LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

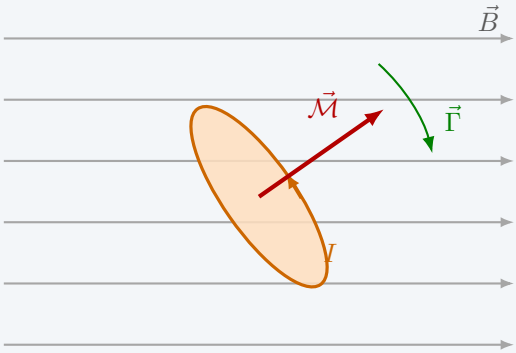
Classes préparatoires aux grandes écoles
**MPSI — Physique-chimie**
Année 2026-2027

# EM4

## ÉLECTROMAGNÉTISME

# Dipôle magnétique

Moment magnétique — Champ à grande distance — Couple et énergie dans un champ extérieur — Boussole — Moteur synchrone




> *Ce qu'il y a d'éternellement incompréhensible dans le monde, c'est qu'il soit compréhensible.*
>
> — Albert Einstein, « Physique et réalité » (1936)

physionova
physionova.academy

**Pr. CHARIFI**
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Dipôle magnétique dans un champ »

# EM4 — Dipôle magnétique

## Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Définir le moment magnétique d'une boucle de courant ; associer un moment à un aimant ; connaître des ordres de grandeur.
- Connaître le champ d'un dipôle magnétique à grande distance ; comparer les cartes de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ dipolaires.
- Établir le couple subi par une spire rectangulaire dans un champ uniforme ; utiliser $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ et $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$.
- Étudier le mouvement d'un aimant dans un champ uniforme ; discuter équilibres et stabilité.
- Décrire le principe de la boussole et du moteur synchrone.

### Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Dipôle magnétique dans un champ » montre une boucle de courant qui oscille autour de la direction du champ et permet de visualiser le couple et l'énergie potentielle.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

## Table des matières

I Moment magnétique . . . 3
I.1 Boucle de courant . . . 3
II Champ créé à grande distance . . . 4
II.1 Champ dipolaire magnétique . . . 5
II.2 Analogie avec le dipôle électrostatique . . . 5
III Actions d'un champ magnétique extérieur . . . 7
III.1 Force de Laplace et couple sur une spire rectangulaire . . . 7
III.2 Couple et énergie potentielle . . . 7
III.3 Champ non uniforme : une force . . . 8
III.4 Applications : boussole et moteur synchrone . . . 8
IV Moment magnétique et moment cinétique . . . 9
V Synthèse . . . 10
VI Exercices d'approfondissement . . . 10
VII Classiques des concours . . . 12

# I Moment magnétique

## I.1 Boucle de courant

Au chapitre EM3, on a vu que le champ d'une spire décroît sur son axe en $\frac{1}{|z|^3}$, comme celui d'un dipôle électrostatique. Une petite boucle de courant joue en magnétostatique le rôle du doublet : c'est le **dipôle magnétique**.

**Définition — Moment magnétique** R

Une boucle de courant plane, de surface $S$, parcourue par l'intensité $I$, possède le **moment magnétique**

$$\vec{\mathcal{M}} = I\,S\,\vec{n} \qquad (\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2)$$

où la normale unitaire $\vec{n}$ est orientée par le sens du courant (règle de la main droite : les doigts suivent le courant, le pouce indique $\vec{n}$). Pour une spire circulaire de rayon $R$, $\mathcal{M} = I\pi R^2$ ; pour une bobine plate de $N$ spires, $\mathcal{M} = NI\pi R^2$.

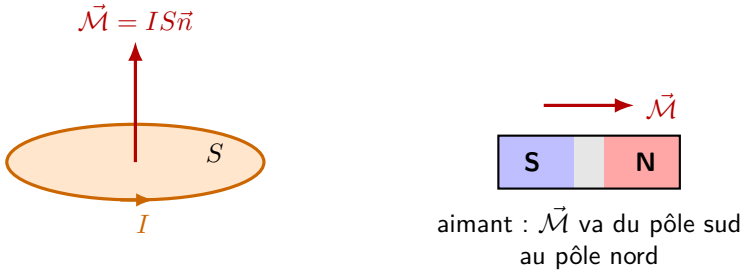



**Fig. 1 :** Moment magnétique d'une spire et d'un aimant droit.

**Moment d'une boucle quelconque ; aimants** R

- Pour un circuit fermé quelconque (pas forcément plan), $\vec{\mathcal{M}} = I\iint_S \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\oint \overrightarrow{OP}\wedge I\,\mathrm{d}\overrightarrow{OP}$, où $S$ est une surface quelconque s'appuyant sur le circuit.
- Pour une distribution volumique, on remplace $I\,\mathrm{d}\overrightarrow{OP}$ par $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$ : $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\iiint \overrightarrow{OP}\wedge\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$.
- Un **aimant** se comporte, à grande distance, comme la spire qui crée le même champ : son moment est celui de cette « spire équivalente », dirigé du pôle **sud** vers le pôle **nord**. Son **aimantation** est son moment par unité de volume ($\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-1}$).

**Ordres de grandeur**

| | |
|---|---|
| Bobine de TP ($N = 100$, $R = 5\,\mathrm{cm}$, $I = 1\,\mathrm{A}$) | $0{,}8\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ |
| Petit aimant au néodyme ($1\,\mathrm{cm}^3$, aimantation $10^6\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) | $1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ |
| Terre | $8\times10^{22}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ |
| Atome (magnéton de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$) | $9{,}27\times10^{-24}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ |

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 1 Moments de distributions chargées en rotation

★★☆☆☆

**Q-1)** Un disque de rayon $R$, de densité surfacique uniforme $\sigma$, tourne à la vitesse angulaire $\omega$ autour de son axe. Montrer que la couronne de rayons $r$ et $r+\mathrm{d}r$ équivaut à une spire parcourue par $\mathrm{d}I = \sigma\omega r\,\mathrm{d}r$. En déduire $\mathcal{M}$.

**Q-2)** Une sphère de rayon $R$ porte la charge $Q$ uniformément répartie en surface et tourne à $\omega$ autour d'un diamètre. Montrer que la zone comprise entre les colatitudes $\theta$ et $\theta+\mathrm{d}\theta$ équivaut à une spire de courant $\mathrm{d}I = \sigma\omega R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, puis que $\mathcal{M} = \frac{Q\omega R^2}{3}$.

**Q-3)** On suppose que la masse $m$ de la sphère est répartie comme sa charge (moment d'inertie $\frac{2}{3}mR^2$). Calculer $\frac{\mathcal{M}}{L}$, où $L$ est le moment cinétique.

**Correction**

**Q-1)** La charge $\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r\,\mathrm{d}r$ passe en un point fixe $\frac{\omega}{2\pi}$ fois par seconde : $\mathrm{d}I = \sigma\omega r\,\mathrm{d}r$. Alors $\mathrm{d}\mathcal{M} = \pi r^2\mathrm{d}I$ et $\mathcal{M} = \pi\sigma\omega\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}$.

**Q-2)** $\mathrm{d}q = \sigma\,2\pi R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q$. La spire a pour rayon $R\sin\theta$ : $\mathrm{d}\mathcal{M} = \pi R^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}I$, et avec $\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$, $\mathcal{M} = \frac{4}{3}\pi\sigma\omega R^4 = \frac{Q\omega R^2}{3}$.

**Q-3)** $L = \frac{2}{3}mR^2\omega$ : $\frac{\mathcal{M}}{L} = \frac{Q}{2m}$. Ce **rapport gyromagnétique** se retrouve pour l'électron sur son orbite (exercice d'approfondissement).

### EXERCICE 2 Un aimant au néodyme

★☆☆☆☆

Une pastille aimantée cylindrique (rayon $5\,\mathrm{mm}$, épaisseur $2\,\mathrm{mm}$) a une aimantation $1{,}0\times10^6\,\mathrm{A\cdot m^{-1}}$, uniforme et dirigée selon son axe.

**Q-1)** Calculer son moment magnétique.

**Q-2)** Quel courant faudrait-il faire circuler dans une spire de même rayon pour obtenir le même moment ? Commenter.

**Q-3)** Dans le fer, l'aimantation maximale est $1{,}7\times10^6\,\mathrm{A\cdot m^{-1}}$ pour $8{,}5\times10^{28}\,\mathrm{atomes\cdot m^{-3}}$. Calculer le moment par atome en magnétons de Bohr. Conclure.

**Correction**

**Q-1)** $V = \pi R^2 e = 1{,}6\times10^{-7}\,\mathrm{m^3}$ et $\mathcal{M} = 0{,}16\,\mathrm{A\cdot m^2}$.

**Q-2)** $I = \frac{\mathcal{M}}{\pi R^2} = 2{,}0\times10^3\,\mathrm{A}$ : un courant énorme, impossible à entretenir dans un fil fin. L'aimant équivaut à des courants microscopiques superficiels.

**Q-3)** $\frac{1{,}7\times10^6}{8{,}5\times10^{28}} = 2{,}0\times10^{-23}\,\mathrm{A\cdot m^2} \approx 2{,}2\,\mu_B$ : l'aimantation provient des moments atomiques (essentiellement de spin), alignés collectivement.

# II Champ créé à grande distance

## II.1 Champ dipolaire magnétique

### Champ d'un dipôle magnétique (admis) R

À grande distance d'une boucle de taille $a$ ($r \gg a$ : approximation dipolaire), en coordonnées sphériques d'axe $\vec{\mathcal{M}}$ :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \qquad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \qquad B_\varphi = 0$$

soit, sous forme intrinsèque :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{u}_r\right)\vec{u}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3}$$

**Vérification sur l'axe D.** Pour une spire, $\theta = 0$ donne $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I\pi R^2}{z^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$, qui est bien la limite pour $z \gg R$ du champ exact $\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$ (chapitre EM3).

**Remarque**

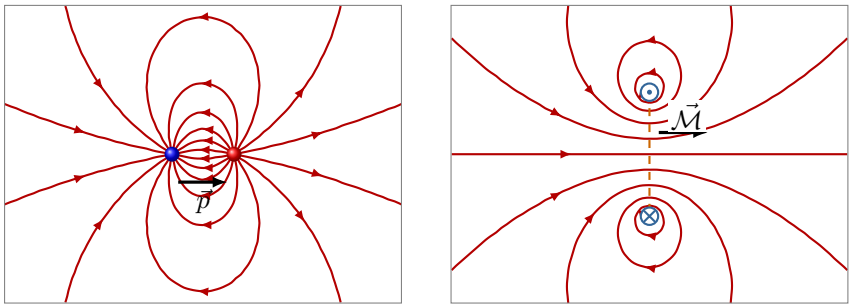
**Symétries.** Le plan de la spire est un plan de **symétrie** des courants ; les plans contenant l'axe sont des plans d'**antisymétrie**. On en déduit $B_\varphi = 0$ ; l'invariance par rotation autour de l'axe donne $B_r(r,\theta)$ et $B_\theta(r,\theta)$. Les plans jouent des rôles inversés par rapport au dipôle électrostatique, mais le champ obtenu à grande distance a la même structure.

## II.2 Analogie avec le dipôle électrostatique

### Analogie et différences R

Les expressions sont identiques à celles du dipôle électrostatique en remplaçant $\vec{p}$ par $\vec{\mathcal{M}}$ et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $\frac{\mu_0}{4\pi}$. À grande distance, les deux cartes coïncident (lignes $r = K\sin^2\theta$). Près des sources, elles diffèrent :

- les lignes de $\vec{E}$ partent de $+q$ et aboutissent à $-q$ : entre les charges, $\vec{E}$ est **opposé** à $\vec{p}$ ;
- les lignes de $\vec{B}$ sont **fermées** et traversent la spire : au centre, $\vec{B}$ est **de même sens** que $\vec{\mathcal{M}}$.




(a) doublet $\pm q$ (b) spire de courant

**Fig. 2 :** Cartes de champ exactes d'un doublet et d'une spire, de même axe et de tailles comparables : identiques de loin, très différentes près des sources. Entre les charges, $\vec{E}$ est opposé à $\vec{p}$ ; au centre de la spire, $\vec{B}$ a le sens de $\vec{\mathcal{M}}$.

| | Dipôle électrostatique | Dipôle magnétique |
|---|---|---|
| Modèle | doublet $\pm q$ | boucle de courant |
| Moment | $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$ | $\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$ |
| Champ lointain | $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$ | $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3}$ |
| Plan perpendiculaire au moment | antisymétrie | symétrie |
| Plans contenant l'axe | symétrie | antisymétrie |
| Couple dans un champ uniforme | $\vec{p}\wedge\vec{E}$ | $\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B}$ |
| Énergie potentielle | $-\vec{p}\cdot\vec{E}$ | $-\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}$ |

**Tab. 1 :** Comparaison des dipôles électrostatique (chapitre EM2) et magnétique.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 3 — Une spire vue de loin

✦✧✧✧✧

**Q-1)** Comparer le champ exact sur l'axe d'une spire de rayon $R$ et le champ dipolaire correspondant.

**Q-2)** À partir de quelle distance l'écart relatif est-il inférieur à $1\,\%$ ?

**Q-3)** Calculer le champ créé sur son axe à $1\,\mathrm{m}$ par un dipôle de $1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$, puis dans son plan médiateur à la même distance.

**Correction**

**Q-1)** $\frac{B}{B_{\text{dip}}} = \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{R^2}{z^2}$.

**Q-2)** $\frac{3}{2}\frac{R^2}{z^2} < 0,01$ pour $z > \sqrt{150}\,R \approx 12R$.

**Q-3)** Sur l'axe : $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}}{r^3} = 0{,}2\,\mu\mathrm{T}$ ; dans le plan médiateur, deux fois moins, $0{,}1\,\mu\mathrm{T}$, et de sens opposé à $\vec{\mathcal{M}}$.

### EXERCICE 4 — Moment magnétique de la Terre

✦✧✧✧✧

À l'équateur, le champ terrestre est horizontal et vaut $B_0 = 3{,}1\times10^{-5}\,\mathrm{T}$. On modélise la Terre ($R_T = 6370\,\mathrm{km}$) par un dipôle placé en son centre.

**Q-1)** Calculer $\mathcal{M}$.

**Q-2)** Quel courant faudrait-il dans une spire équatoriale de rayon $R_T$ pour produire ce moment ?

**Correction**

**Q-1)** À l'équateur, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $B_0 = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi R_T^3}$ : $\mathcal{M} = \frac{4\pi R_T^3 B_0}{\mu_0} = 8{,}0\times10^{22}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$.

**Q-2)** $I = \frac{\mathcal{M}}{\pi R_T^2} = 6{,}3\times10^8\,\mathrm{A}$ : ce champ est en fait entretenu par les mouvements du fer liquide du noyau (effet dynamo).

# III Actions d'un champ magnétique extérieur

## III.1 Force de Laplace et couple sur une spire rectangulaire

### Force de Laplace R

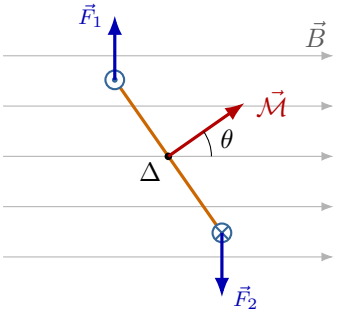
Un élément $\mathrm{d}\vec{\ell}$ d'un conducteur parcouru par $I$, placé dans un champ magnétique **extérieur** $\vec{B}$, subit la force

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

C'est la résultante, à l'échelle macroscopique, des forces de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ subies par les porteurs de charge, transmises au réseau du conducteur. Le champ créé par le circuit lui-même n'intervient pas.

**Résultante dans un champ uniforme D.** Pour un circuit fermé dans un champ uniforme : $\vec{F} = I\left(\oint \mathrm{d}\vec{\ell}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$, car $\oint \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{0}$.

**Moment sur une spire rectangulaire D.** Une spire rectangulaire, de côtés $a$ (horizontal) et $b$ (vertical, parallèle à l'axe de rotation $\Delta$), est placée dans un champ horizontal uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_x$ ; sa normale $\vec{n}$ fait l'angle $\theta$ avec $\vec{B}$ (vue de dessus ci-contre).




- Les forces sur les côtés horizontaux sont parallèles à $\Delta$ : leur moment par rapport à $\Delta$ est nul.
- Sur les côtés verticaux, les forces $\pm IbB\,\vec{u}_y$ sont opposées et forment un couple, de bras de levier $a\sin\theta$ : $\Gamma_\Delta = -IabB\sin\theta$.

Avec $\mathcal{M} = Iab$, on retrouve $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.

## III.2 Couple et énergie potentielle

### Actions d'un champ uniforme sur un dipôle magnétique rigide R

Ce résultat se généralise à toute boucle de courant et à tout aimant : dans un champ uniforme $\vec{B}$, la résultante est nulle et les actions se réduisent à un couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \qquad E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

Le couple tend à **aligner** $\vec{\mathcal{M}}$ sur $\vec{B}$ : c'est le principe de la boussole.

**Énergie potentielle par l'intégrale première D.** Un aimant de moment d'inertie $J$, mobile autour d'un axe fixe perpendiculaire à $\vec{B}$, vérifie (chapitre M6) $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B\sin\theta$. En multipliant par $\dot{\theta}$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \mathcal{M}B\cos\theta\right) = 0.$$

On reconnaît la conservation de l'énergie mécanique $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + E_p$ avec $E_p = -\mathcal{M}B\cos\theta = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$.

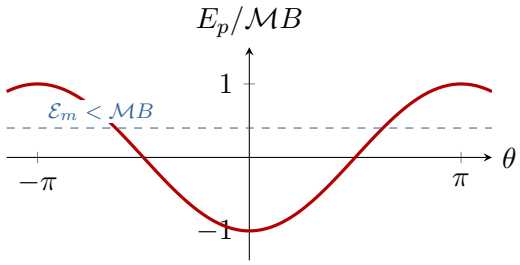



**Fig. 3 :** Énergie potentielle d'un aimant dans un champ uniforme : puits en $\theta = 0$ (stable), barrière de hauteur $2\mathcal{M}B$ en $\theta = \pm\pi$ (instable).

**☞ Méthode — Discuter le mouvement d'un aimant** M

- Équilibres : $\Gamma = 0$ pour $\theta = 0$ (stable, $E_p$ minimale) et $\theta = \pi$ (instable, $E_p$ maximale).
- Petites oscillations autour de $\theta = 0$ : $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B}{J}}$ (analogue du pendule pesant).
- Si l'énergie mécanique est inférieure à $\mathcal{M}B$, le mouvement est **pendulaire** ; sinon il est **révolutif**. Partant de $\theta = 0$, il faut une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0 > 2\sqrt{\frac{\mathcal{M}B}{J}}$ pour que l'aimant fasse des tours complets.

## III.3 Champ non uniforme : une force

**Force sur un dipôle magnétique rigide (admise)** R

Dans un champ non uniforme, $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$ reste valable et le dipôle subit, à orientation fixée,

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}\right)$$

Un dipôle aligné sur le champ est attiré vers les **zones de champ intense**.

**Remarque**

Deux aimants alignés dans le même sens (pôles opposés en regard) s'attirent. Un morceau de fer, dont les moments microscopiques s'alignent sur le champ, est attiré vers les pôles d'un aimant, là où le champ est le plus intense. Dans l'expérience de Stern et Gerlach (classique ci-dessous), cette force permet de mesurer la projection du moment magnétique d'un atome.

## III.4 Applications : boussole et moteur synchrone

**Boussole.** Une aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical, s'oriente selon la composante horizontale $\vec{B}_h$ du champ terrestre. En première approximation, la Terre est un dipôle dont le moment est dirigé vers le **sud** géographique : le pôle nord de l'aiguille est attiré vers le nord géographique, qui est un pôle sud magnétique.

**Champ tournant.** Deux bobines identiques d'axes orthogonaux $Ox$ et $Oy$, alimentées par des courants $I_0 \cos\omega t$ et $I_0 \sin\omega t$, créent au centre le champ $\vec{B} = B_0\,(\cos\omega t\,\vec{u}_x + \sin\omega t\,\vec{u}_y)$, de norme constante, qui tourne à la vitesse angulaire $\omega$. Dans les machines industrielles, trois bobinages décalés de $\frac{2\pi}{3}$ et alimentés par le réseau triphasé produisent le même effet.

**Moteur synchrone.** Un rotor aimanté de moment $\vec{\mathcal{M}}$, placé dans ce champ, ne peut fournir un couple moyen non nul que s'il tourne **à la même vitesse** que le champ (condition de synchronisme). En notant $\varphi$ l'angle de retard de $\vec{\mathcal{M}}$ sur $\vec{B}$, le couple moteur vaut $\mathcal{M}B_0 \sin\varphi$ ; en régime permanent, il équilibre le couple résistant

$\Gamma_r$ : $\sin\varphi = \frac{\Gamma_r}{\mathcal{M}B_0}$. Le moteur décroche si $\Gamma_r > \mathcal{M}B_0$.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 5 Oscillations d'une boussole ✦✧✧✧✧

Une aiguille aimantée de moment $\mathcal{M} = 0{,}5\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$ et de moment d'inertie $J = 2\times10^{-6}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ oscille dans le plan horizontal autour de la direction de $\vec{B}_h$, avec $B_h = 2\times10^{-5}\,\mathrm{T}$.

**Q-1)** Calculer la période des petites oscillations.

**Q-2)** Comment cette mesure permet-elle de déterminer $B_h$ ?

**Q-3)** Quelle vitesse angulaire minimale faut-il communiquer à l'aiguille, initialement au repos à l'équilibre, pour qu'elle fasse un tour complet ?

**Correction**

**Q-1)** $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B_h\sin\theta$ : $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B_h}} = 2{,}8\,\mathrm{s}$.

**Q-2)** Connaissant $J$ et $\mathcal{M}$, on en déduit $B_h = \frac{4\pi^2 J}{\mathcal{M}T^2}$ (méthode de Gauss).

**Q-3)** Il faut franchir la barrière $2\mathcal{M}B_h$ : $\frac{1}{2}J\dot{\theta}_0^2 > 2\mathcal{M}B_h$, soit $\dot{\theta}_0 > 2\sqrt{\frac{\mathcal{M}B_h}{J}} = 4{,}5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

### EXERCICE 6 Boussole des tangentes ✦✦✧✧✧

**Q-1)** En un lieu donné, le champ terrestre a pour norme $B = 47{,}5\,\mu\mathrm{T}$ et fait avec l'horizontale l'angle (inclinaison) $I = 64°$. Calculer sa composante horizontale $B_h$.

**Q-2)** Une bobine plate de $N$ spires, de rayon $R$, est placée verticalement dans le plan du méridien magnétique ; une petite aiguille mobile autour d'un axe vertical est en son centre. Quand on fait passer le courant $I_b$, l'aiguille tourne de $\alpha$. Montrer que $\tan\alpha = \frac{\mu_0 N I_b}{2RB_h}$.

**Q-3)** Avec $N = 10$ et $R = 10\,\mathrm{cm}$, quel courant donne $\alpha = 45°$ ?

**Correction**

**Q-1)** $B_h = B\cos I = 20{,}8\,\mu\mathrm{T}$.

**Q-2)** La bobine crée en son centre un champ horizontal $B_b = \frac{\mu_0 N I_b}{2R}$, perpendiculaire au méridien ; l'aiguille s'aligne sur la résultante $\vec{B}_h + \vec{B}_b$, qui fait l'angle $\alpha$ avec le méridien : $\tan\alpha = \frac{B_b}{B_h}$.

**Q-3)** $B_b = B_h$ : $I_b = \frac{2RB_h}{\mu_0 N} = 0{,}33\,\mathrm{A}$.

# IV Moment magnétique et moment cinétique

### Rapport gyromagnétique orbital R D

Dans le modèle de Bohr, l'électron (charge $-e$, masse $m_e$) décrit un cercle de rayon $r$ à la vitesse $v$. Il équivaut à une spire parcourue par un courant d'intensité $\frac{ev}{2\pi r}$, de sens opposé à son mouvement, d'où $\mathcal{M} = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2}$. Son moment cinétique vaut $L = m_e v r$ :

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}_O$$

La quantification $L = n\hbar$ donne des moments multiples du **magnéton de Bohr** $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27\times$

$10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}$.

**Remarque**

Ce lien entre magnétisme et rotation est général (exercice sur les charges en rotation : $\frac{\mathcal{M}}{L}=\frac{q}{2m}$). Le spin de l'électron, propriété quantique sans équivalent classique, porte lui aussi un moment magnétique de l'ordre de $\mu_B$ : c'est l'origine principale du magnétisme des aimants.

## V Synthèse

**★ À retenir**

- $\vec{\mathcal{M}}=IS\vec{n}$ (main droite) ; aimant : de S vers N ; ordres de grandeur : $1\,\mathrm{A\cdot m^2}$ (aimant), $8\times10^{22}\,\mathrm{A\cdot m^2}$ (Terre), $\mu_B=9{,}27\times10^{-24}\,\mathrm{A\cdot m^2}$.
- Champ lointain : $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r-\vec{\mathcal{M}}}{r^3}$ ; même carte que le dipôle électrostatique de loin, lignes fermées près de la spire.
- Force de Laplace $\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}$ ; champ uniforme : $\vec{F}=\vec{0}$, $\vec{\Gamma}=\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B}$, $E_p=-\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}$.
- Équilibre stable pour $\vec{\mathcal{M}}$ aligné sur $\vec{B}$ ; oscillations $\omega_0=\sqrt{\mathcal{M}B/J}$ ; barrière $2\mathcal{M}B$.
- Champ non uniforme : $\vec{F}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B})$, attraction vers les champs forts.
- $\vec{\mathcal{M}}=-\frac{e}{2m_e}\vec{L}$ pour l'électron orbital.

**Pour aller plus loin**

Les actions de Laplace sur des circuits mobiles et l'induction électromagnétique (conversion électromécanique, rails de Laplace, haut-parleur, freinage par courants de Foucault) seront étudiées en deuxième année. Le dipôle magnétique y sert de modèle pour la matière aimantée.

## VI Exercices d'approfondissement

### EXERCICE 7 Latitude et inclinaison magnétique ✦✦✦✧✧

On modélise le champ terrestre par un dipôle de moment $\vec{\mathcal{M}}$ placé au centre $O$ de la Terre et dirigé vers le sud géographique ; $B_0=3{,}1\times10^{-5}\,\mathrm{T}$ est le champ à l'équateur.

**Q-1)** Exprimer les composantes horizontale $B_h$ et verticale $B_v$ du champ, l'inclinaison $I$ (angle entre $\vec{B}$ et l'horizontale) et la norme $B$ en un lieu de latitude $\lambda$ (hémisphère nord).

**Q-2)** Application à Paris ($\lambda=48{,}85°$, valeurs mesurées : $I\approx64°$, $B\approx47\,\mu\mathrm{T}$) et à Casablanca ($\lambda=33{,}6°$). Commenter.

**Q-3)** En quels points de la Terre la boussole est-elle inutilisable ?

**Correction**

**Q-1)** L'angle entre $\vec{\mathcal{M}}$ et $\overrightarrow{OM}$ vaut $\theta=\frac{\pi}{2}+\lambda$, donc $\cos\theta=-\sin\lambda$ et $\sin\theta=\cos\lambda$ : $B_r=-2B_0\sin\lambda$ (vertical, vers le bas) et $B_\theta=B_0\cos\lambda$ (horizontal, vers le nord). D'où $B_h=B_0\cos\lambda$, $B_v=2B_0\sin\lambda$, $\tan I=2\tan\lambda$ et $B=B_0\sqrt{1+3\sin^2\lambda}$.

**Q-2)** Paris : $I = 66{,}4°$, $B = 51\,\mu\text{T}$, $B_h = 20\,\mu\text{T}$. Casablanca : $I = 53{,}0°$, $B = 43\,\mu\text{T}$. Le modèle dipolaire donne le bon ordre de grandeur ; les écarts proviennent de l'inclinaison de l'axe du dipôle sur l'axe de rotation (environ $10°$) et des composantes non dipolaires du champ.

**Q-3)** Aux pôles magnétiques, $B_h = 0$ : l'aiguille horizontale n'a plus de direction privilégiée.

## EXERCICE 8 Force entre deux aimants

✦✦✦✧✧

Deux petits aimants de moments $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont placés sur un même axe, à la distance $r$, avec des moments de même sens.

**Q-1)** Exprimer l'énergie potentielle de l'aimant 2 dans le champ de l'aimant 1, puis la force qu'il subit. Est-elle attractive ?

**Q-2)** Application : $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = 1\,\text{A}\cdot\text{m}^2$, à $r = 5\,\text{cm}$ puis $10\,\text{cm}$.

**Q-3)** Que se passe-t-il si l'on retourne l'un des aimants ?

### Correction

**Q-1)** Sur l'axe, $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathcal{M}_1}{r^3}$ ; $E_p = -\mathcal{M}_2 B_1 = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}{2\pi r^3}$ et $F_r = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}{2\pi r^4} < 0$ : attraction.

**Q-2)** $F = 0{,}096\,\text{N}$ à $5\,\text{cm}$, $6{,}0\times10^{-3}\,\text{N}$ à $10\,\text{cm}$ : la force décroît en $\frac{1}{r^4}$.

**Q-3)** La force change de signe (répulsion), mais cette position est instable : le couple tend à retourner l'aimant pour revenir à la configuration attractive.

## EXERCICE 9 Moteur synchrone

✦✦✦✧✧

Un rotor aimanté de moment $\mathcal{M} = 6\,\text{A}\cdot\text{m}^2$ est placé dans un champ tournant de norme $B_0 = 0{,}25\,\text{T}$, de fréquence de rotation $50\,\text{tr}\cdot\text{s}^{-1}$.

**Q-1)** Le rotor tourne à la vitesse du champ, avec un retard angulaire constant $\varphi$. Exprimer le couple qu'il reçoit. Que vaut $\varphi$ à vide ?

**Q-2)** Il entraîne une charge exerçant un couple résistant $\Gamma_r = 0{,}60\,\text{N}\cdot\text{m}$. Calculer $\varphi$ et la puissance mécanique fournie. D'où provient cette énergie ?

**Q-3)** La vitesse du moteur dépend-elle de la charge ? Quel couple maximal peut-il fournir ?

### Correction

**Q-1)** $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$, de norme $\mathcal{M}B_0 \sin\varphi$, moteur si $\vec{\mathcal{M}}$ est en retard sur $\vec{B}$. À vide (sans frottement), $\Gamma = 0$ : $\varphi = 0$, le rotor est aligné sur le champ.

**Q-2)** $\sin\varphi = \frac{\Gamma_r}{\mathcal{M}B_0} = 0{,}40$, $\varphi = 24°$ ; $P = \Gamma_r\omega = 0{,}60\times2\pi\times50 = 190\,\text{W}$, fournie par les générateurs qui alimentent les bobines du champ tournant.

**Q-3)** Non : la vitesse est imposée par la fréquence du champ (d'où le nom de moteur synchrone). Le couple maximal vaut $\mathcal{M}B_0 = 1{,}5\,\text{N}\cdot\text{m}$ ; au-delà, le moteur décroche et s'arrête.

### EXERCICE 10 Modèle magnétique de l'atome d'hydrogène ★★★☆☆

Dans le modèle de Bohr, l'électron décrit autour du proton une orbite circulaire de rayon $a_0 = 53\,\text{pm}$.

**Q-1)** Déterminer sa vitesse $v$ par le principe fondamental de la dynamique, puis l'intensité $I$ du courant équivalent.

**Q-2)** Calculer le moment magnétique et vérifier qu'il vaut $\mu_B$ (on admet $L = \hbar$).

**Q-3)** Calculer le champ créé par l'électron au centre de l'orbite. Comparer aux champs usuels.

**Q-4)** L'atome est placé dans un champ de $1\,\text{T}$. Calculer l'énergie d'interaction maximale en $\text{eV}$ et la comparer à l'énergie d'ionisation $13{,}6\,\text{eV}$.

**Correction**

**Q-1)** $\frac{m_e v^2}{a_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2}$ donne $v = 2{,}19 \times 10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $I = \frac{ev}{2\pi a_0} = 1{,}05\,\text{mA}$.

**Q-2)** $\mathcal{M} = I\pi a_0^2 = \frac{eva_0}{2} = 9{,}3 \times 10^{-24}\,\text{A}\cdot\text{m}^2$, et $\frac{e}{2m_e}L = \frac{e\hbar}{2m_e} = \mu_B$.

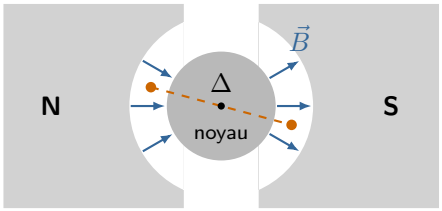
**Q-3)** $B = \frac{\mu_0 I}{2a_0} = 12\,\text{T}$, comparable aux électroaimants les plus puissants.

**Q-4)** $\mu_B B = 9{,}3\times10^{-24}\,\text{J} = 5{,}8\times10^{-5}\,\text{eV}$, très petit devant $13{,}6\,\text{eV}$ : le champ ne fait que dédoubler légèrement les raies spectrales (effet Zeeman).

## VII Classiques des concours

### EXERCICE 11 Le galvanomètre à cadre mobile ★★★★☆

Un cadre rectangulaire de $N = 100$ spires, de côtés $a = 1\,\text{cm}$ (horizontal) et $b = 2\,\text{cm}$ (vertical), peut tourner autour d'un axe vertical $\Delta$ passant par son centre. Un fil de torsion exerce le couple de rappel $-C\theta$, avec $C = 1{,}0\times10^{-6}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$. Un aimant muni de pièces polaires et d'un noyau cylindrique crée dans l'entrefer un champ **radial** de norme $B = 0{,}20\,\text{T}$ au niveau des côtés verticaux du cadre. Le moment d'inertie du cadre est $J = 2\times10^{-8}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.




côtés verticaux du cadre (vue de dessus)

**Q-1)** Montrer que, grâce au champ radial, les forces de Laplace sur les côtés verticaux restent perpendiculaires au plan du cadre quelle que soit sa position. Calculer leur moment $\Gamma$ par rapport à $\Delta$. Que dire des forces sur les côtés horizontaux ?

**Q-2)** En déduire l'angle de déviation à l'équilibre et la sensibilité $\frac{\theta}{I}$. Calculer $\theta$ pour $I = 10\,\mu\text{A}$.

**Q-3)** Un miroir fixé au cadre réfléchit un pinceau lumineux sur une règle située à $D = 1\,\text{m}$. De combien le spot se déplace-t-il ?

**Q-4)** Pourquoi un champ radial est-il préférable à un champ uniforme ?

**Q-5)** On coupe brusquement le courant. Établir l'équation du mouvement en l'absence d'amortissement et calculer la période des oscillations. Pourquoi faut-il les amortir ? Proposer un moyen.

**Correction**

**Q-1)** Sur un côté vertical, $\vec{F} = NIb\,\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r = NIbB\,\vec{u}_\theta$ : force toujours orthoradiale, de bras de levier $\frac{a}{2}$. Les deux côtés donnent un couple $\Gamma = 2NIbB\frac{a}{2} = NBSI$ avec $S = ab$, indépendant de $\theta$. Sur les côtés horizontaux, les forces sont parallèles à $\Delta$ : moment nul.

**Q-2)** $NBSI = C\theta$ : $\theta = \frac{NBS}{C}I$, sensibilité $4{,}0 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot A^{-1}}$ ; pour $10\,\mu\mathrm{A}$, $\theta = 0{,}04\,\mathrm{rad} = 2{,}3°$.

**Q-3)** Le rayon réfléchi tourne de $2\theta$ : le spot se déplace de $2D\theta = 8\,\mathrm{cm}$.

**Q-4)** Le couple ne dépend pas de $\theta$ : la déviation est proportionnelle à $I$ (graduation linéaire). Dans un champ uniforme, le couple varierait en $\cos\theta$.

**Q-5)** $J\ddot{\theta} + C\theta = 0$ : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} = 0{,}89\,\mathrm{s}$. Sans amortissement, l'aiguille oscillerait longtemps et la lecture serait impossible. On bobine le cadre sur un support en aluminium : les courants induits par son mouvement dans le champ créent un couple de freinage (étudié avec l'induction).

## EXERCICE 12 L'expérience de Stern et Gerlach (1922)

★★★★☆

Un four à $T = 1300\,\mathrm{K}$ émet des atomes d'argent ($M = 108\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) ; des fentes sélectionnent un jet horizontal d'atomes de vitesse $v = 600\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, selon $Ox$. Le jet traverse, sur une longueur $L = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, l'entrefer d'un électroaimant dont les pièces polaires créent un champ dirigé selon $Oz$, fortement non uniforme : $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{T \cdot m^{-1}}$. Chaque atome se comporte comme un dipôle de moment de norme $\mu_B$.

**Q-1)** Les atomes sont neutres. Pourquoi l'expérience serait-elle impossible avec des ions ?

**Q-2)** Montrer qu'un atome dont le moment fait l'angle $\alpha$ avec $\vec{u}_z$ subit la force $F_z = \mu_B \cos\alpha\,\frac{\partial B_z}{\partial z}$. Pourquoi faut-il un champ non uniforme ?

**Q-3)** Calculer l'accélération maximale d'un atome, la durée de traversée et la déviation maximale à la sortie. La pesanteur est-elle négligeable ?

**Q-4)** **Prédiction classique.** À la sortie du four, les moments sont orientés au hasard (vérifier que $\mu_B B \ll k_B T$ pour $B \approx 1\,\mathrm{T}$). Quelle figure attend-on sur la plaque de détection ?

**Q-5)** **Observation.** On observe deux taches symétriques, séparées d'environ $0{,}2\,\mathrm{mm}$. Interpréter. Quelle grandeur est quantifiée ?

**Correction**

**Q-1)** Un ion de charge $e$ subirait la force de Lorentz $e\vec{v} \wedge \vec{B}$, de l'ordre de $10^{-16}\,\mathrm{N}$, qui masquerait complètement la force subie par le dipôle (de l'ordre de $10^{-20}\,\mathrm{N}$).

**Q-2)** $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} \approx -\mu_B \cos\alpha\, B_z(z)$ et $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$. Dans un champ uniforme, la résultante serait nulle : seul un couple s'exercerait.

**Q-3)** $m = \frac{M}{N_A} = 1{,}79 \times 10^{-25}\,\mathrm{kg}$ ; $a_{\max} = \frac{\mu_B}{m}\frac{\partial B_z}{\partial z} = 5{,}2 \times 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (environ $5000\,g$ : pesanteur négligeable) ; $t = \frac{L}{v} = 58\,\mu\mathrm{s}$ ; $z_{\max} = \frac{1}{2}a_{\max}t^2 = 0{,}09\,\mathrm{mm}$.

**Q-4)** $\frac{\mu_B B}{k_B T} = 5 \times 10^{-4}$ : les orientations sont aléatoires et $\cos\alpha$ prend toutes les valeurs entre $-1$ et $1$. On attend une tache continue, étalée sur $\pm 0{,}09\,\mathrm{mm}$.

**Q-5)** Deux taches séparées de $2z_{\max} \approx 0{,}18\,\mathrm{mm}$ : seules les valeurs $\cos\alpha = \pm 1$ sont observées. La projection du moment magnétique sur l'axe du champ est **quantifiée** et ne prend que deux valeurs, $\pm\mu_B$, ce qui correspond aux deux niveaux d'énergie $\mp\mu_B B$. C'est une manifestation du spin de l'électron (chapitre Q1).