LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

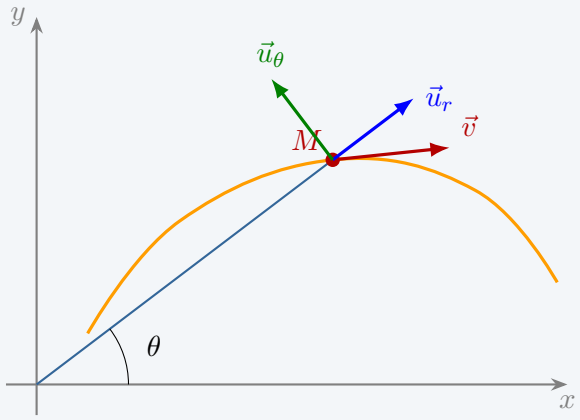
FICHE RÉSUMÉ

M1

MÉCANIQUE

Description et paramétrage du mouvement d'un point

Référentiels — Vitesse et accélération — Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques — Repère de Frenet



> *L'univers est écrit dans la langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques.*
>
> — Galilée, *L'Essayeur* (1623)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Vitesse et accélération en polaires »

M1 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Décrire un mouvement, c'est choisir un **référentiel** (solide de référence + horloge), puis un **repère** adapté à la géométrie du problème. La vitesse et l'accélération sont les dérivées successives du vecteur position *dans ce référentiel*. Dans une base mobile (polaire, sphérique, Frenet), on n'oublie jamais de dériver aussi les vecteurs de base.

I Repérage dans l'espace et dans le temps

Définition — Référentiel et repère R

- **Référentiel** $\mathcal{R}$: solide de référence (réel ou fictif) muni d'une horloge. En mécanique classique, le temps est **absolu** : il s'écoule de la même façon dans tous les référentiels.
- **Repère** $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: origine fixe dans $\mathcal{R}$ et base orthonormée directe. C'est un outil de calcul : un même référentiel admet une infinité de repères.
- **Point matériel** : objet de dimensions négligeables devant les longueurs caractéristiques du mouvement, affecté de la masse de l'objet.

Référentiel	Définition	Validité (durée $\ll$)
Terrestre	lié au sol, au laboratoire	1 jour
Géocentrique	centre de la Terre + 3 étoiles lointaines	1 an
Héliocentrique (Kepler)	centre du Soleil + 3 étoiles lointaines	$\sim 2 \times 10^8$ ans
Copernic	centre de masse du système solaire + 3 étoiles	quasi confondu avec Kepler

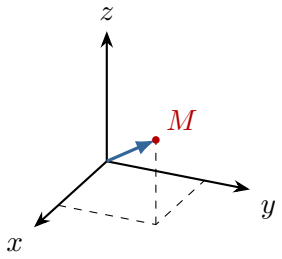
II Vecteurs cinématiques

Définitions R

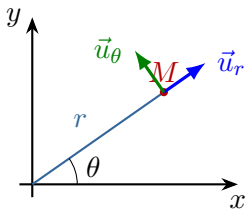
$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \qquad \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

- $\vec{v}$ ne dépend pas de l'origine choisie, mais dépend du référentiel ; il est **tangent** à la trajectoire.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \vec{v}\cdot\vec{a}$: mouvement **accéléré** si $\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$, **ralenti** si $\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$, **uniforme** si $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$.

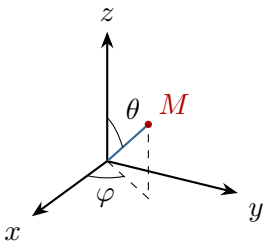
III Les trois systèmes de coordonnées



Cartésiennes (x, y, z)



Polaires (r, θ), $+z$: cylindriques



Sphériques (r, θ, φ)

★ À retenir

	Position et déplacement élémentaire	Vitesse
Cartésiennes	$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$	$\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$
Cylindriques	$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$	$\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$
Sphériques	$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$	$\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$

Accélération (cartésiennes) $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

Accélération (cylindriques) $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

Base polaire : définition et dérivées R D

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \qquad \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$$

Dériver un vecteur unitaire par rapport à l'angle dont il dépend revient à le tourner de $+\pi/2$. Relation utile : $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)$.

Remarque

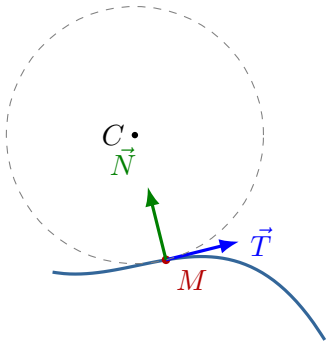
Coordonnées sphériques : $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, avec $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ (colatitude), $\varphi \in [0, 2\pi[$; $\vec{u}_\theta = \partial\vec{u}_r/\partial\theta$ et $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ est horizontal. L'accélération en sphériques n'est pas au programme.

IV Repère de Frenet

Base intrinsèque R

Abscisse curviligne : $\mathrm{d}s = \left\|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right\|$, $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Vecteur tangent $\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{v}$, vecteur normal $\vec{N}$ dirigé vers le centre de courbure C, binormale $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$:

$$\vec{v} = v\,\vec{T} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R_c}\,\vec{N} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\vec{N}}{R_c}$$



☞ Méthode — Calculer un rayon de courbure M

On calcule $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans la base la plus commode, puis

$$R_c = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} \qquad \text{ou} \qquad R_c = \frac{v^2}{a_N} \text{ avec } a_N = \sqrt{a^2 - \dot{v}^2}$$

Exemples : cercle de rayon R : $R_c = R$; parabole de chute libre au sommet : $R_c = v_0^2/g$; ellipse $(a > b)$: $R_c = b^2/a$ et a^2/b aux sommets.

V Mouvements usuels

Mouvement	Lois horaires	À retenir
Rectiligne uniforme	$x = v_0 t + x_0$	$\vec{a} = \vec{0}$
Rectiligne unif. varié	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$
Rectiligne sinusoïdal	$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\ddot{x} = -\omega^2 x$; ellipse dans le plan de phase
À $\vec{a}$ constant	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}$	mouvement plan, trajectoire parabolique
Circulaire uniforme	$\theta = \omega t,\ r = R$	$v = R\omega$, $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_r$ (centripète)
Circulaire quelconque	$r = R$	$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$
Circ. unif. varié	$\ddot{\theta} = \alpha$	$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Ordres de grandeur

Point de l'équateur : $v \approx 465\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $a \approx 0{,}034\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ $(0{,}3\,\%$ de $g)$; Terre autour du Soleil : $v \approx 30\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$; voiture dans un virage de $50\,\mathrm{m}$ à $72\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$: $a \approx 0{,}8\,g$; $90\,\mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

VI Méthodes et pièges

☞ Méthode — Choisir le système de coordonnées M

- **Cartésiennes** : trajectoire rectiligne, accélération constante (chute libre, particule dans $\vec{E}$ uniforme).
- **Polaires / cylindriques** : symétrie autour d'un axe ou d'un point (cercle, pendule, force centrale, particule dans $\vec{B}$).
- **Sphériques** : position sur une sphère (Terre, satellite), problèmes à symétrie sphérique.
- **Frenet** : trajectoire connue ; lecture directe des accélérations tangentielle et normale.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ sont **mobiles** : leur dérivée n'est pas nulle.
- En cylindriques, $r = OH$ est la distance à l'**axe**, pas OM.
- Vitesse de norme constante n'implique pas accélération nulle (mouvement circulaire uniforme).
- « Accéléré » se juge sur le signe de $\vec{v} \cdot \vec{a}$, pas sur celui de $\ddot{x}$.
- Contrôle d'homogénéité : dans $\vec{a}$, chaque terme contient une seule longueur et deux dérivées temporelles.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais définir un référentiel et choisir le plus adapté.
- ☐ Je sais retrouver $\dot{\vec{u}}_r$, $\dot{\vec{u}}_\theta$ puis $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en polaires sans formulaire.
- ☐ Je sais écrire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ dans les trois systèmes à partir d'un schéma.
- ☐ Je sais décomposer $\vec{a}$ dans la base de Frenet et calculer un rayon de courbure.
- ☐ Je reconnais les mouvements usuels et leurs lois horaires.