LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

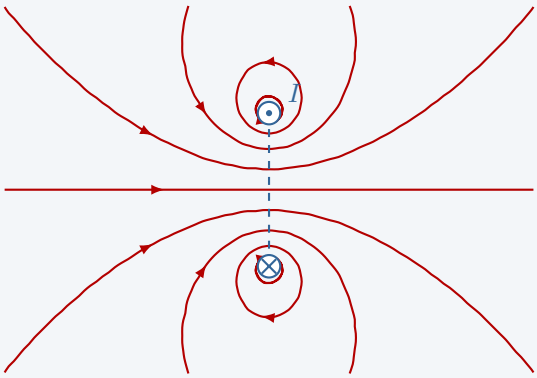
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

EM3

ÉLECTROMAGNÉTISME

Champ magnétostatique

Distributions de courant — Cartes de champ — Symétries — Loi de Biot et Savart — Conservation du flux — Théorème d'Ampère



« *Vu de loin dans l'histoire de l'humanité, l'événement le plus marquant du XIX^e siècle sera sans aucun doute la découverte par Maxwell des lois de l'électrodynamique.*

— Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II (1964)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Champs magnétostatiques »

EM3 — Champ magnétostatique

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Décrire une distribution de courant $(\vec{j},\ \vec{j}_s,\ I)$ et relier l'intensité au flux de $\vec{j}$.
- Lire et tracer une carte de champ magnétique ; connaître les ordres de grandeur.
- Exploiter le caractère axial de $\vec{B}$: plans de symétrie et d'antisymétrie, invariances.
- Calculer un champ par la loi de Biot et Savart : fil, spire et solénoïde sur l'axe.
- Utiliser la conservation du flux et le théorème d'Ampère : fil, solénoïde, nappe, tore.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Champs magnétostatiques » trace les lignes de champ d'un fil, d'une spire et d'un solénoïde et permet de visualiser le confinement du champ.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Distributions de courant . . . 3
I.1 Vecteur densité de courant . . . 3
II Le champ magnétique et ses cartes . . . 4
II.1 Définition et ordres de grandeur . . . 4
II.2 Sources du champ et cartes de champ . . . 4
III Symétries et invariances . . . 5
IV Loi de Biot et Savart . . . 6
IV.1 Énoncé . . . 6
IV.2 Segment et fil rectiligne . . . 7
IV.3 Spire circulaire : champ sur l'axe . . . 7
IV.4 Solénoïde : champ sur l'axe . . . 8
V Flux et circulation du champ magnétique . . . 9
V.1 Conservation du flux magnétique . . . 9
V.2 Théorème d'Ampère . . . 9
V.3 Fil rectiligne infini . . . 10
V.4 Solénoïde infini . . . 10
V.5 Nappe de courant et bobine torique . . . 10
VI Synthèse . . . 12
VII Exercices d'approfondissement . . . 12
VIII Classiques des concours . . . 13

I Distributions de courant

I.1 Vecteur densité de courant

Un courant électrique est un déplacement d'ensemble de porteurs de charge. Considérons des porteurs de charge q, en nombre n^* par unité de volume, animés de la vitesse moyenne $\vec{v}$.

Définition — Densité volumique de courant R D

Le **vecteur densité de courant** est $\vec{j} = n^* q\,\vec{v} = \rho_m \vec{v}$ $(\mathrm{A\cdot m^{-2}})$, où $\rho_m = n^* q$ est la densité volumique de charges mobiles. L'intensité traversant une surface orientée S est le **flux** de $\vec{j}$:

$$I = \iint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Démonstration. Pendant $\mathrm{d}t$, les porteurs qui traversent l'élément $\mathrm{d}\vec{S}$ sont ceux contenus dans le cylindre oblique de base $\mathrm{d}S$ et de génératrice $\vec{v}\,\mathrm{d}t$, de volume $\vec{v}\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}\vec{S}$. La charge correspondante est $\mathrm{d}q = n^* q\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

Définition — Modèles surfacique et filiforme R

- Lorsque le courant circule dans une couche d'épaisseur négligeable, on définit la **densité surfacique de courant** $\vec{j}_s$ $(\mathrm{A\cdot m^{-1}})$: l'intensité traversant un segment de longueur $\mathrm{d}\ell$ tracé sur la nappe, perpendiculaire au courant, vaut $\mathrm{d}I = j_s\,\mathrm{d}\ell$. Pour une surface chargée σ en mouvement, $\vec{j}_s = \sigma\vec{v}$.
- Pour un fil de section négligeable, on ne retient que l'intensité I.

L'**élément de courant** s'écrit, selon le modèle, $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$, $\vec{j}_s\,\mathrm{d}S$ ou $I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$.

Conservation de la charge en régime permanent R

En régime permanent, aucune charge ne s'accumule : le flux de $\vec{j}$ à travers toute surface fermée est nul, $\oiint \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$. L'intensité est la même à travers toutes les sections d'un tube de courant ; c'est l'origine de la **loi des nœuds** (chapitre E1).

Ordres de grandeur

Fil de cuivre de section $1\,\mathrm{mm^2}$ parcouru par $1\,\mathrm{A}$: $j = 10^6\,\mathrm{A\cdot m^{-2}}$. Avec $n^* = 8{,}5\times10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$ électrons libres, la vitesse d'ensemble vaut $v = \frac{j}{n^* e} \approx 0{,}07\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$: les électrons avancent très lentement, alors que le signal électrique se propage presque à la vitesse de la lumière.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — **Courants associés à des charges en rotation** ✦✦✧✧✧

Q-1) Un conducteur cylindrique creux, de rayons $R_i < R_e$, est parcouru par un courant de densité uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_z$. Exprimer l'intensité I.

Q-2) Un disque isolant de rayon R, de densité surfacique uniforme σ, tourne à la vitesse angulaire ω autour de son axe. Exprimer $\vec{j}_s$ puis l'intensité totale traversant un rayon du disque.

Q-3) Application : $\sigma = 10^{-5}\,\mathrm{C\cdot m^{-2}}$, $R = 10\,\mathrm{cm}$, 50 tours par seconde.

II Le champ magnétique et ses cartes

II.1 Définition et ordres de grandeur

Définition — Champ magnétique R

Une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ subit, dans un champ magnétique $\vec{B}$, la **force de Lorentz magnétique** $\vec{F} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$ (chapitre M4). Le champ $\vec{B}$ s'exprime en **teslas** (T) ; l'analyse dimensionnelle de $F = qvB$ donne $1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. On rencontre aussi le gauss : $1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\,\mathrm{T}$.

Ordres de grandeur

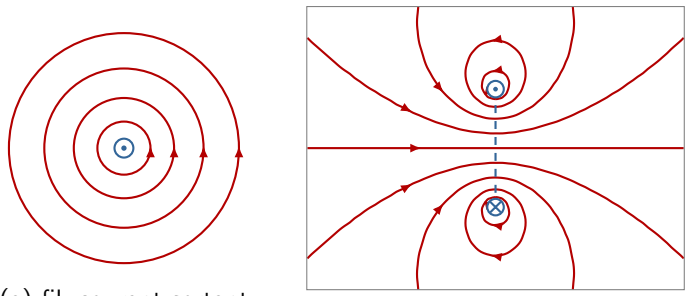
Champ magnétique terrestre (en France ou au Maroc)	$\approx 50\,\mu\mathrm{T}$
Aimant de réfrigérateur	quelques mT
Aimant permanent au néodyme, entrefer d'une machine électrique	$0{,}1\,\mathrm{T}$ à $1{,}5\,\mathrm{T}$
Imagerie par résonance magnétique (IRM)	$1{,}5\,\mathrm{T}$ à $3\,\mathrm{T}$
Bobines supraconductrices de laboratoire ; champs pulsés	$20\,\mathrm{T}$ à $45\,\mathrm{T}$; plus de $100\,\mathrm{T}$
Surface d'une étoile à neutrons	$10^{8}\,\mathrm{T}$

II.2 Sources du champ et cartes de champ

Le champ magnétique est créé par des **courants** et par la **matière aimantée** (aimants, dont les propriétés proviennent de courants microscopiques et du spin des électrons). Comme pour $\vec{E}$, il obéit au **principe de superposition**.

Propriétés des cartes de champ magnétique R

- Les lignes de champ s'enroulent autour des courants, dans le sens donné par la **règle de la main droite** : le pouce dans le sens du courant, les doigts indiquent le sens de $\vec{B}$.
- Les lignes de champ sont **fermées** (ou partent à l'infini) : il n'existe pas de « charge magnétique » d'où elles divergeraient.
- À l'extérieur d'un aimant, les lignes vont du pôle **nord** au pôle **sud** (« le champ sort par le nord ») et se referment à l'intérieur de l'aimant.
- Le champ est intense là où les lignes sont serrées.



(a) fil, courant sortant (b) spire, dans un plan contenant son axe

Fig. 1 : Cartes de champ d'un fil rectiligne et d'une spire circulaire (⊙ : courant sortant, ⊗ : courant entrant).

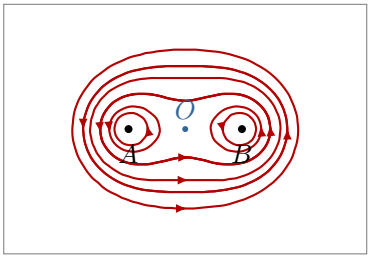
Remarque

Un champ **uniforme** (lignes parallèles et équidistantes) n'existe que dans une région limitée : à l'intérieur d'un long solénoïde, entre deux bobines de Helmholtz, dans l'entrefer d'un aimant en U. Il ne peut pas être uniforme partout, puisque ses lignes doivent se refermer.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 Lecture d'une carte de champ ✦✧✧✧✧

La carte ci-dessous représente les lignes de champ créées par deux fils rectilignes parallèles, perpendiculaires au plan de la figure, aux points A et B.



Q-1) Les courants dans les deux fils sont-ils de même sens ? Sortent-ils ou entrent-ils dans le plan de la figure ?

Q-2) Où le champ est-il le plus intense ? Que vaut-il au milieu O ?

Q-3) Comment la carte se présente-t-elle très loin des fils ?

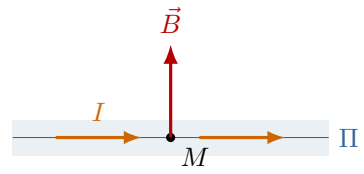
III Symétries et invariances

Caractère axial du champ magnétique R

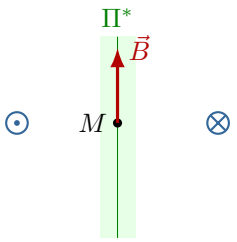
$\vec{B}$ est un **pseudo-vecteur** (vecteur axial) : sa définition fait intervenir un produit vectoriel, dont le sens dépend de l'orientation de l'espace. Par conséquent, en un point M :

- d'un **plan de symétrie** Π de la distribution de courants, $\vec{B}(M)$ est **perpendiculaire** à Π ;
- d'un **plan d'antisymétrie** Π^*, $\vec{B}(M)$ est **contenu** dans Π^*.

C'est l'inverse des propriétés de $\vec{E}$ (vecteur polaire). Les invariances se traitent comme en électrostatique.



courant contenu dans le plan : symétrie, $\vec{B} \perp \Pi$



courants opposés de part et d'autre : antisymétrie, $\vec{B} \in \Pi^*$

Fig. 2 : Comportement de $\vec{B}$ vis-à-vis des plans de symétrie et d'antisymétrie des courants.

☞ Méthode — Analyse des symétries en magnétostatique M

- Astuce : un plan qui **contient** le courant en ses points est un plan de symétrie ; un plan **perpendiculaire** au courant en ses points est (localement) un plan d'antisymétrie.
- Un seul plan de symétrie passant par M suffit à fixer la direction de $\vec{B}(M)$; avec des plans d'antisymétrie, il en faut deux.
- Les invariances (translation, rotation) éliminent des variables ; on néglige les effets de bord pour une distribution très longue.

Distribution	Plan de symétrie ou d'antisymétrie	Champ
Fil infini d'axe Oz	$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$: symétrie	$B(r)\,\vec{u}_\theta$
Spire, point de l'axe	tout plan contenant l'axe : antisymétrie	$B(z)\,\vec{u}_z$
Solénoïde infini	$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: symétrie	$B(r)\,\vec{u}_z$
Nappe $z=0$, $\vec{j}_s = j_s\vec{u}_x$	$(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$: symétrie	$B(z)\,\vec{u}_y$
Bobine torique d'axe Oz	$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$: symétrie	$B(r,z)\,\vec{u}_\theta$

Tab. 1 : Analyse des symétries pour les distributions usuelles.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Ne pas transposer sans réfléchir les règles de l'électrostatique : $\vec{B}$ est **perpendiculaire** aux plans de symétrie.
- Pour le fil infini, $\vec{B}$ est **orthoradial** et non radial : les lignes de champ sont des cercles autour du fil.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 **Symétries de deux fils parallèles** ✦✦✧✧✧

Deux fils infinis parallèles à Oz, en $x=-a$ et $x=+a$, sont parcourus par des courants d'intensité I.

Q-1) Courants de même sens. Quelle est la direction de $\vec{B}$ en un point de l'axe Ox ? de l'axe Oy ? Que vaut $\vec{B}(O)$?

Q-2) Mêmes questions pour des courants de sens opposés.

IV Loi de Biot et Savart

IV.1 Énoncé

Loi de Biot et Savart R

Un circuit filiforme fermé $\mathcal{C}$, parcouru par le courant permanent I, crée en M le champ

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{P\in\mathcal{C}} \frac{I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3} \qquad \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$$

Pour une distribution volumique ou surfacique, on remplace $I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$ par $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$ ou $\vec{j}_s\,\mathrm{d}S$.

Remarque

Le produit vectoriel explique le caractère axial de $\vec{B}$ et la règle de la main droite. On peut décomposer un circuit en portions (segments, arcs) et additionner leurs contributions, à condition que le circuit total soit fermé.

IV.2 Segment et fil rectiligne

Champ d'un segment de courant R D

Un segment porté par Oz, parcouru par I dans le sens de $\vec{u}_z$, crée en un point M situé à la distance r de son support un champ orthoradial

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\vec{u}_\theta$$

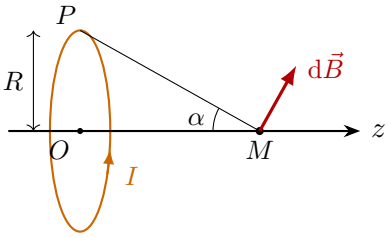
où $\alpha_1 < \alpha_2$ sont les angles sous lesquels on voit les extrémités depuis M, comptés à partir de la perpendiculaire au fil (même géométrie que le fil chargé du chapitre EM1). Pour un fil infini :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta$$

Démonstration. Le plan contenant le fil et M est un plan de symétrie : $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$. Avec $\overrightarrow{PM} = r\vec{u}_r - z\vec{u}_z$, $\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\overrightarrow{PM} = \mathrm{d}z\,\vec{u}_z\wedge r\vec{u}_r = r\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_\theta$. En posant $z = r\tan\alpha$: $\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r\,\mathrm{d}z}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$, qu'on intègre de α_1 à α_2.

IV.3 Spire circulaire : champ sur l'axe

Une spire de centre O, de rayon R, d'axe Oz, est parcourue par I (sens trigonométrique autour de $\vec{u}_z$). On note α le demi-angle sous lequel la spire est vue depuis le point M de l'axe.



Champ sur l'axe d'une spire R D

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\,\vec{u}_z$$

Au centre : $B(O) = \frac{\mu_0 I}{2R}$. Pour N spires jointives (bobine plate), le champ est multiplié par N.

Démonstration. Tout plan contenant l'axe est un plan d'antisymétrie : sur l'axe, $\vec{B} = B(z)\vec{u}_z$. Pour un élément $\mathrm{d}\vec{\ell}$ en P, $\mathrm{d}\vec{\ell}\perp\overrightarrow{PM}$ et $PM = \frac{R}{\sin\alpha}$: $\|\mathrm{d}\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\ell}{4\pi PM^2}$, et sa projection sur l'axe vaut $\|\mathrm{d}\vec{B}\|\sin\alpha$. En sommant sur la spire ($\oint\mathrm{d}\ell = 2\pi R$) : $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R\sin^2\alpha}{R^2}\sin\alpha$.

Remarque

$B(z)$ est une fonction paire de z, maximale au centre ; pour $|z|\gg R$, $B\approx\frac{\mu_0 I R^2}{2|z|^3}$: décroissance en $\frac{1}{|z|^3}$, caractéristique d'un **dipôle magnétique** (chapitre EM4).

IV.4 Solénoïde : champ sur l'axe

Un solénoïde de longueur L et de rayon R comporte N spires jointives, soit $n = \frac{N}{L}$ spires par unité de longueur, parcourues par I.

Champ sur l'axe d'un solénoïde R D

$$B(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

où α_1 et α_2 sont les demi-angles sous lesquels on voit, depuis M, les faces d'extrémité (angles comptés à partir de $\vec{u}_z$). Solénoïde infini : $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to \pi$ et $B = \mu_0 n I$.

Démonstration. Les $n\,\mathrm{d}z$ spires situées entre z et $z+\mathrm{d}z$ créent en M le champ $\frac{\mu_0 n\,\mathrm{d}z\,I}{2R}\sin^3\alpha$. Avec $z_M - z = \frac{R}{\tan\alpha}$, $\mathrm{d}z = \frac{R\,\mathrm{d}\alpha}{\sin^2\alpha}$, d'où $\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 n I}{2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$, qu'on intègre entre α_1 et α_2.

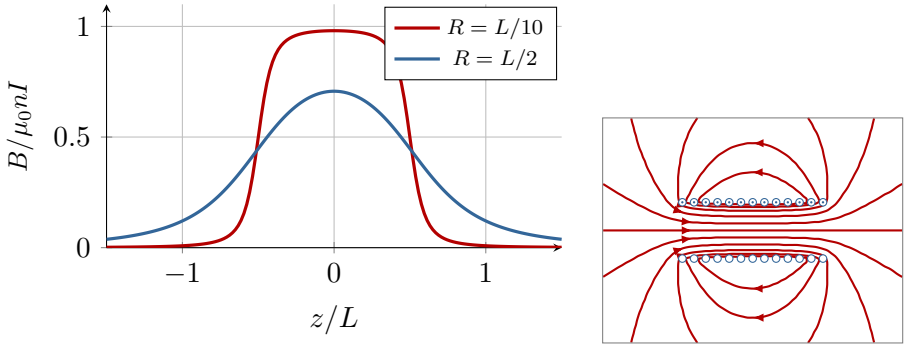


Fig. 3 : À gauche : champ sur l'axe d'un solénoïde de longueur L. À droite : lignes de champ d'un solénoïde court ; le champ est quasi uniforme à l'intérieur et faible à l'extérieur.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Bobines de Helmholtz ★★✧✧✧

Deux bobines plates identiques (N spires de rayon R), coaxiales, de centres O_1 et O_2 distants de d, sont parcourues dans le même sens par I. On repère un point de l'axe par sa cote z comptée depuis le milieu O.

Q-1) Exprimer $B(z)$ sur l'axe. Justifier que B est une fonction paire de z.

Q-2) On admet que $\dfrac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}z^2}(0)$ s'annule pour $d = R$. Que peut-on dire du champ au voisinage de O ? Pourquoi utilise-t-on ce dispositif ?

Q-3) Calculer $B(O)$ pour $N = 100$, $R = 10\,\mathrm{cm}$, $I = 1\,\mathrm{A}$, $d = R$.

EXERCICE 5 Le fil en épingle à cheveux ★★✧✧✧

Un fil est formé de deux demi-droites parallèles reliées par un demi-cercle de centre O et de rayon R ; il est parcouru par le courant I. Les demi-droites sont tangentes au demi-cercle.

Q-1) Montrer que chaque portion crée en O un champ perpendiculaire au plan du fil.

Q-2) Calculer le champ créé en O par le demi-cercle.

Q-3) Calculer, à l'aide du champ d'un segment, le champ créé en O par une demi-droite. En déduire $\vec{B}(O)$.

V Flux et circulation du champ magnétique

V.1 Conservation du flux magnétique

Conservation du flux (admise) R

Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Conséquences : le flux est le même à travers toutes les sections d'un **tube de champ** (le champ est intense là où le tube se resserre) ; les lignes de champ ne divergent d'aucun point ; on ne peut pas isoler un pôle d'aimant (en coupant un aimant, on obtient deux aimants complets).

Remarque

Comme en électrostatique, les lignes de champ vérifient $\vec{B} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$. Pour le fil infini, $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$ impose $\mathrm{d}r = 0$ et $\mathrm{d}z = 0$: les lignes sont des cercles d'axe le fil.

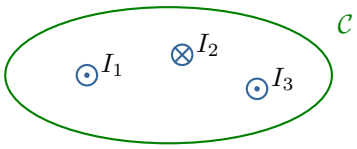
V.2 Théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère (admis) R

La circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour fermé orienté $\mathcal{C}$ est égale à μ_0 fois l'intensité totale **enlacée** par $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

Les courants traversant une surface qui s'appuie sur $\mathcal{C}$ sont comptés positivement s'ils sont orientés selon la normale associée à $\mathcal{C}$ par la règle de la main droite, négativement sinon.



Contour orienté dans le sens trigonométrique : normale sortant de la feuille. $I_{\text{enl}} = I_1 - I_2 + I_3$; I_4 n'est pas enlacé.

Fig. 4 : Courant enlacé par un contour orienté.

☞ Méthode — Utiliser le théorème d'Ampère M

1. Symétries et invariances : direction de $\vec{B}$ et variables.
2. Choisir un **contour d'Ampère** passant par M, formé de portions où $\vec{B}$ est tangent et de norme constante, ou perpendiculaire : un **cercle** d'axe la distribution si les courants sont axiaux (champ orthoradial), un **rectangle** sinon (solénoïde, nappe).
3. Orienter le contour, calculer la circulation et le courant enlacé (avec son signe) ; conclure.

V.3 Fil rectiligne infini

Fil de section nulle D. $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$; sur le cercle d'axe le fil, de rayon r, orienté selon $\vec{u}_\theta$: $2\pi r B(r) = \mu_0 I$. On retrouve $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$, beaucoup plus rapidement qu'avec Biot et Savart.

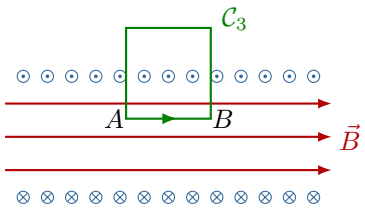
Conducteur cylindrique de rayon a D. Si le courant est réparti uniformément ($j = \frac{I}{\pi a^2}$), le cercle de rayon $r < a$ enlace $I\frac{r^2}{a^2}$:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \ (r \leq a) \qquad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ (r \geq a)$$

Le champ est continu (distribution volumique), maximal à la surface du conducteur, et nul sur l'axe.

V.4 Solénoïde infini

Démonstration D. Le plan perpendiculaire à l'axe passant par M est un plan de symétrie : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$ (invariances par translation et rotation).



- Un rectangle de côtés parallèles à l'axe, entièrement **intérieur** (ou entièrement extérieur), n'enlace aucun courant : $B(r_1)L - B(r_2)L = 0$. Le champ est uniforme à l'intérieur, et uniforme à l'extérieur, donc nul à l'extérieur puisqu'il tend vers zéro à l'infini.
- Un rectangle $\mathcal{C}_3$ de longueur L, à cheval sur l'enroulement, enlace nLI : $B_{\text{int}}L = \mu_0 nLI$.

$$\vec{B} = \mu_0 n I \, \vec{u}_z \text{ à l'intérieur}, \qquad \vec{B} = \vec{0} \text{ à l'extérieur}$$

Le sens de $\vec{B}$ est donné par la règle de la main droite appliquée au sens de rotation du courant.

V.5 Nappe de courant et bobine torique

Nappe plane infinie. Une nappe $z = 0$ parcourue par $\vec{j}_s = j_s\vec{u}_x$ uniforme crée $\vec{B} = B(z)\vec{u}_y$, avec $B(-z) = -B(z)$ (le plan $z = 0$ est de symétrie). Un rectangle du plan (yOz) à cheval sur la nappe, de largeur L, enlace $j_s L$:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 j_s}{2}\vec{u}_y \ (z > 0) \qquad \vec{B} = +\frac{\mu_0 j_s}{2}\vec{u}_y \ (z < 0)$$

Le champ est uniforme de chaque côté et **discontinu** à la traversée de la nappe.

Bobine torique. N spires régulièrement enroulées sur un tore d'axe Oz créent un champ orthoradial. Un cercle d'axe Oz de rayon r enlace NI s'il est à l'intérieur du tore, et un courant total nul sinon :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \text{ dans le tore}, \qquad B = 0 \text{ à l'extérieur.}$$

Le champ est entièrement confiné dans le tore : c'est l'intérêt de cette géométrie (transformateurs toriques).

Relations de passage (hors programme, à titre de culture) R

À la traversée d'une nappe de courant $\vec{j}_s$, de la région 1 vers la région 2 (normale $\vec{n}_{1\to2}$), la composante normale de $\vec{B}$ est continue (conservation du flux) et

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \, \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to2}.$$

On le vérifie sur la nappe ($\mu_0 j_s \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\mu_0 j_s \vec{u}_y$) et sur le solénoïde infini, assimilable à une nappe

cylindrique de densité $j_s = nI$.

★ À retenir

Fil infini	$\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$
Spire, centre ; axe	$\frac{\mu_0 I}{2R}$; $\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha$
Solénoïde infini	$\mu_0 nI$ dedans, 0 dehors
Nappe plane	$\frac{\mu_0 j_s}{2}$, uniforme de chaque côté
Tore	$\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ dedans, 0 dehors

	$\vec{E}$ (électrostatique)	$\vec{B}$ (magnétostatique)
Sources	charges fixes	courants (charges en mouvement)
Nature	vecteur polaire	vecteur axial
Plan de symétrie des sources	$\vec{E}$ contenu dans le plan	$\vec{B}$ perpendiculaire
Plan d'antisymétrie	$\vec{E}$ perpendiculaire	$\vec{B}$ contenu dans le plan
Lignes de champ	des charges + vers les charges −	fermées, autour des courants
Flux à travers une surface fermée	$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ (Gauss)	0
Circulation sur un contour fermé	0	$\mu_0 I_{\text{enl}}$ (Ampère)

Tab. 2 : Comparaison des champs électrostatique et magnétostatique.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Câble coaxial parcouru par un courant ✦✦✧✧✧

Un câble coaxial est formé d'un conducteur central plein de rayon R_1, parcouru par I uniformément réparti, et d'une gaine mince de rayon R_2 parcourue par $-I$.

Q-1) Déterminer $B(r)$ dans les trois régions et tracer son allure.

Q-2) Quel est l'intérêt de cette géométrie ?

EXERCICE 7 Flux à travers un cadre voisin d'un fil ✦✦✧✧✧

Un cadre carré de côté a est coplanaire avec un fil infini parcouru par I ; ses côtés parallèles au fil sont aux distances D et $D + a$.

Q-1) Montrer que le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre vaut $\phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{D+a}{D}$.

Q-2) Donner un équivalent pour $a \ll D$ et l'interpréter. Que vaut ϕ si le cadre est dans un plan perpendiculaire au fil ?

Q-3) Application : $I = 10\,\text{A}$, $a = D = 10\,\text{cm}$.

EXERCICE 8 Champ sous une ligne à haute tension

Une ligne est modélisée par deux fils horizontaux parallèles, à la hauteur $h = 20\,\mathrm{m}$, distants de $2a = 10\,\mathrm{m}$, parcourus à un instant donné par des courants opposés d'intensité $I = 1000\,\mathrm{A}$.

Q-1) Exprimer le champ au sol, à la verticale du milieu des fils.

Q-2) Comparer au champ d'un fil seul, au champ terrestre et à la valeur limite recommandée pour le public, $100\,\mu\mathrm{T}$.

VI Synthèse

★ À retenir

- $\vec{j} = n^* q\vec{v}$, $I = \iint \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$; élément de courant $I\mathrm{d}\vec{\ell}$, $\vec{j}_s \mathrm{d}S$, $\vec{j}\mathrm{d}\tau$.
- Lignes de $\vec{B}$ fermées, autour des courants (main droite) ; ordres de grandeur : $50\,\mu\mathrm{T}$ (Terre), $1\,\mathrm{T}$ (aimant fort, IRM).
- $\vec{B}$ est axial : perpendiculaire aux plans de symétrie, contenu dans les plans d'antisymétrie.
- Biot et Savart : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$; spire $\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha$; solénoïde $\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.
- $\oiint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$; Ampère : $\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$ (cercle ou rectangle).
- Fil $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; solénoïde infini $\mu_0 nI$ (nul dehors) ; nappe $\frac{\mu_0 j_s}{2}$; tore $\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$.

Pour aller plus loin

Les versions locales $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ des deux propriétés fondamentales seront établies en deuxième année. Chapitre suivant : EM4, le dipôle magnétique, qui décrit à grande distance le champ d'une spire ou d'un aimant et leur comportement dans un champ extérieur.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 9 Champ au voisinage de l'axe d'une spire

On note $B_z(0,z) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$ le champ sur l'axe d'une spire. Près de l'axe, le champ a aussi une composante radiale $B_r(r,z)$.

Q-1) Justifier que $\vec{B} = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z$.

Q-2) En écrivant la conservation du flux à travers un petit cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur $\mathrm{d}z$, et en confondant $B_z(r,z)$ avec $B_z(0,z)$, montrer que $B_r(r,z) \approx -\frac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_z(0,z)}{\mathrm{d}z}$.

Q-3) En déduire B_r et commenter son signe pour $z > 0$.

EXERCICE 10 Cylindre parcouru par un courant, avec cavité

Un cylindre infini d'axe $(O_1, \vec{u}_z)$, de rayon R, est parcouru par une densité de courant uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_z$, sauf dans une cavité cylindrique d'axe parallèle $(O_2, \vec{u}_z)$, entièrement intérieure, où $\vec{j} = \vec{0}$.

Q-1) Montrer que, dans un cylindre plein, $\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2}\,\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1M}$ pour $r < R$ ($\overrightarrow{O_1M}$ désignant la composante perpendiculaire à l'axe).

Q-2) En déduire le champ dans la cavité. Commenter.

EXERCICE 11 Nappe épaisse

La couche $-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$ est parcourue par un courant volumique uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_x$.

Q-1) Montrer que $\vec{B} = B(z)\vec{u}_y$ avec B impaire.

Q-2) Déterminer $B(z)$ dans la couche et à l'extérieur par le théorème d'Ampère. Tracer $B(z)$.

Q-3) Retrouver le cas de la nappe infiniment mince ($e \to 0$ avec $je = j_s$).

EXERCICE 12 Disque chargé en rotation (expérience de Rowland)

Le disque de l'exercice « Courants associés à des charges en rotation » (rayon R, densité σ, vitesse angulaire ω) est vu comme une juxtaposition de spires.

Q-1) Quelle est l'intensité $\mathrm{d}I$ associée à la couronne de rayons r et $r + \mathrm{d}r$?

Q-2) En déduire le champ au centre du disque.

Q-3) Application numérique avec les valeurs de l'exercice. Commenter.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 13 Aimant d'IRM supraconducteur

L'aimant principal d'un appareil d'IRM est un solénoïde de longueur $L = 1{,}8\,\mathrm{m}$ et de rayon $R = 0{,}50\,\mathrm{m}$, qui doit créer $B_0 = 1{,}5\,\mathrm{T}$ en son centre.

Q-1) Rappeler l'expression du champ sur l'axe d'un solénoïde de longueur finie. Calculer le produit nI nécessaire.

Q-2) Le fil supraconducteur supporte $I = 400\,\mathrm{A}$. Combien de spires faut-il ? Quelle longueur de fil ?

Q-3) Évaluer l'écart relatif de champ entre le centre et un point de l'axe situé à $20\,\mathrm{cm}$ du centre. Comment l'imagerie, qui exige une homogénéité de l'ordre de 10^{-5}, peut-elle être assurée ?

Q-4) On admet que l'énergie magnétique est répartie avec la densité volumique $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$. En assimilant le champ intérieur à B_0 et en négligeant le champ extérieur, calculer l'énergie stockée. Pourquoi la perte brutale de supraconductivité (« quench ») est-elle dangereuse ?

Q-5) Pourquoi ne peut-on pas obtenir un tel champ avec un bobinage en cuivre ordinaire, qui ne supporte guère plus de $5\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{mm}^{-2}$ en régime permanent ?

EXERCICE 14 Mesure de la charge massique de l'électron

Dans une ampoule contenant un gaz sous très faible pression, un canon émet des électrons accélérés sous la tension U ; leur trajectoire est rendue visible par la luminescence du gaz. L'ampoule est placée au centre de deux bobines de Helmholtz ($N = 130$ spires de rayon $R = 15\,\mathrm{cm}$, distantes de R, parcourues dans le même sens par I). Valeur de référence : $\frac{e}{m} = 1{,}76 \times 10^{11}\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Q-1) Montrer qu'au centre du dispositif $B_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}\frac{\mu_0 NI}{R}$. Calculer B_0 pour $I = 1{,}5\,\mathrm{A}$.

Q-2) Exprimer la vitesse v_0 des électrons à la sortie du canon. Calculer v_0 pour $U = 200\,\mathrm{V}$. Un traitement non relativiste est-il justifié ?

Q-3) Le faisceau est émis perpendiculairement à $\vec{B}_0$. Montrer que la trajectoire est un cercle de rayon r (chapitre M4) et en déduire $\frac{e}{m} = \frac{2U}{B_0^2 r^2}$.

Q-4) Calculer le rayon attendu. On mesure $r = 4{,}1\,\mathrm{cm}$: en déduire $\frac{e}{m}$.

Q-5) Le champ terrestre perturbe-t-il la mesure ? Comment s'en affranchir ?

Q-6) Que se passe-t-il si le faisceau n'est pas exactement perpendiculaire à $\vec{B}_0$?