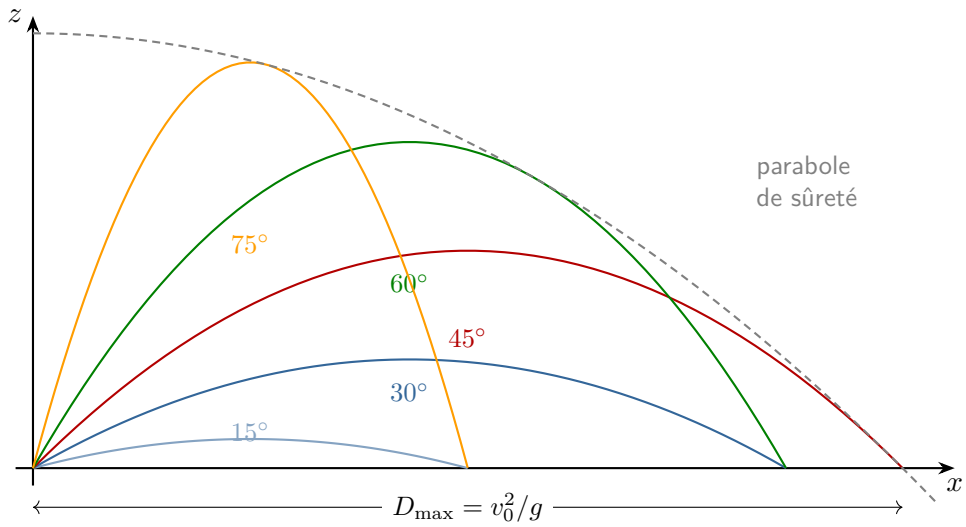


Fig. 2 : Trajectoires pour une même norme v_0 et différents angles de tir. Les angles complémentaires ($30°$ et $60°$) ont la même portée. L'enveloppe des trajectoires est la parabole de sûreté $z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$.

> **Remarque**
>
> Tous les points situés sous la **parabole de sûreté** peuvent être atteints avec la vitesse v_0 (en général par deux angles de tir) ; aucun point situé au-dessus ne peut l'être.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 9 Tir d'un ballon ✦✧✧✧✧

Un ballon est frappé depuis le sol avec une vitesse $v_0 = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ faisant l'angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale. On néglige les frottements.

Q-1) Calculer la portée D, la flèche h et la durée t_v du vol.

Q-2) Avec quel autre angle obtiendrait-on la même portée pour $v_0 = 22\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

Correction

Q-1) $D = \dfrac{v_0^2}{g} = 40{,}8\,\text{m}$; $h = \dfrac{v_0^2}{4g} = 10{,}2\,\text{m}$; $t_v = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 2{,}88\,\text{s}$.

Q-2) $\sin(2\alpha') = \dfrac{gD}{v_0'^2} = \dfrac{20^2}{22^2} = 0{,}826$: $2\alpha' = 55{,}7°$ ou $124{,}3°$, soit $\alpha' = 27{,}9°$ (tir tendu) ou $\alpha' = 62{,}1°$ (tir en cloche).

EXERCICE 10 Viser une cible : la parabole de sûreté

✦✦✧✧✧

Un canon placé en O tire des obus de vitesse initiale v_0 fixée, l'angle α étant réglable.

Q-1) En posant $u = \tan\alpha$, montrer que la condition pour atteindre le point (X, Z) s'écrit $\dfrac{gX^2}{2v_0^2}u^2 - Xu + Z + \dfrac{gX^2}{2v_0^2} = 0$.

Q-2) En déduire l'équation de la parabole de sûreté.

Correction

Q-1) On reporte $1/\cos^2\alpha = 1 + u^2$ dans l'équation de la trajectoire : $Z = -\dfrac{gX^2}{2v_0^2}(1+u^2) + Xu$, ce qui donne l'équation proposée.

Q-2) Le point est accessible si cette équation du second degré en u admet des solutions réelles : $\Delta = X^2 - 4\dfrac{gX^2}{2v_0^2}\left(Z + \dfrac{gX^2}{2v_0^2}\right) \geq 0$, soit

$$Z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_0^2}.$$

La frontière ($\Delta = 0$, une seule solution) est la parabole de sûreté.

VI Mouvement avec frottement fluide

VI.1 Frottement linéaire : chute verticale

Un point de masse m est lâché sans vitesse et subit son poids et la force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ (on néglige ici la poussée d'Archimède ou on l'inclut dans un poids apparent). Axe (Oz) vertical descendant.

Vitesse limite et temps caractéristique R D

Le PFD projeté donne l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = g \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{m}{\alpha}$$

De solution, pour une vitesse initiale $v(0) = v_0$ quelconque :

$$v(t) = v_\ell + (v_0 - v_\ell)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad v_\ell = g\tau = \frac{mg}{\alpha}.$$

Quelle que soit v_0 (même supérieure à v_ℓ), la vitesse tend vers la **vitesse limite** v_ℓ, obtenue quand le frottement compense le poids ; le régime permanent est atteint à $1\,\%$ près au bout de $\approx 5\tau$ ($\mathrm{e}^{-4{,}6} = 0{,}01$).

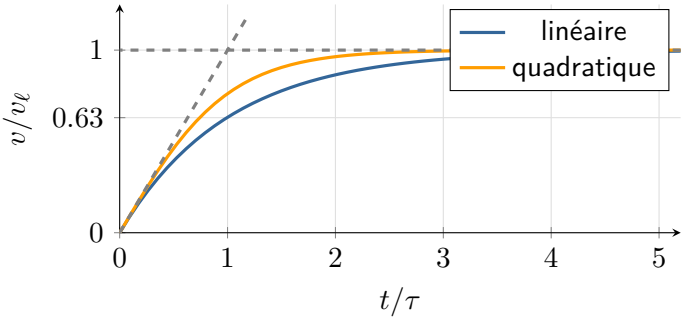


Fig. 3 : Établissement de la vitesse limite. La tangente à l'origine (pente g) coupe l'asymptote en $t = \tau$ dans le cas linéaire ; dans le cas quadratique, $\tau = v_\ell/g$.

☞ Méthode — Adimensionner une équation M

On pose $\tilde{t} = t/\tau$ et $\tilde{v} = v/v_\ell$: l'équation devient $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tilde{t}} + \tilde{v} = 1$, sans aucun paramètre. Pour $v_0 = 0$, toutes les chutes avec frottement linéaire sont décrites par la **même courbe** universelle $\tilde{v} = 1 - \mathrm{e}^{-\tilde{t}}$; seules les échelles τ et v_ℓ changent. L'adimensionnement fait apparaître les échelles caractéristiques du problème et réduit le nombre de paramètres.

VI.2 Tir avec frottement linéaire

Trajectoire freinée D

Avec $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\vec{u}_x + v_0\sin\alpha\,\vec{u}_z$ et $\vec{u}_z$ ascendant, le PFD s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}$. Les deux projections se découplent :

$$v_x = v_0\cos\alpha\,\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad v_z = -v_\ell + (v_0\sin\alpha + v_\ell)\,\mathrm{e}^{-t/\tau},$$

$$x = v_0\cos\alpha\,\tau\big(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\big), \qquad z = (v_0\sin\alpha + v_\ell)\,\tau\big(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\big) - v_\ell\,t.$$

- Quand $t \to \infty$, $x \to x_\infty = v_0\tau\cos\alpha$: la trajectoire admet une **asymptote verticale**, parcourue à la vitesse limite.
- La trajectoire n'est plus symétrique : la descente est plus raide que la montée.
- Pour $t \ll \tau$, un développement limité de l'exponentielle redonne les équations du tir sans frottement : le frottement est négligeable pour des durées de vol courtes devant τ.

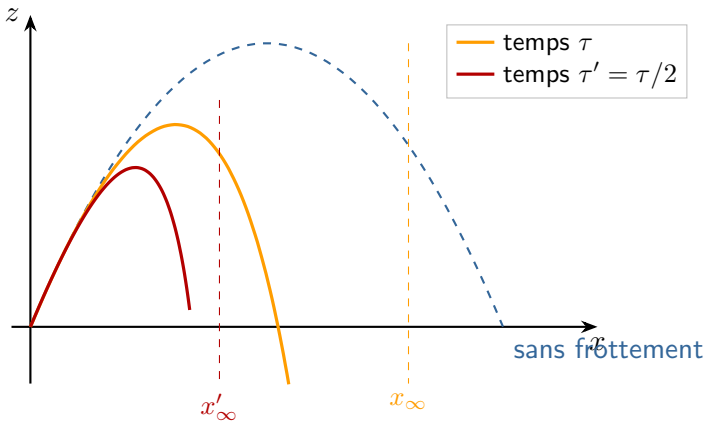


Fig. 4 : Trajectoires pour une même vitesse initiale : plus le frottement est fort (τ petit), plus l'asymptote verticale est proche.

VI.3 Frottement quadratique

Chute verticale avec frottement quadratique R D

Pour une chute verticale (axe descendant) avec $\vec{f} = -\beta v\,\vec{v}$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \beta v^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\Big(1 - \frac{v^2}{v_\ell^2}\Big), \qquad v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}.$$

L'équation est **non linéaire** mais à variables séparables. Pour $v(0) = 0$, avec $\tau = v_\ell/g$:

$$v(t) = v_\ell\,\tanh\Big(\frac{t}{\tau}\Big), \qquad z(t) = v_\ell\,\tau\,\ln\cosh\Big(\frac{t}{\tau}\Big)$$

☞ Méthode — Trouver un temps caractéristique par analyse dimensionnelle M

Les seuls paramètres sont m (kg), g ($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) et β ($\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$). On cherche $\tau = m^a g^b \beta^c$: l'homogénéité impose $a + c = 0$ (kg), $b - c = 0$ (m) et $-2b = 1$ (s), d'où $b = c = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$ et $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{\beta g}} = \dfrac{v_\ell}{g}$. En posant $v^\star = v/v_\ell$ et $t^\star = t/\tau$, l'équation devient universelle : $\dfrac{\mathrm{d}v^\star}{\mathrm{d}t^\star} + v^{\star 2} = 1$.

Remarque

Démonstration (séparation des variables) : $\dfrac{\mathrm{d}v}{1 - v^2/v_\ell^2} = g\,\mathrm{d}t$ s'intègre en $v_\ell\,\mathrm{argth}(v/v_\ell) = gt$. Pour un mouvement à deux dimensions, les équations sur v_x et v_z sont couplées par $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$: il n'y a plus de solution analytique et l'on recourt à une résolution numérique.

VI.4 Résolution numérique par la méthode d'Euler

☞ Méthode — Méthode d'Euler explicite M

On discrétise le temps avec un pas Δt petit devant les temps caractéristiques. Connaissant $\vec{r}_n$ et $\vec{v}_n$ à

l'instant t_n, on calcule l'accélération $\vec{a}_n$ donnée par le PFD, puis

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}_n\,\Delta t, \qquad \vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n\,\Delta t.$$

On vérifie la convergence en divisant Δt par deux : le résultat ne doit pas changer significativement. Sur l'équation adimensionnée, il faut $\Delta t^\star \ll 1$: avec $\Delta t^\star = 0{,}02$ la solution numérique est indiscernable de $\tanh t^\star$, alors qu'avec $\Delta t^\star \approx 1$ elle oscille autour de la vitesse limite. Cette condition est nécessaire mais pas toujours suffisante.

Python — tir avec frottement quadratique (Euler)

```
import numpy as np
m, g, beta = 0.45, 9.81, 0.012                    # ballon : kg, m/s², kg/m
v0, alpha, dt = 25.0, np.radians(40), 1e-3
x, z = 0.0, 0.0
vx, vz = v0*np.cos(alpha), v0*np.sin(alpha)
X, Z = [x], [z]
while z >= 0:
    v = np.hypot(vx, vz)
    ax, az = -beta/m*v*vx, -g - beta/m*v*vz       # PFD
    x, z = x + vx*dt, z + vz*dt
    vx, vz = vx + ax*dt, vz + az*dt
    X.append(x); Z.append(z)
print("portee :", round(X[-1], 1), "m")           # environ 40 m (63 m sans frottement)
```

☞ Exercices d'application

EXERCICE 11 Chute libre d'un parachutiste ✦✦✧✧✧

Un parachutiste de masse $m = 80\,\text{kg}$ (équipement compris) chute verticalement. La force de frottement de l'air est quadratique : $f = \beta v^2$ avec $\beta_1 = 0{,}30\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ parachute fermé et $\beta_2 = 24\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ parachute ouvert.

Q-1) Calculer les vitesses limites dans les deux cas.

Q-2) Parachute fermé, en partant d'une vitesse nulle, au bout de combien de temps atteint-il $95\,\%$ de sa vitesse limite ?

Correction

Q-1) $v_{\ell 1} = \sqrt{mg/\beta_1} = 51\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (environ $185\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) ; $v_{\ell 2} = \sqrt{mg/\beta_2} = 5{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, vitesse comparable à celle d'un saut de $1{,}7\,\text{m}$ de haut.

Q-2) $v = v_{\ell 1}\tanh(t/\tau_1)$ avec $\tau_1 = v_{\ell 1}/g = 5{,}2\,\text{s}$. $\tanh(t/\tau_1) = 0{,}95$ donne $t = \tau_1\,\text{argth}(0{,}95) = 1{,}83\,\tau_1 = 9{,}5\,\text{s}$.

VII Synthèse

★ À retenir

- Quantité de mouvement : $\vec{p} = m\vec{v}$; pour un système, $\vec{p} = m\vec{v}(G)$.
- **Principe d'inertie** : définit les référentiels galiléens (Copernic, géocentrique si $\Delta t \ll 1\,\text{an}$, terrestre si $\Delta t \ll 1\,\text{jour}$).
- **PFD** dans un référentiel galiléen : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$; **TRC** pour un système : $m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$.

▶ **Actions réciproques** : $\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$, sur deux systèmes distincts.

Force	Expression	Remarques
Poids	$m\vec{g}$	$g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, uniforme localement
Gravitation	$-\mathcal{G}\dfrac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{A\to B}$	toujours attractive
Coulomb	$\dfrac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{A\to B}$	attractive ou répulsive
Réaction	$\vec{N}+\vec{T}$	$\left\|\vec{T}\right\| \le f\left\|\vec{N}\right\|$ (repos), $= f\left\|\vec{N}\right\|$ (glissement)
Tension	$\vec{T}$ selon le fil	$T \ge 0$; même norme le long d'un fil idéal
Ressort	$-k(\ell-\ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$	loi de Hooke
Archimède	$-\rho_f V\vec{g}$	opposé du poids du fluide déplacé
Frottement fluide	$-\alpha\vec{v}$ ou $-\beta v\vec{v}$	selon le nombre de Reynolds

▶ Tir sans frottement : parabole, $h = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, $D = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$, portée maximale à $45°$.

▶ Frottement linéaire : $\tau = m/\alpha$, $v_\ell = g\tau$, approche exponentielle ; asymptote verticale $x_\infty = v_0\tau\cos\alpha$.

▶ Frottement quadratique : $v_\ell = \sqrt{mg/\beta}$, $v = v_\ell\tanh(t/\tau)$ avec $\tau = v_\ell/g$.

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 12 Saut à l'élastique

★★★☆☆

Un sauteur de masse $m = 70\,\mathrm{kg}$ est attaché à un élastique de longueur à vide $L_0 = 20\,\mathrm{m}$, modélisé par un ressort de raideur $k = 76{,}3\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ qui n'agit que lorsqu'il est tendu. Il se laisse tomber sans vitesse initiale depuis le pont, où est fixé l'élastique. On néglige les frottements et on repère le sauteur par sa profondeur z sous le pont (axe descendant).

Q-1) Quelle est sa vitesse v_1 lorsque l'élastique commence à se tendre ?

Q-2) Établir l'équation du mouvement pour $z > L_0$. Déterminer la position d'équilibre z_e et la pulsation ω.

Q-3) Résoudre et montrer que le point le plus bas est à $z_{\max} = 50\,\mathrm{m}$ sous le pont.

Q-4) Calculer l'accélération maximale subie, en unités de g.

Correction

Q-1) Chute libre sur L_0 : $v_1 = \sqrt{2gL_0} = 19{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Q-2) Pour $z > L_0$: $m\ddot{z} = mg - k(z-L_0)$, soit $\ddot{z} + \omega^2 z = \omega^2 z_e$ avec $\omega = \sqrt{k/m} = 1{,}04\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $z_e = L_0 + \dfrac{mg}{k} = 29{,}0\,\mathrm{m}$.

Q-3) En prenant l'origine des temps quand $z = L_0$: $z - z_e = A\cos(\omega t + \varphi)$. Avec $z(0) - z_e = -\dfrac{mg}{k} = -9{,}0\,\mathrm{m}$ et $\dot{z}(0) = v_1$:

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}} = \sqrt{81 + 360} = 21{,}0\,\mathrm{m},$$

d'où $z_{\max} = z_e + A = 50{,}0\,\mathrm{m}$ (l'élastique s'allonge de $30\,\mathrm{m}$).

Q-4) L'accélération est maximale au point le plus bas : $a_{\max} = \omega^2 A = \dfrac{k(z_{\max} - L_0)}{m} - g = 22{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 2{,}3\,g$, dirigée vers le haut. Ce résultat sera retrouvé plus simplement par l'énergie au chapitre M3.

EXERCICE 13 Ressorts en série et en parallèle

★★★☆☆

Une masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal.

Q-1) Elle est reliée à un mur par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2 montés **en parallèle** (même allongement). Montrer qu'ils sont équivalents à un ressort unique de raideur k_p à déterminer.

Q-2) Même question pour deux ressorts montés **en série** (bout à bout, ressorts sans masse).

Q-3) La masse est maintenant placée **entre** deux murs distants de L, reliée à chacun par un ressort (k_1, ℓ_{01} à gauche, k_2, ℓ_{02} à droite). Déterminer la position d'équilibre x_e (abscisse mesurée depuis le mur de gauche, masse ponctuelle).

Correction

Q-1) Même allongement $\Delta\ell$: $F = -(k_1 + k_2)\Delta\ell$, donc $k_p = k_1 + k_2$.

Q-2) Le point de jonction, sans masse, a une résultante nulle : les deux ressorts transmettent la même tension $T = k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2$. L'allongement total est $\Delta\ell = T\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)$, d'où $\dfrac{1}{k_s} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$.

Q-3) Ressort gauche (longueur x) : $-k_1(x - \ell_{01})$; ressort droit (longueur $L - x$, $\vec{u}_{\text{ext}} = -\vec{u}_x$) : $+k_2(L - x - \ell_{02})$. À l'équilibre :

$$x_e = \frac{k_1\ell_{01} + k_2(L - \ell_{02})}{k_1 + k_2}.$$

Hors équilibre, $m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)(x - x_e)$: on obtient un oscillateur harmonique de pulsation $\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$, étudié au chapitre M5.

EXERCICE 14 Ski de vitesse

★★★☆☆

Un skieur de masse $m = 95\,\mathrm{kg}$ (équipement compris) descend une piste rectiligne inclinée de $\alpha = 30°$. La neige exerce un frottement solide de coefficient $f = 0{,}05$; l'air exerce une traînée βv^2. Il part sans vitesse et atteint une vitesse limite de $200\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Q-1) Établir l'équation différentielle vérifiée par v.

Q-2) En déduire β, puis estimer le produit $C_x S$ ($\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$).

Q-3) Adimensionner l'équation. Quel est le temps caractéristique τ ? Quelle distance faut-il pour atteindre $90\,\%$ de la vitesse limite ?

Correction

Q-1) Selon la pente (vers le bas) : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - \beta v^2$, en notant $g' = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 4{,}48\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g' - \dfrac{\beta}{m}v^2$.

Q-2) $v_\ell = \sqrt{mg'/\beta} = 55{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ d'où $\beta = \dfrac{mg'}{v_\ell^2} = 0{,}14\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$ et $C_x S = \dfrac{2\beta}{\rho} = 0{,}23\,\mathrm{m^2}$ (position de recherche de vitesse, très ramassée).

Q-3) Avec $v^\star = v/v_\ell$ et $t^\star = t/\tau$, $\tau = v_\ell/g' = 12{,}4\,\text{s}$: $\dfrac{\mathrm{d}v^\star}{\mathrm{d}t^\star} = 1 - v^{\star 2}$, d'où $v^\star = \tanh t^\star$. La distance parcourue vaut $x = v_\ell \tau \ln\cosh t^\star$; pour $v^\star = 0{,}9$, $t^\star = 1{,}47$ et $x = \dfrac{v_\ell^2}{g'} \times 0{,}830 = 570\,\text{m}$: les pistes de ski de vitesse font effectivement près d'un kilomètre.

EXERCICE 15 Tir sur une pente

✦✦✦✧✧

Depuis le point O situé au pied d'une colline de pente constante $\theta_0 = 30°$, on lance une balle avec la vitesse $v_0 = 12\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le plan de plus grande pente, sous l'angle $\alpha > \theta_0$ avec l'horizontale. On néglige les frottements.

Q-1) Montrer que la portée mesurée le long de la pente vaut $p = \dfrac{2v_0^2 \cos\alpha \,\sin(\alpha - \theta_0)}{g\cos^2\theta_0}$.

Q-2) En déduire l'angle de tir qui maximise p et la portée maximale. A.N.

Q-3) Vérifier que l'on retrouve le résultat sur sol horizontal pour $\theta_0 = 0$.

Correction

Q-1) Le point d'impact I vérifie $z = x\tan\theta_0$ et appartient à la parabole $z = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, d'où $x_I = \dfrac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha - \tan\theta_0) = \dfrac{2v_0^2\cos\alpha\sin(\alpha-\theta_0)}{g\cos\theta_0}$ et $p = x_I/\cos\theta_0$.

Q-2) $2\cos\alpha\sin(\alpha-\theta_0) = \sin(2\alpha-\theta_0) - \sin\theta_0$ est maximal pour $2\alpha - \theta_0 = 90°$, soit $\alpha = 45° + \dfrac{\theta_0}{2} = 60°$: l'angle optimal est la bissectrice entre la pente et la verticale. Alors $p_{\max} = \dfrac{v_0^2(1-\sin\theta_0)}{g\cos^2\theta_0} = \dfrac{v_0^2}{g(1+\sin\theta_0)} = 9{,}8\,\text{m}$.

Q-3) Pour $\theta_0 = 0$: $\alpha = 45°$ et $p_{\max} = v_0^2/g$, comme au paragraphe V.2.

IX Classiques des concours

EXERCICE 16 Saut en parachute

✦✦✦✦✧

Un parachutiste de masse totale $m = 90\,\text{kg}$ saute d'un hélicoptère immobile. Il chute verticalement ; la résistance de l'air est modélisée par $\vec{f} = -k\,v\,\vec{v}$. On prend $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\eta_{\text{air}} = 1{,}8\times10^{-5}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$.

Q-1) Parachute fermé, la vitesse limite mesurée est $v_{\ell 1} = 55\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. En déduire k_1.

Q-2) Établir $v(t)$ et définir un temps caractéristique τ_1. Calculer τ_1.

Q-3) Calculer la durée t_1 et la hauteur de chute H_1 nécessaires pour atteindre $90\,\%$ de $v_{\ell 1}$.

Q-4) Le parachute est ouvert alors que la vitesse vaut $v_{\ell 1}$. La nouvelle vitesse limite est $v_{\ell 2} = 5{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer k_2, puis l'accélération juste après une ouverture supposée instantanée. Commenter.

Q-5) Évaluer le nombre de Reynolds en chute libre (taille caractéristique $L \approx 1{,}8\,\text{m}$) et justifier le modèle quadratique.

Correction

Q-1) En régime permanent, $k_1 v_{\ell 1}^2 = mg$: $k_1 = \dfrac{mg}{v_{\ell 1}^2} = 0{,}29\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$.

Q-2) Axe descendant : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \dfrac{v^2}{v_{\ell 1}^2}\right)$, d'où $v = v_{\ell 1}\tanh(t/\tau_1)$ avec $\tau_1 = \dfrac{v_{\ell 1}}{g} = 5{,}6\,\mathrm{s}$.

Q-3) $\tanh(t_1/\tau_1) = 0{,}9$: $t_1 = \tau_1\,\mathrm{argth}(0{,}9) = 1{,}47\,\tau_1 = 8{,}3\,\mathrm{s}$. En intégrant, $z = v_{\ell 1}\tau_1 \ln\cosh(t/\tau_1)$, soit $H_1 = \dfrac{v_{\ell 1}^2}{g}\ln\cosh(1{,}47) = 308 \times 0{,}830 = 256\,\mathrm{m}$.

Q-4) $k_2 = \dfrac{mg}{v_{\ell 2}^2} = 35\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$, environ 121 fois k_1. Juste après l'ouverture : $m\ddot{z} = mg - k_2 v_{\ell 1}^2$, soit

$$\ddot{z} = g\left(1 - \frac{v_{\ell 1}^2}{v_{\ell 2}^2}\right) = -120\,g \approx -1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

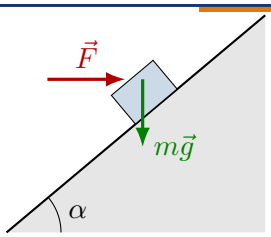
Une telle décélération serait mortelle : en réalité, la voile se déploie progressivement en une à deux secondes, ce qui limite la décélération à quelques g.

Q-5) $\mathcal{R}_e = \dfrac{\rho_{\text{air}} v_{\ell 1} L}{\eta_{\text{air}}} \approx 7 \times 10^6 \gg 10^3$: régime turbulent, la traînée est bien quadratique. Avec $C_x \approx 1$, $k_1 = \frac{1}{2}\rho C_x S$ donne $S \approx 0{,}5\,\mathrm{m^2}$, ordre de grandeur cohérent avec un corps à plat ventre.

EXERCICE 17 — Arc-boutement sur un plan incliné

✦✦✦✦✧

Un bloc de masse m est posé sur un plan incliné d'angle $\alpha = 40°$. Le coefficient de frottement statique vaut $f = 0{,}50$. Un opérateur exerce sur le bloc une force $\vec{F}$ **horizontale**, dirigée vers le plan, de norme F.



Q-1) Sans la force $\vec{F}$, le bloc reste-t-il immobile ? Déterminer son accélération en prenant $f_d = 0{,}40$.

Q-2) Déterminer la valeur minimale $F_{\min}$ de F qui empêche le bloc de descendre.

Q-3) Déterminer la valeur maximale $F_{\max}$ au-delà de laquelle le bloc remonte. Applications numériques en unités de mg.

Q-4) Montrer que, si α dépasse un angle α_c à déterminer, aucune force horizontale, aussi grande soit-elle, ne peut faire remonter le bloc : c'est le phénomène d'**arc-boutement**.

Correction

Axes : $\vec{u}_x$ selon la ligne de plus grande pente vers le haut, $\vec{u}_y$ normal au plan. $\vec{F} = F(\cos\alpha\,\vec{u}_x - \sin\alpha\,\vec{u}_y)$ pousse vers le haut de la pente et vers le plan.

Q-1) $\tan 40° = 0{,}84 > 0{,}50$: le bloc glisse. $a = g(\sin\alpha - f_d\cos\alpha) = 3{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ vers le bas.

Q-2) À l'équilibre : $N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$ et $T = mg\sin\alpha - F\cos\alpha$ (frottement vers le haut si le bloc tend à descendre). Condition $T \le fN$:

$$F \ge F_{\min} = mg\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = 0{,}24\,mg.$$

Q-3) Si le bloc tend à monter, le frottement est dirigé vers le bas : $|T| = F\cos\alpha - mg\sin\alpha \leq f(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)$, soit $F(\cos\alpha - f\sin\alpha) \leq mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$:

$$F \leq F_{\max} = mg\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = 2{,}31\,mg.$$

Q-4) Si $\cos\alpha - f\sin\alpha \leq 0$, la condition du
Q-3) est vérifiée pour tout F : augmenter F augmente autant la réaction normale, donc le frottement maximal, que la composante motrice. Cela se produit pour $\tan\alpha \geq 1/f$, soit $\alpha_c = \arctan(1/f) = 63{,}4°$. Interprétation : la force $\vec{F}$ est alors dans le cône de frottement.

EXERCICE 18 Lancer vertical avec frottement quadratique

★★★★☆

Une balle de masse m est lancée verticalement vers le haut avec la vitesse v_0. Elle subit la traînée $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$; on note $v_\ell = \sqrt{mg/\beta}$ sa vitesse limite de chute et $L = \dfrac{v_\ell^2}{2g}$. L'axe (Oz) est vertical ascendant.

Q-1) À la montée, montrer que $u = v^2$ vérifie $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \dfrac{u}{L} = -2g$. On pourra utiliser $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$.

Q-2) En déduire la hauteur maximale h. Vérifier la limite sans frottement.

Q-3) À la descente, établir l'équation vérifiée par u en fonction de la distance s parcourue depuis le sommet et la résoudre.

Q-4) Montrer que la vitesse de retour vaut $v_r = \dfrac{v_0 v_\ell}{\sqrt{v_0^2 + v_\ell^2}}$. A.N. : $v_0 = v_\ell = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Commenter.

Correction

Q-1) À la montée, $v > 0$ et le frottement est vers le bas : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - \beta v^2$. Avec $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = -2g - \dfrac{2\beta}{m}u = -2g - \dfrac{u}{L}$.

Q-2) Solution avec $u(0) = v_0^2$: $u = (v_0^2 + v_\ell^2)\,\mathrm{e}^{-z/L} - v_\ell^2$. Au sommet $u = 0$: $h = L\ln\left(1 + \dfrac{v_0^2}{v_\ell^2}\right)$.

Pour $v_\ell \to \infty$: $h \approx L\dfrac{v_0^2}{v_\ell^2} = \dfrac{v_0^2}{2g}$, la hauteur sans frottement.

Q-3) À la descente, avec s distance parcourue vers le bas et w la norme de la vitesse : $\dfrac{\mathrm{d}(w^2)}{\mathrm{d}s} = 2g - \dfrac{w^2}{L}$, de solution $w^2 = v_\ell^2\left(1 - \mathrm{e}^{-s/L}\right)$.

Q-4) Pour $s = h$: $\mathrm{e}^{-h/L} = \dfrac{v_\ell^2}{v_0^2 + v_\ell^2}$, d'où $v_r^2 = \dfrac{v_\ell^2 v_0^2}{v_0^2 + v_\ell^2}$. A.N. : $h = L\ln 2 = 14{,}1\,\mathrm{m}$ (contre $20{,}4\,\mathrm{m}$ sans frottement) et $v_r = v_0/\sqrt{2} = 14{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La balle revient moins vite qu'elle n'est partie ($v_r < v_0$, énergie dissipée) et toujours moins vite que v_ℓ.