LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

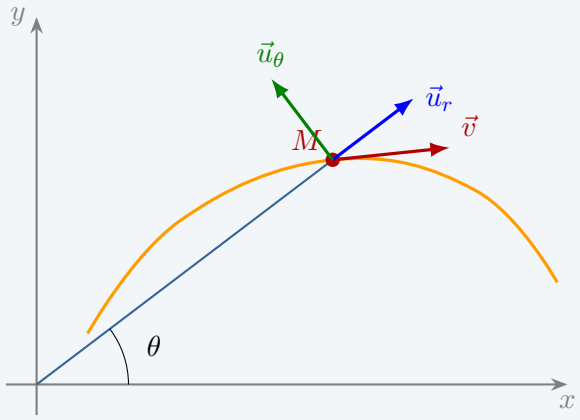
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

M1

MÉCANIQUE

Description et paramétrage du mouvement d'un point

Référentiels — Vitesse et accélération — Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques — Repère de Frenet



> *L'univers est écrit dans la langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques.*
>
> — Galilée, *L'Essayeur* (1623)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Vitesse et accélération en polaires »

M1 — Description du mouvement

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Définir un référentiel et distinguer *référentiel* et *repère* ; choisir un référentiel adapté au problème.
- Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques (polaires).
- Établir les dérivées des vecteurs de la base polaire et retrouver vitesse et accélération en polaires.
- Exprimer le déplacement élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées à l'aide d'un schéma.
- Caractériser les mouvements usuels : rectiligne uniforme, uniformément varié, sinusoïdal, circulaire uniforme et non uniforme.
- Utiliser le repère de Frenet : accélérations tangentielle et normale, rayon de courbure.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Vitesse et accélération en polaires » permet de visualiser en direct les vecteurs vitesse et accélération et leurs composantes dans la base mobile.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Repérage dans l'espace et dans le temps . . . 3
I.1 Du système réel au point matériel . . . 3
I.2 Le mouvement est relatif : notion de référentiel . . . 3
I.3 Le temps et l'espace en mécanique classique . . . 4
I.4 Référentiels usuels . . . 4
II Vecteurs position, vitesse et accélération . . . 5
II.1 Définitions . . . 5
II.2 Mouvement accéléré ou ralenti . . . 5
III Coordonnées cartésiennes . . . 6
IV Coordonnées cylindriques et polaires . . . 6
IV.1 Repérage et base locale . . . 6
IV.2 Dérivées des vecteurs de la base polaire . . . 7
IV.3 Vitesse et accélération . . . 7
IV.4 Déplacement élémentaire . . . 8
V Coordonnées sphériques . . . 10
VI Repère de Frenet . . . 10
VII Mouvements usuels . . . 13
VII.1 Mouvements rectilignes . . . 13
VII.2 Mouvement à vecteur accélération constant . . . 13
VII.3 Mouvement circulaire . . . 14
VIII Synthèse . . . 15
IX Exercices d'approfondissement . . . 15
X Classiques des concours . . . 17

I Repérage dans l'espace et dans le temps

I.1 Du système réel au point matériel

Décrire le mouvement d'un objet réel (voiture, satellite, électron) demande de choisir un **modèle**. Le plus simple est le **point matériel** : un point géométrique auquel on associe la masse de l'objet.

Définition — Point matériel

On modélise un système par un **point matériel** M lorsque ses dimensions sont négligeables devant les longueurs caractéristiques de son mouvement, et que l'on ne s'intéresse pas à son orientation (sa rotation propre).

Remarque

La Terre peut être modélisée par un point pour étudier son mouvement autour du Soleil (rayon $6400\,\mathrm{km}$ devant $150 \times 10^6\,\mathrm{km}$), mais pas pour étudier l'alternance jour-nuit. Le modèle dépend de la question posée, pas seulement de l'objet.

I.2 Le mouvement est relatif : notion de référentiel

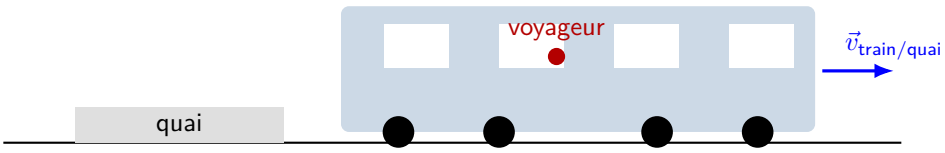
Un voyageur assis dans un train est immobile par rapport à son siège et en mouvement par rapport au quai : le mouvement n'a de sens que **par rapport à** quelque chose.

Définition — Référentiel R

Un **référentiel** $\mathcal{R}$ est un solide de référence (un ensemble de points fixes les uns par rapport aux autres) muni d'une **horloge**. Pour repérer les positions, on lui associe un **repère d'espace** : une origine O fixe dans $\mathcal{R}$ et une base orthonormée directe.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Ne pas confondre **référentiel** (objet physique) et **repère** (outil mathématique) : un même référentiel admet une infinité de repères. Changer de repère ne change pas le mouvement ; changer de référentiel le change.
- Le mot « immobile » n'a pas de sens sans préciser le référentiel.



Dans le référentiel du quai, le voyageur avance.

Dans le référentiel du train, le voyageur est immobile.

Fig. 1 : Le mouvement d'un même objet dépend du référentiel d'étude.

I.3 Le temps et l'espace en mécanique classique

Postulats de la mécanique classique R

- Le **temps est absolu** : la durée séparant deux événements est la même dans tous les référentiels.
- Les **distances sont absolues** : la distance entre deux points à un instant donné ne dépend pas du référentiel.

Ces postulats sont mis en défaut lorsque les vitesses approchent celle de la lumière $c \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$: c'est le domaine de la relativité restreinte (dilatation des durées, observée sur la durée de vie des muons cosmiques ou corrigée en permanence dans les satellites GPS).

I.4 Référentiels usuels

Référentiel	Solide de référence	Usage typique
Terrestre	la Terre (le laboratoire, le sol)	expériences de laboratoire, mouvements de durée courte devant un jour
Géocentrique	centre de la Terre et trois étoiles lointaines (axes de directions fixes)	satellites, Lune, rotation de la Terre sur elle-même
Héliocentrique (de Kepler)	centre du Soleil et trois étoiles lointaines	planètes, comètes, sondes interplanétaires
De Copernic	centre de masse du système solaire et trois étoiles lointaines	quasi confondu avec le précédent (le Soleil porte $99{,}9\,\%$ de la masse)

Tab. 1 : Les référentiels usuels. Le référentiel géocentrique est en translation (sans rotation) par rapport au référentiel héliocentrique.

Ordres de grandeur

Le référentiel terrestre tourne sur lui-même en un jour ($\Omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$) : il est d'autant moins adapté que le mouvement étudié dure longtemps. Le référentiel géocentrique, lui, décrit en un an une orbite presque circulaire autour du Soleil. On précisera au chapitre M8 dans quelle mesure ces référentiels peuvent être considérés comme galiléens.
Règle pratique : un référentiel convient tant que la durée du mouvement étudié reste petite devant la durée caractéristique de sa propre rotation, soit $\sim 1\,\mathrm{jour}$ pour le terrestre, $\sim 1\,\mathrm{an}$ pour le géocentrique et $\sim 2 \times 10^8$ ans (révolution du Soleil autour du centre de la Galaxie) pour l'héliocentrique.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Ne pas confondre **référentiel** (objet physique : un solide de référence et une horloge) et **repère** (outil mathématique : une origine et une base). Un même référentiel peut être muni d'une infinité de repères ; le choix du repère n'est qu'une affaire de commodité de calcul.

II Vecteurs position, vitesse et accélération

II.1 Définitions

Définition — Grandeurs cinématiques R

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ muni d'une origine O fixe :

- le **vecteur position** est $\overrightarrow{OM}(t)$; la **trajectoire** est la courbe décrite par M dans $\mathcal{R}$;
- le **vecteur vitesse** est la dérivée du vecteur position par rapport au temps, dans $\mathcal{R}$:

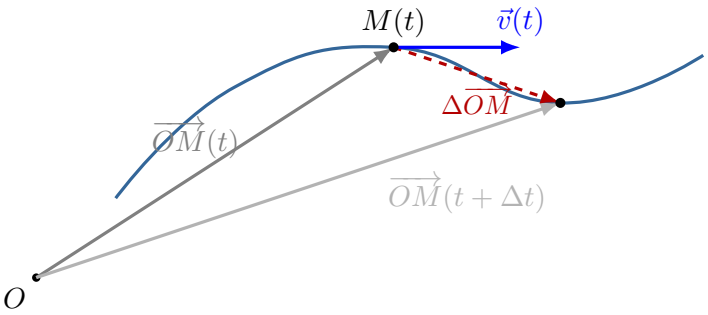
$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \qquad [\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]$$

- le **vecteur accélération** est la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} \qquad [\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}]$$

Propriétés R

- La vitesse ne dépend pas de l'origine O choisie (si O' est fixe, $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$ a la même dérivée) mais elle dépend du référentiel.
- Le vecteur vitesse est **tangent à la trajectoire**, orienté dans le sens du mouvement.
- Le vecteur accélération traduit à la fois la variation de la *norme* de la vitesse et celle de sa *direction*. Un mouvement à vitesse de norme constante peut donc avoir une accélération non nulle (mouvement circulaire uniforme).



Quand $\Delta t \to 0$, la corde $\Delta\overrightarrow{OM}$ tend vers la tangente : $\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$ est tangent à la trajectoire.

Fig. 2 : Le vecteur vitesse, limite du vecteur déplacement divisé par la durée.

II.2 Mouvement accéléré ou ralenti

Critère R

On a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \vec{v}\cdot\vec{a}$. Par conséquent :

- $\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$: la norme de la vitesse augmente, le mouvement est **accéléré** ;
- $\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$: le mouvement est **ralenti** (décéléré) ;

▶ $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ à tout instant : le mouvement est **uniforme** (norme de la vitesse constante).

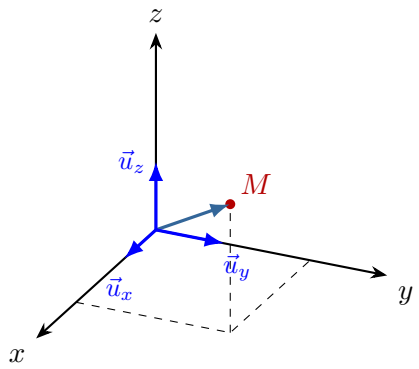
✗ Attention, erreurs fréquentes

« Accéléré » ne signifie pas « $\ddot{x}>0$ ». Une voiture qui roule vers les x décroissants en freinant a $\dot{x}<0$ et $\ddot{x}>0$: son mouvement est ralenti car $\dot{x}\,\ddot{x}<0$.

III Coordonnées cartésiennes

On choisit une base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ orthonormée directe, **fixe dans** $\mathcal{R}$. Le point M est repéré par ses coordonnées (x,y,z) :

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{u}_x+y\,\vec{u}_y+z\,\vec{u}_z$$



Les vecteurs de base étant constants, on dérive simplement chaque coordonnée :

$$\vec{v}=\dot{x}\,\vec{u}_x+\dot{y}\,\vec{u}_y+\dot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a}=\ddot{x}\,\vec{u}_x+\ddot{y}\,\vec{u}_y+\ddot{z}\,\vec{u}_z$$

Déplacement élémentaire en cartésiennes R

Pour une variation infinitésimale des coordonnées, M se déplace de

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM}=\mathrm{d}x\,\vec{u}_x+\mathrm{d}y\,\vec{u}_y+\mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

☞ Méthode — Quand choisir les cartésiennes ?

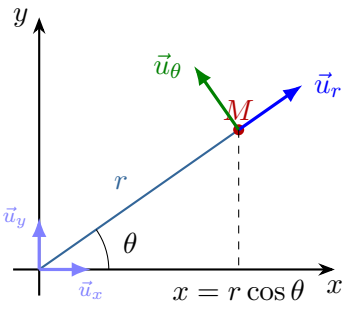
Lorsque la trajectoire est rectiligne, ou que l'accélération est constante (chute libre, particule dans un champ électrique uniforme) : les équations se découplent selon chaque axe.

IV Coordonnées cylindriques et polaires

IV.1 Repérage et base locale

Dans le plan (Oxy), on repère M par sa distance à l'origine $r=OM\geq 0$ et l'angle polaire $\theta=(\vec{u}_x,\overrightarrow{OM})$: ce sont les **coordonnées polaires**. On définit la **base polaire**, liée au point M :

$$\vec{u}_r=\cos\theta\,\vec{u}_x+\sin\theta\,\vec{u}_y \qquad \vec{u}_\theta=-\sin\theta\,\vec{u}_x+\cos\theta\,\vec{u}_y$$



En ajoutant la cote z et le vecteur fixe $\vec{u}_z$, on obtient les **coordonnées cylindriques** (r,θ,z) et la base orthonormée directe $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

La base polaire est **mobile** : $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ changent de direction lorsque M se déplace (ils dépendent de θ, donc du temps). Il ne faut **jamais** les traiter comme des constantes en dérivant.
En coordonnées cylindriques, r est la distance de M à l'**axe** (Oz), c'est-à-dire $r = OH$ où H est le projeté de M sur le plan (Oxy) ; ce n'est OM que si $z = 0$. De même, la composante de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{u}_\theta$ est nulle : la dépendance en θ est entièrement portée par le vecteur $\vec{u}_r$.

IV.2 Dérivées des vecteurs de la base polaire

Dérivées temporelles R D

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$$

Démonstration. Par dérivation d'une fonction composée, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\,\dot{\theta}$ avec $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y = \vec{u}_\theta$.
De même $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\,\vec{u}_x - \sin\theta\,\vec{u}_y = -\vec{u}_r$.

Remarque

Moyen mnémotechnique : dériver un vecteur unitaire par rapport à θ revient à le faire tourner de $+\pi/2$. On retrouve le résultat sur la figure : quand θ augmente, l'extrémité de $\vec{u}_r$ se déplace dans la direction de $\vec{u}_\theta$.

IV.3 Vitesse et accélération

Cinématique en coordonnées cylindriques R D

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

Démonstration. $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\vec{u}_r) + \dot{z}\vec{u}_z = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$. On dérive encore : $\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{u}_r) + \ddot{z}\vec{u}_z$, ce qui donne le résultat.

Remarque

Les termes de l'accélération ont chacun un nom : $\ddot{r}$ (accélération radiale), $-r\dot{\theta}^2$ (accélération *centripète*), $r\ddot{\theta}$ (accélération angulaire) et $2\dot{r}\dot{\theta}$ (terme de Coriolis). On utilisera souvent l'identité

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

qui jouera un rôle central dans l'étude des forces centrales (chapitre M7).

☞ Méthode — Contrôler une expression par homogénéité

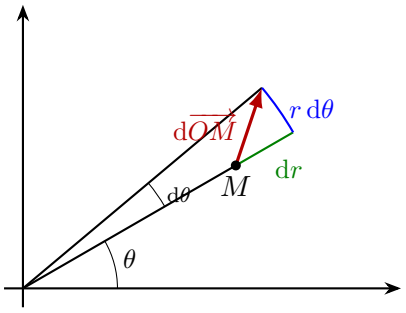
Une accélération s'exprime en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: chaque terme doit contenir **une seule** longueur (r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$…) et **deux** dérivations temporelles au total. Ainsi $r\dot{\theta}^2$, $\dot{r}\dot{\theta}$ et $r\ddot{\theta}$ sont acceptables, alors que $r^2\ddot{\theta}$ ou $\dot{r}\dot{\theta}^2$ trahissent immédiatement une erreur.

IV.4 Déplacement élémentaire

Déplacement élémentaire R

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.



☞ Méthode — Retrouver le déplacement élémentaire

On fait varier une seule coordonnée à la fois : quand r varie de $\mathrm{d}r$, M avance de $\mathrm{d}r$ selon $\vec{u}_r$; quand θ varie de $\mathrm{d}\theta$, M parcourt un **arc de cercle** de longueur $r\,\mathrm{d}\theta$ selon $\vec{u}_\theta$. En divisant par $\mathrm{d}t$, on retrouve la vitesse.

☞ Méthode — Quand choisir les polaires ?

Lorsque le mouvement présente une symétrie de révolution autour d'un axe ou d'un point : mouvement circulaire, pendule, mouvement dans un champ de force centrale, particule chargée dans un champ magnétique.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Spirale logarithmique

✦✦✧✧✧

Un point décrit la courbe d'équation polaire $r = r_0\,\mathrm{e}^{\theta}$ avec $\dot{\theta} = \omega$ constant.

Q-1) Exprimer $\vec{v}$ dans la base polaire et montrer que l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{u}_r$ est constant.

Q-2) Calculer $\vec{a}$ et sa norme.

Correction

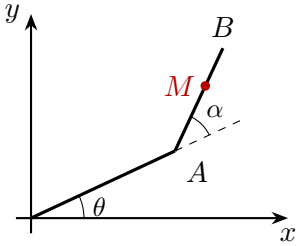
Q-1) $\dot{r} = r\omega$ donc $\vec{v} = r\omega\,(\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$: l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{u}_r$ vaut $45°$ quel que soit θ.

Q-2) $\ddot{r} = r\omega^2$: $a_r = \ddot{r} - r\omega^2 = 0$ et $a_\theta = 2\dot{r}\omega = 2r\omega^2$. Donc $\vec{a} = 2r\omega^2\,\vec{u}_\theta$ et $\|\vec{a}\| = 2r\omega^2$.

EXERCICE 2 — Point sur une tige en rotation

✦✦✧✧✧

Une tige OA de longueur ℓ tourne dans le plan (Oxy) autour de (Oz) à vitesse angulaire constante ($\theta = \omega t$). Une seconde tige AB, rigidement liée à OA, fait l'angle constant α avec la direction de OA. Un point M glisse sur AB avec $AM = \rho(t)$.



Q-1) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée à OA.

Q-2) En déduire $\vec{v}(M)$ puis $\vec{a}(M)$.

Correction

Q-1) $\overrightarrow{OM} = \ell\,\vec{u}_r + \rho(\cos\alpha\,\vec{u}_r + \sin\alpha\,\vec{u}_\theta) = (\ell+\rho\cos\alpha)\vec{u}_r + \rho\sin\alpha\,\vec{u}_\theta$.

Q-2) Avec $\dot{\vec{u}}_r = \omega\vec{u}_\theta$ et $\dot{\vec{u}}_\theta = -\omega\vec{u}_r$: $\vec{v} = (\dot\rho\cos\alpha - \rho\omega\sin\alpha)\,\vec{u}_r + \big(\dot\rho\sin\alpha + \omega(\ell+\rho\cos\alpha)\big)\,\vec{u}_\theta$,
$\vec{a} = \big(\ddot\rho\cos\alpha - 2\omega\dot\rho\sin\alpha - \omega^2(\ell+\rho\cos\alpha)\big)\vec{u}_r + \big(\ddot\rho\sin\alpha + 2\omega\dot\rho\cos\alpha - \omega^2\rho\sin\alpha\big)\vec{u}_\theta$.

EXERCICE 3 — Rampe hélicoïdale d'un parking

★★☆☆☆

Dans un parking à étages, on monte d'un niveau au suivant en parcourant exactement un tour d'une rampe hélicoïdale d'axe (Oz) et de rayon R ; la hauteur entre deux niveaux est h. Une voiture, assimilée à un point, la gravit à vitesse de norme constante v_0. En coordonnées cylindriques : $r = R$ et $z = \dfrac{h}{2\pi}\,\theta$.

Q-1) Exprimer $\vec{v}$ et montrer que $\dot\theta = \omega$ est constant ; exprimer ω.

Q-2) En déduire la durée T nécessaire pour monter d'un niveau.

Q-3) Calculer $\vec{a}$. Dans quelle direction pointe-t-il ? Interpréter.

Q-4) Montrer que le rayon de courbure de la trajectoire vaut $R_c = R\left(1 + \dfrac{h^2}{4\pi^2R^2}\right)$ et le comparer à R.

Q-5) Application : $R = 15\,\text{m}$, $h = 3{,}0\,\text{m}$, $v_0 = 10\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Correction

Q-1) $\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{u}_\theta + \dfrac{h}{2\pi}\dot\theta\,\vec{u}_z$, donc $v_0 = \dot\theta\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$: $\dot\theta$ est constant et $\omega = \dfrac{v_0}{\sqrt{R^2 + h^2/4\pi^2}}$.

Q-2) Un tour : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\sqrt{4\pi^2R^2 + h^2}}{v_0}$ (longueur d'une spire divisée par la vitesse).

Q-3) $\ddot\theta = 0$, $\dot r = 0$: $\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{u}_r$. L'accélération est horizontale et pointe vers l'axe : la montée à vitesse verticale constante n'exige aucune accélération verticale, seul le changement de direction dans le plan horizontal en demande une.

Q-4) Le mouvement est uniforme, donc $\vec{a}$ est purement normal : $R_c = \dfrac{v_0^2}{a} = \dfrac{R^2 + h^2/4\pi^2}{R}$. On a $R_c > R$: l'hélice est moins courbée que le cercle de base, car la montée « étire » la trajectoire. Le vecteur normal est $\vec{N} = -\vec{u}_r$ et la binormale $\vec{B} = \vec{T}\wedge\vec{N}$ est inclinée sur la verticale.

Q-5) $v_0 = 2{,}78\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $T = \frac{94{,}3\,\text{m}}{2{,}78\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \approx 34\,\text{s}$, $a = R\omega^2 \approx 0{,}51\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (virage très confortable) et $R_c \approx 15{,}02\,\text{m}$, quasi égal à R car la pente est faible.

V Coordonnées sphériques

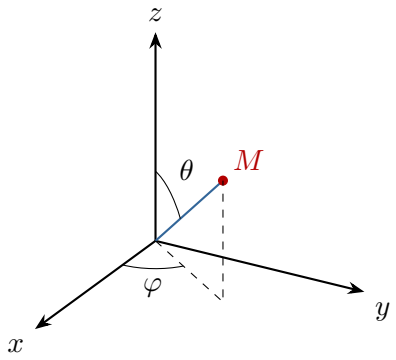
On repère M par :

- $r = OM \in [0, +\infty[$;
- la **colatitude** $\theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{OM}) \in [0, \pi]$;
- l'**azimut** (ou longitude) $\varphi \in [0, 2\pi[$, angle entre $\vec{u}_x$ et la projection de $\overrightarrow{OM}$ dans le plan (Oxy).

La base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est orthonormée directe et

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

avec $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.



Déplacement élémentaire et vitesse en sphériques R

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. L'expression de l'accélération en sphériques n'est pas exigible.

☞ Méthode — Construire la base sphérique

$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z$; on obtient $\vec{u}_\theta = \dfrac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}$ (rotation de $\pi/2$ dans le plan méridien) et $\vec{u}_\varphi = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y$, horizontal. On vérifie que $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$. Comme $\mathrm{d}\vec{u}_r = \mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$, on retrouve $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\vec{u}_r$.

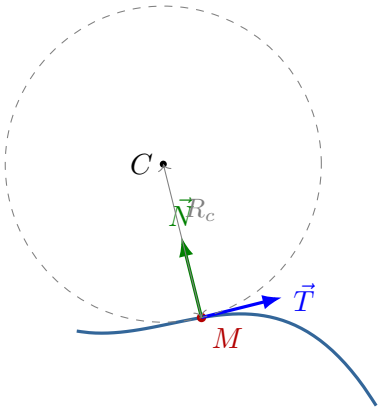
Remarque

Quand φ varie seul, M décrit un cercle de rayon $r\sin\theta$ (sa distance à l'axe Oz) : c'est l'origine du facteur $r\sin\theta$. Sur Terre, un parallèle de latitude λ a pour rayon $R_T\cos\lambda$ car $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$.

VI Repère de Frenet

Lorsque la trajectoire est connue, on oriente la courbe et on repère M par son **abscisse curviligne** $s(t)$: la longueur algébrique de l'arc entre une origine M_0 et M. On définit en M :

- $\vec{T}$: vecteur unitaire **tangent**, dans le sens de parcours ;
- $\vec{N}$: vecteur unitaire **normal**, orienté vers le centre de courbure C (côté concave) ;
- R_c : le **rayon de courbure**, rayon du cercle qui épouse au mieux la trajectoire en M (cercle osculateur).



Vitesse et accélération dans la base de Frenet R

$$\vec{v} = v\,\vec{T} \quad \text{avec} \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R_c}\,\vec{N}$$

L'accélération **tangentielle** $a_T = \dot{v}$ traduit la variation de la norme de la vitesse ; l'accélération **normale** $a_N = v^2/R_c \geq 0$, toujours dirigée vers la concavité, traduit le changement de direction.

Remarque

- L'abscisse curviligne se déduit de la vitesse par $s(t) = s(0) + \displaystyle\int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t'$: c'est la distance effectivement parcourue (lue sur un compteur kilométrique).
- La dérivée du vecteur tangent vaut $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v}{R_c}\,\vec{N}$; on en déduit $\vec{N} = \dfrac{R_c}{v}\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}$, ce qui permet de construire la base à partir de $\vec{v}(t)$.
- On a aussi $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\vec{N}}{R_c}$: la courbure $1/R_c$ mesure la vitesse de rotation du vecteur tangent par unité de longueur parcourue.
- La base de Frenet est une base de **projection**, pas un référentiel d'étude : il ne faut pas confondre le référentiel dans lequel on dérive et la base sur laquelle on projette.
- Pour une trajectoire non plane, on complète par le vecteur **binormal** $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$, perpendiculaire au plan osculateur ; $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est alors une base orthonormée directe.

☞ Méthode — Lire qualitativement une trajectoire M

Comme $a_N \geq 0$, le vecteur accélération (donc, on le verra au chapitre M2, la résultante des forces) pointe toujours **du côté concave** de la trajectoire. Le signe de $\vec{a}\cdot\vec{T}$ indique en outre si le mobile accélère (> 0), garde une vitesse constante ($= 0$) ou ralentit (< 0). Une trajectoire courbe parcourue à vitesse constante a donc une accélération **non nulle**, orthogonale à la vitesse.

☞ Méthode — Calculer un rayon de courbure M

On calcule $\vec{v}$ et $\vec{a}$ dans n'importe quelle base, puis on isole la composante normale :

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}{v} \qquad \text{d'où} \qquad R_c = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}.$$

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Virage sur autoroute ✦✦✧✧✧

Une voiture aborde un virage circulaire de rayon $R = 200\,\mathrm{m}$ à $130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ et freine uniformément jusqu'à $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ sur une distance $d = 150\,\mathrm{m}$.

Q-1) Calculer les accélérations tangentielle et normale à l'entrée du virage.

Q-2) Comparer la norme de l'accélération à g. Conclure.

Correction

Q-1) $v_1 = 36{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Freinage uniforme : $a_T = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d} = -2{,}26\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $a_N = \frac{v_1^2}{R} = 6{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-2) $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 6{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 0{,}7\,g$: l'adhérence des pneus est fortement sollicitée, d'où les limitations de vitesse dans les virages.

EXERCICE 5 Construire la base de Frenet d'un mouvement circulaire

★★✧✧✧

Un point M décrit le cercle de centre O et de rayon L : $\overrightarrow{OM} = L\,\vec{u}_r$, avec $\dot\theta > 0$ quelconque (non nécessairement constant).

Q-1) Calculer $\vec v$ et $\vec a$ dans la base polaire.

Q-2) En déduire $\vec T$, puis le rayon de courbure par $R_c = v^3/\|\vec v \wedge \vec a\|$.

Q-3) Déterminer $\vec N$ à l'aide de $\vec N = \frac{R_c}{v}\frac{\mathrm{d}\vec T}{\mathrm{d}t}$, puis $\vec B$.

Correction

Q-1) $\vec v = L\dot\theta\,\vec u_\theta$ et $\vec a = -L\dot\theta^2\,\vec u_r + L\ddot\theta\,\vec u_\theta$.

Q-2) $\vec T = \vec u_\theta$; $\vec v \wedge \vec a = L\dot\theta\,\vec u_\theta \wedge (-L\dot\theta^2\vec u_r) = L^2\dot\theta^3\,\vec u_z$, donc $R_c = \dfrac{L^3\dot\theta^3}{L^2\dot\theta^3} = L$: le cercle osculateur est le cercle lui-même.

Q-3) $\dfrac{\mathrm{d}\vec T}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\vec u_r$ donc $\vec N = \dfrac{L}{L\dot\theta}(-\dot\theta\,\vec u_r) = -\vec u_r$ (vers le centre) et $\vec B = \vec u_\theta \wedge (-\vec u_r) = \vec u_z$.

EXERCICE 6 Corde ou extérieur : quelle trajectoire dans une épingle ?

★★✧✧✧

Deux voitures franchissent une épingle à cheveux (demi-tour) en restant chacune sur un demi-cercle de même centre O, entre deux passages sur le même diamètre Δ : la voiture A à l'extérieur ($R_A = 80\,\mathrm{m}$), la voiture B à la corde ($R_B = 65\,\mathrm{m}$). L'adhérence limite l'accélération de chacune à $a_{\max} = 0{,}9\,g$. Chacune roule à la vitesse constante la plus grande possible.

Q-1) Comparer les distances parcourues.

Q-2) Exprimer la vitesse maximale dans un virage de rayon R, puis calculer v_A et v_B.

Q-3) Exprimer la durée du demi-tour en fonction de R et $a_{\max}$. Quelle voiture est la plus rapide dans le virage ? Quel avantage garde pourtant l'autre ?

Correction

Q-1) $D_A = \pi R_A = 251\,\mathrm{m}$ et $D_B = \pi R_B = 204\,\mathrm{m}$.

Q-2) Mouvement circulaire uniforme : $a = v^2/R \le a_{\max}$, soit $v_{\max} = \sqrt{a_{\max} R}$. On trouve $v_A = 26{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ($96\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$) et $v_B = 24{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ($86\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$).

Q-3) $t = \dfrac{\pi R}{\sqrt{a_{\max} R}} = \pi\sqrt{\dfrac{R}{a_{\max}}}$: $t_A = 9{,}46\,\mathrm{s}$ et $t_B = 8{,}52\,\mathrm{s}$. La corde fait gagner près d'une seconde, car la durée ne croît que comme $\sqrt{R}$ alors que la distance croît comme R. En revanche, A sort du virage plus vite et conserve cet avantage de vitesse au début de la ligne droite suivante.

VII Mouvements usuels

VII.1 Mouvements rectilignes

Mouvement rectiligne uniformément varié R

Si $\ddot{x} = a$ constant : $\dot{x}(t) = at + v_0$ et $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$. En éliminant le temps :

$$v^2 - v_0^2 = 2a\,(x - x_0)$$

Mouvement rectiligne sinusoïdal R

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, $\dot{x} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$ et

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

L'accélération est proportionnelle et opposée à l'élongation : c'est la signature de l'oscillateur harmonique (chapitre M5). De plus $\dot{x}^2 = \omega^2\left(X_m^2 - x^2\right)$, soit

$$\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(\omega X_m)^2} = 1 :$$

dans le plan $(x, \dot{x})$, appelé **plan de phase**, le point représentatif décrit une ellipse parcourue dans le sens horaire.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 Freinage d'urgence ✦✧✧✧✧

Une voiture roulant à $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ freine avec une décélération constante de $5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Le conducteur réagit avec un temps de réaction $\tau = 1\,\mathrm{s}$ pendant lequel la voiture garde sa vitesse.

Q-1) Calculer la durée et la distance de freinage proprement dites.

Q-2) En déduire la distance d'arrêt. Commenter l'influence du temps de réaction.

Correction

Q-1) $v_0 = 25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $t_f = \frac{v_0}{5} = 5\,\mathrm{s}$; avec $v^2 - v_0^2 = 2a\,d$: $d_f = \frac{v_0^2}{2\times 5} = 62{,}5\,\mathrm{m}$.

Q-2) Distance parcourue pendant la réaction : $v_0\tau = 25\,\mathrm{m}$. Distance d'arrêt : $87{,}5\,\mathrm{m}$. Le temps de réaction ajoute une distance proportionnelle à la vitesse, la distance de freinage croît comme son carré.

VII.2 Mouvement à vecteur accélération constant

Si $\vec{a} = \vec{a}_0$ constant, on intègre deux fois : $\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$ et $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}$. Le mouvement est **plan** (plan contenant $\vec{a}_0$ et $\vec{v}_0$) et la trajectoire est une **parabole**, ou une droite si $\vec{v}_0$ est colinéaire à $\vec{a}_0$. Exemple : chute libre, $\vec{a}_0 = \vec{g}$.

VII.3 Mouvement circulaire

Pour $r = R$ constant, les formules des polaires se simplifient :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

- **Uniforme** ($\dot{\theta} = \omega$ constant) : $v = R\omega$ et $\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{u}_r = -\dfrac{v^2}{R}\vec{u}_r$, accélération **centripète**. Période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
- **Non uniforme** : composante tangentielle $R\ddot{\theta} = \dot{v}$ et normale v^2/R ; on retrouve Frenet avec $\vec{T} = \vec{u}_\theta$, $\vec{N} = -\vec{u}_r$ et $R_c = R$.
- **Uniformément varié** ($\ddot{\theta} = \alpha$ constant) : $\dot{\theta} = \alpha t + \dot{\theta}_0$, $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$ et $\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$, analogue angulaire du rectiligne uniformément varié.

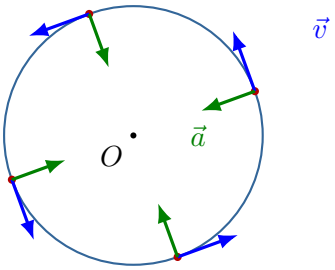


Fig. 3 : Mouvement circulaire uniforme : $\vec{a}$ pointe vers le centre.

Ordres de grandeur

- Point de l'équateur entraîné par la rotation terrestre : $v = \frac{2\pi R_T}{T} \approx 465\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $a = \frac{v^2}{R_T} \approx 0{,}034\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, soit $0{,}3\,\%$ de g.
- Voiture dans un virage de rayon $50\,\mathrm{m}$ à $72\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$: $a = 8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 0{,}8\,g$.
- Point de la périphérie d'un disque dur à 7200 tours par minute ($r = 4{,}5\,\mathrm{cm}$) : $a \approx 2{,}6\times10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, soit environ $2600\,g$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Conversions et ordres de grandeur ✦✧✧✧✧

Q-1) Convertir $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ en $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Q-2) Calculer la vitesse moyenne de la Terre sur son orbite autour du Soleil (rayon $1{,}5\times10^8\,\mathrm{km}$, période un an) dans le référentiel héliocentrique.

Q-3) Un disque tourne à 33 tours par minute. Calculer sa vitesse angulaire et la vitesse d'un point situé à $15\,\mathrm{cm}$ de l'axe.

Correction

Q-1) $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = \frac{90\,000}{3600} = 25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 340\times3{,}6 = 1224\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Q-2) $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\times1{,}5\times10^{11}}{3{,}16\times10^7} \approx 30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Q-3) $\omega = \frac{33\times2\pi}{60} = 3{,}46\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $v = r\omega = 0{,}52\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

VIII Synthèse

★ À retenir

	Vitesse	Accélération / déplacement élémentaire
Cartésiennes	$\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$	$\ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$
Cylindriques	$\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$
Sphériques	$\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$	$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$
Frenet	$v\vec{T}$	$\dot{v}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R_c}\vec{N}$

- Base polaire : $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$.
- $\vec{v}\cdot\vec{a} > 0$: mouvement accéléré ; $\vec{v}\cdot\vec{a} < 0$: ralenti.
- Circulaire uniforme : $v = R\omega$, $a = R\omega^2 = v^2/R$, dirigée vers le centre.

IX Exercices d'approfondissement

EXERCICE 9 Ballon-sonde emporté par le vent

★★★✧✧

Un ballon-sonde est lâché depuis l'origine O à $t = 0$. Il atteint quasi instantanément une vitesse ascensionnelle constante v_0, tandis que le vent lui communique une vitesse horizontale, selon $\vec{u}_x$, proportionnelle à son altitude : $v_x = z/\tau$, où τ est une constante.

Q-1) Déterminer $z(t)$ puis $x(t)$.

Q-2) En déduire l'équation de la trajectoire $x(z)$ et la tracer ; représenter $\vec{v}$ en trois points.

Q-3) Calculer le vecteur accélération. Que dire du mouvement ?

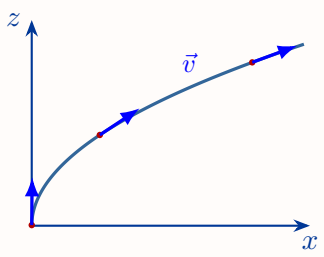
Q-4) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire au point de lâcher.

Q-5) Application : $v_0 = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\tau = 100\,\mathrm{s}$. De quelle distance le ballon a-t-il dérivé lorsqu'il atteint $10\,\mathrm{km}$ d'altitude ?

Correction

Q-1) $\dot{z} = v_0$ donc $z = v_0 t$; puis $\dot{x} = \dfrac{v_0 t}{\tau}$ donc $x = \dfrac{v_0 t^2}{2\tau}$.

Q-2) En éliminant $t = z/v_0$: $x = \dfrac{z^2}{2v_0\tau}$, parabole d'axe horizontal tangente à (Oz) en O. La vitesse, verticale au départ, s'incline de plus en plus vers l'horizontale.



Q-3) $\vec{a} = \dfrac{v_0}{\tau}\,\vec{u}_x$: accélération constante, horizontale. Le mouvement est plan, à accélération constante, d'où la trajectoire parabolique (analogue d'une chute libre « couchée »).

Q-4) En O, $\vec{v} = v_0\vec{u}_z$ est perpendiculaire à $\vec{a}$: $a_N = a = v_0/\tau$ et $R_c = \dfrac{v_0^2}{a_N} = v_0\tau$.

Q-5) $t = z/v_0 = 2000\,\text{s}$ et $x = \dfrac{z^2}{2v_0\tau} = 100\,\text{km}$; $R_c(O) = 500\,\text{m}$.

EXERCICE 10 Mouvement uniforme sur une spirale d'Archimède

Un mobile parcourt à vitesse de norme constante v la spirale d'équation polaire $r = b\,\theta$ ($b > 0$), en partant de O.

Q-1) Exprimer $\vec{v}$ dans la base polaire en fonction de b, θ et $\dot{\theta}$. En déduire $\dot{\theta}$ en fonction de v, b et θ.

Q-2) Montrer que, pour $\theta \gg 1$, $\theta(t) \approx \sqrt{2vt/b}$. Interpréter physiquement.

Correction

Q-1) $\dot{r} = b\dot{\theta}$ donc $\vec{v} = b\dot{\theta}\,\vec{u}_r + b\theta\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ et $v = b\dot{\theta}\sqrt{1+\theta^2}$, soit $\dot{\theta} = \dfrac{v}{b\sqrt{1+\theta^2}}$.

Q-2) Pour $\theta \gg 1$: $\theta\dot{\theta} \approx \frac{v}{b}$, soit $\frac{\theta^2}{2} = \frac{vt}{b}$. La vitesse angulaire diminue car la longueur parcourue à chaque tour ($\approx 2\pi r$) augmente.

EXERCICE 11 Rayon de courbure le long d'une parabole

Un projectile suit la trajectoire $\overrightarrow{OM}(t) = v_0 t\,\vec{u}_x + \left(v_1 t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{u}_y$.

Q-1) Déterminer les composantes tangentielle a_T et normale a_N de l'accélération.

Q-2) En déduire le rayon de courbure au sommet de la trajectoire puis au point de lancement.

Correction

Q-1) $v^2 = v_0^2 + (v_1 - gt)^2$; $a_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{-g(v_1 - gt)}{v}$; comme $a = g$: $a_N = \sqrt{g^2 - a_T^2} = \dfrac{gv_0}{v}$.

Q-2) Au sommet ($v_1 = gt$) : $v = v_0$, $a_N = g$ et $R_c = \dfrac{v_0^2}{g}$. Au lancement : $v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}$ et $R_c = \dfrac{v^2}{a_N} = \dfrac{(v_0^2 + v_1^2)^{3/2}}{gv_0}$.

EXERCICE 12 Rayons de courbure d'une ellipse

Un point décrit l'ellipse $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$ ($a > b > 0$, ω constant).

Q-1) Calculer $\vec{v}$, $\vec{a}$ et montrer que $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$. Le mouvement est-il uniforme ?

Q-2) Établir $R_c = \dfrac{\left(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t\right)^{3/2}}{ab}$.

Q-3) En déduire le rayon de courbure aux extrémités A du grand axe et B du petit axe. Vérifier le cas du cercle.

Correction

Q-1) $\vec{v} = (-a\omega\sin\omega t,\ b\omega\cos\omega t)$ et $\vec{a} = (-a\omega^2\cos\omega t,\ -b\omega^2\sin\omega t) = -\omega^2\overrightarrow{OM}$. $v^2 = \omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)$ varie : le mouvement n'est pas uniforme (sauf si $a = b$).

Q-2) $\|\vec{v}\wedge\vec{a}\| = |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = ab\omega^3$, d'où $R_c = \dfrac{v^3}{ab\omega^3}$ et le résultat.

Q-3) En A $(t=0)$: $R_A = \dfrac{b^2}{a}$; en B $(\omega t = \pi/2)$: $R_B = \dfrac{a^2}{b}$. L'ellipse est plus courbée aux extrémités du grand axe ($R_A < b < a < R_B$). Pour $a = b$, $R_A = R_B = a$.

EXERCICE 13 La cardioïde

✦✦✦✧✧

Un point M décrit la cardioïde $r = b(1+\cos\theta)$ $(b>0)$ avec $\dot{\theta} = \omega$ constant.

Q-1) Représenter l'allure de la trajectoire pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

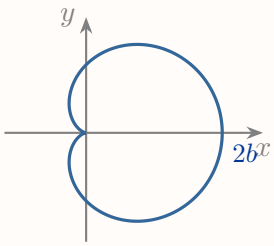
Q-2) Exprimer les composantes polaires de $\vec{v}$ et montrer que $v = 2b\omega\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

Q-3) Exprimer les composantes polaires de $\vec{a}$. Calculer $\vec{a}\cdot\vec{v}$: où le mouvement est-il accéléré ?

Q-4) Déterminer le rayon de courbure en $\theta = 0$.

Correction

Q-1) Courbe en forme de cœur, passant par $(2b, 0)$ pour $\theta = 0$ et par l'origine pour $\theta = \pi$ (point de rebroussement).



Q-2) $\dot{r} = -b\omega\sin\theta$, $r\dot{\theta} = b\omega(1+\cos\theta)$; $v^2 = b^2\omega^2(2+2\cos\theta) = 4b^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

Q-3) $\ddot{r} = -b\omega^2\cos\theta$: $a_r = \ddot{r} - r\omega^2 = -b\omega^2(1+2\cos\theta)$, $a_\theta = 2\dot{r}\omega = -2b\omega^2\sin\theta$. Puis $\vec{a}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = -2b^2\omega^3\sin\theta$: le mouvement est accéléré pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Q-4) En $\theta = 0$: $v = 2b\omega$ et $\vec{a} = -3b\omega^2\vec{u}_r$, perpendiculaire à $\vec{v}$. Donc $R_c = \frac{v^2}{a} = \frac{4b}{3}$.

X Classiques des concours

EXERCICE 14 La cycloïde : roue qui roule sans glisser

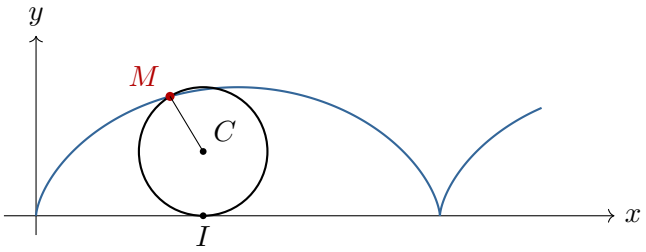


Fig. 4 : Cycloïde décrite par un point de la jante.

Une roue de rayon R roule sans glisser sur le sol (axe Ox) ; son centre C avance à la vitesse constante v_0. Un point M de la jante est en contact avec le sol en O à $t = 0$. On note $\theta(t)$ l'angle dont la roue a tourné.

Q-1) Traduire la condition de roulement sans glissement et en déduire $\dot{\theta}$.

Q-2) Montrer que $x_M = R(\theta - \sin\theta)$ et $y_M = R(1 - \cos\theta)$.

Q-3) Montrer que $v_M = 2v_0 \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$. Où la vitesse est-elle nulle ? maximale ?

Q-4) Montrer que $\vec{v}_M$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{IM}$. Interpréter.

Q-5) Calculer l'accélération de M : montrer qu'elle est dirigée vers C et de norme constante.

Q-6) Calculer la longueur d'une arche (on donne $\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 4$), puis montrer que le rayon de courbure vaut $R_c = 4R\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$.

Q-7) Application : vélo à $36\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, roues de rayon $35\,\mathrm{cm}$. Vitesse maximale et accélération d'un point de la jante ?

Correction

Q-1) Le point de la roue en contact avec le sol a une vitesse nulle : la distance parcourue par C égale l'arc déroulé, $x_C = R\theta$, d'où $\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{R}$.

Q-2) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$ avec $\overrightarrow{OC} = (R\theta, R)$ et $\overrightarrow{CM} = (-R\sin\theta, -R\cos\theta)$: la roue tourne dans le sens horaire et M part du bas.

Q-3) $\dot{x}_M = v_0(1 - \cos\theta)$ et $\dot{y}_M = v_0\sin\theta$, donc $v_M^2 = v_0^2(2 - 2\cos\theta) = 4v_0^2\sin^2\frac{\theta}{2}$. Elle est nulle au contact du sol ($\theta \equiv 0\ [2\pi]$) et maximale, égale à $2v_0$, au sommet de la roue.

Q-4) $\overrightarrow{IM} = (-R\sin\theta, R(1-\cos\theta))$ et $\vec{v}_M \cdot \overrightarrow{IM} = v_0R\left[-(1-\cos\theta)\sin\theta + \sin\theta(1-\cos\theta)\right] = 0$. À chaque instant, la roue tourne autour du point de contact I : c'est le centre instantané de rotation, et $v_M = \dot{\theta} \times IM$.

Q-5) $\ddot{x}_M = \frac{v_0^2}{R}\sin\theta$ et $\ddot{y}_M = \frac{v_0^2}{R}\cos\theta$: $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R^2}\overrightarrow{CM}$, dirigée vers C, de norme constante $\frac{v_0^2}{R}$. Le mouvement de C étant uniforme, il n'ajoute aucune accélération.

Q-6) $L = \int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8R$. Puis $\|\vec{v}\wedge\vec{a}\| = |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}| = \frac{v_0^3}{R}(1-\cos\theta) = \frac{2v_0^3}{R}\sin^2\frac{\theta}{2}$ et $R_c = \frac{v^3}{\|\vec{v}\wedge\vec{a}\|} = 4R\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$: il vaut $4R$ au sommet de l'arche, le double de la hauteur, et s'annule au point de rebroussement.

Q-7) $v_0 = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: $v_{\max} = 20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $a = \frac{v_0^2}{R} = 286\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 29\,g$.

EXERCICE 15 Le chien et son maître (courbe de poursuite)

★★★★☆

Un promeneur A marche en ligne droite à la vitesse constante v_A. Un chien B, initialement à la distance d de A, perpendiculairement à sa route, court à la vitesse de norme constante $v_B > v_A$ en se dirigeant à chaque instant vers son maître. On note $D = AB$ et α l'angle entre $\overrightarrow{BA}$ et la direction de marche.

Q-1) Montrer que $\dot{D} = v_A \cos\alpha - v_B$.

Q-2) En projetant les vitesses sur la route, montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_A - x_B) = v_A - v_B\cos\alpha$.

Q-3) En combinant ces relations, montrer que la durée de la poursuite vaut $T = \dfrac{v_B d}{v_B^2 - v_A^2}$. Application : $d = 100\,\mathrm{m}$, $v_A = 5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, $v_B = 15\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Correction

Q-1) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{BA}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$; en projetant sur le vecteur unitaire $\overrightarrow{BA}/D$: $\dot{D} = v_A\cos\alpha - v_B$.

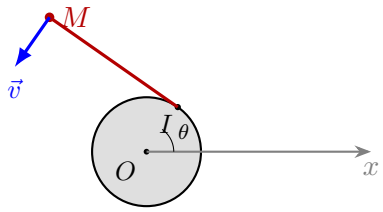
Q-2) Le chien court selon $\overrightarrow{BA}$: sa vitesse a pour projection $v_B\cos\alpha$ sur la route, d'où le résultat.

Q-3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[v_B D + v_A(x_A - x_B)\right] = v_A^2 - v_B^2$. Entre $t = 0$ ($D = d$, $x_A = x_B$) et la rencontre ($D = 0$, $x_A = x_B$) : $-v_B d = (v_A^2 - v_B^2)T$, soit $T = \dfrac{v_B d}{v_B^2 - v_A^2} = 27\,\mathrm{s}$.

EXERCICE 16 Fil qui s'enroule autour d'un cylindre

★★★★☆

Sur un plan horizontal (Oxy) parfaitement lisse, un point M est relié à un fil inextensible dont une partie est enroulée sur un cylindre fixe d'axe (Oz) et de rayon R. La partie libre du fil, tendue, est tangente au cylindre au point I repéré par l'angle θ ; à $t = 0$, $\theta = 0$ et la longueur libre vaut L. Lorsque θ augmente, le fil s'enroule : la longueur libre vaut $\ell = L - R\theta$.



Q-1) Justifier que $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r + (L - R\theta)\,\vec{u}_\theta$.

Q-2) Calculer $\vec{v}$ et montrer qu'il est perpendiculaire au fil.

Q-3) On admet (chapitre M3) que la norme de la vitesse reste égale à sa valeur initiale v_0, car la tension, perpendiculaire à $\vec{v}$, ne travaille pas. En déduire une équation reliant θ, $\dot{\theta}$, L, R et v_0, puis la loi $\theta(t)$.

Q-4) Déterminer la durée τ de l'enroulement complet et le nombre de tours effectués.

Q-5) Calculer $\vec{a}$; montrer qu'il est dirigé vers I et en déduire le rayon de courbure de la trajectoire. Interpréter.

Q-6) Application : $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $R = 5{,}0\,\mathrm{cm}$, $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Que vaut l'accélération quand il ne reste que $10\,\mathrm{cm}$ de fil libre ?

Correction

Q-1) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ avec $\overrightarrow{OI} = R\,\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{IM}$ porté par la tangente en I, c'est-à-dire par $\vec{u}_\theta$, de longueur $\ell = L - R\theta$.

Q-2) $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta - (L - R\theta)\dot{\theta}\,\vec{u}_r = -(L - R\theta)\dot{\theta}\,\vec{u}_r$: $\vec{v}$ est porté par $\vec{u}_r$, donc perpendiculaire au fil (porté par $\vec{u}_\theta$).

Q-3) $(L-R\theta)\dot\theta = v_0$, soit $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\theta - \frac{R}{2}\theta^2\right) = v_0$ et $L\theta - \frac{R}{2}\theta^2 = v_0 t$. La racine qui vérifie $\theta(0)=0$ est $\theta(t) = \dfrac{L - \sqrt{L^2 - 2Rv_0 t}}{R}$.

Q-4) Fil entièrement enroulé pour $\theta_f = L/R$: $\tau = \dfrac{L^2}{2Rv_0}$. Nombre de tours $\dfrac{L}{2\pi R}$.

Q-5) $\vec v = -v_0\,\vec u_r$ donc $\vec a = -v_0\dot\theta\,\vec u_\theta = -\dfrac{v_0^2}{L-R\theta}\,\vec u_\theta$, dirigé de M vers I. Le mouvement étant uniforme, l'accélération est purement normale : $R_c = \ell = IM$. À chaque instant, M tourne autour du point I ; la trajectoire est une *développante de cercle*.

Q-6) $\tau = \frac{1}{2\times 0{,}05\times 2} = 5{,}0\,\mathrm{s}$, soit $\frac{1}{2\pi\times 0{,}05} \approx 3{,}2$ tours. Pour $\ell = 10\,\mathrm{cm}$: $a = \frac{v_0^2}{\ell} = 40\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \approx 4\,g$. L'accélération (et la tension du fil) diverge en fin d'enroulement : en pratique, le fil casse ou le modèle cesse d'être valable.