LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

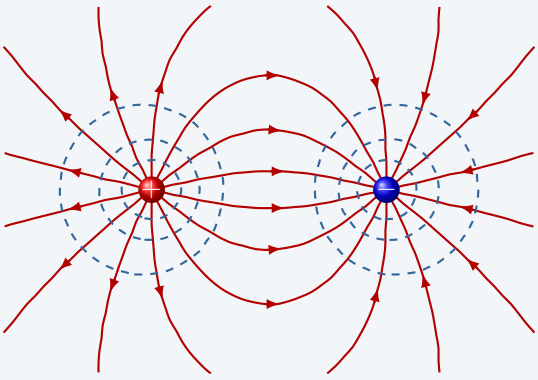
FICHE RÉSUMÉ

EM1

ÉLECTROMAGNÉTISME

Champ et potentiel électrostatiques

Loi de Coulomb — Distributions de charges — Symétries et invariances — Potentiel — Théorème de Gauss — Condensateur plan



« *C'est la dissymétrie qui crée le phénomène.*

— Pierre Curie, *Journal de physique* (1894)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Champ et potentiel de charges ponctuelles »

EM1 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Une distribution de charges immobiles crée en tout point un **champ électrostatique** $\vec{E}$, qui se calcule par superposition à partir de la loi de Coulomb et dérive d'un **potentiel** : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Avant tout calcul, l'étude des **symétries** (direction de $\vec{E}$) et des **invariances** (variables dont il dépend) est obligatoire. Lorsque la symétrie est forte (sphérique, cylindrique, plane), le **théorème de Gauss** donne le champ en quelques lignes.

I Loi de Coulomb et champ électrostatique

Charge et loi de Coulomb R

La charge (en coulombs) est algébrique, additive, **quantifiée** ($q = ne$, $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}$), **conservée** et invariante. Deux charges ponctuelles immobiles dans le vide :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{u}_{12} \qquad r = M_1M_2, \quad \vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$$

avec $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$ et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^{9}\,\text{m}\cdot\text{F}^{-1}$. Répulsion si $q_1q_2 > 0$, attraction sinon.

Définition — Champ électrostatique, superposition R

Une charge q placée en M subit $\vec{F} = q\vec{E}(M)$; $\vec{E}$ s'exprime en $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. Charge ponctuelle q en O, puis superposition :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{u}_r \qquad \vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}$$

Définition — Distributions continues R

- volumique : $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\tau$ $(\text{C}\cdot\text{m}^{-3})$;
- surfacique : $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$ $(\text{C}\cdot\text{m}^{-2})$;
- linéique : $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}\ell$ $(\text{C}\cdot\text{m}^{-1})$.

Le modèle dépend de l'échelle : couche d'épaisseur e $\to \sigma = \rho e$; cylindre de rayon $a \to \lambda = \rho\pi a^2$.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)\,\overrightarrow{PM}}{PM^3}\,\mathrm{d}\tau_P \qquad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)\,\mathrm{d}\tau_P}{PM}\ (+\text{cte})$$

Pour une distribution d'extension finie, on choisit $V(\infty) = 0$ (constante nulle). En pratique, on évite ces intégrales grâce aux symétries.

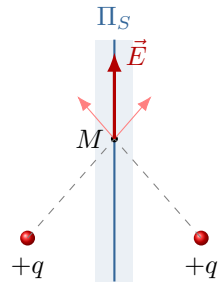
II Symétries et invariances

Principe de Curie, caractère polaire de $\vec{E}$ R D

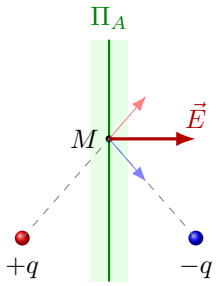
Les effets ont au moins les symétries des causes. Soit M' le symétrique de M par rapport au plan considéré :

- Π_S **plan de symétrie** ($\rho(P') = \rho(P)$) : $\vec{E}(M') = \mathrm{sym}_{\Pi_S}\big(\vec{E}(M)\big)$ et, si $M \in \Pi_S$, $\vec{E}(M)$ est **contenu** dans Π_S ;
- Π_A **plan d'antisymétrie** ($\rho(P') = -\rho(P)$) : $\vec{E}(M') = -\mathrm{sym}_{\Pi_A}\big(\vec{E}(M)\big)$ et, si $M \in \Pi_A$, $\vec{E}(M)$ est **perpendiculaire** à Π_A.

$\vec{E}$ est un **vecteur polaire** (vrai vecteur). V prend la même valeur en M et M' (plan de symétrie), des valeurs opposées (plan d'antisymétrie, $V = 0$ sur Π_A).



plan de symétrie : $\vec{E} \in \Pi_S$



plan d'antisymétrie : $\vec{E} \perp \Pi_A$

☞ Méthode — Analyse des symétries M

1. Choisir le système de coordonnées adapté (cartésiennes, cylindriques, sphériques).
2. **Invariances** (translation selon Oz, rotation autour de Oz ou de O) $\Rightarrow$ elles éliminent des **variables**.
3. Plans de symétrie (ou d'antisymétrie) passant par un point M **quelconque** $\Rightarrow$ leur intersection donne la **direction** de $\vec{E}(M)$.

Distribution	Invariances	Champ
Boule, sphère (centre O)	toute rotation autour de O	$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$ (sphériques)
Fil, cylindre infini (axe Oz)	translation Oz et rotation autour de Oz	$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$ (cylindriques)
Plan infini $z = 0$	translations selon Ox et Oy	$\vec{E} = E(z)\,\vec{u}_z$, $E(-z) = -E(z)$

III Potentiel et topographie

Définition — Potentiel électrostatique R

$$\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \iff \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \qquad V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

- Charge ponctuelle : $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$ ($V(\infty) = 0$). V est défini à une constante près ; la circulation de $\vec{E}$ sur un contour fermé est **nulle** : $\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0$.
- **Énergie potentielle** d'une charge q dans un champ extérieur : $E_p = qV(M)$, $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p$,

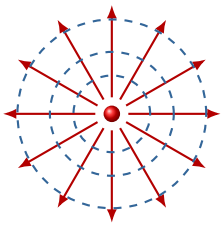
travail $W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$: la force électrostatique est conservative.

- **Gradient** (à retrouver avec $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ et le déplacement élémentaire de M1) :

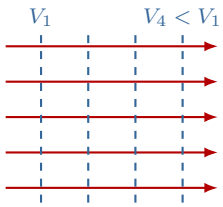
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V &= \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z && \text{(cartésiennes)}\\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z && \text{(cylindriques)}\\ &= \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi && \text{(sphériques)}\end{aligned}$$

Définition — Lignes de champ, équipotentielles R

- **Ligne de champ** : courbe tangente à $\vec{E}$ en chaque point, orientée comme $\vec{E}$: $\vec{E} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}x}{E_x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{E_y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{E_z}$.
- **Surface équipotentielle** : $V(M) = \text{cte}$.
- Les lignes de champ sont **orthogonales** aux équipotentielles et orientées vers les **potentiels décroissants**.
- Elles partent des charges $+$, aboutissent aux charges $-$ (ou à l'infini) : jamais fermées.
- Équipotentielles resserrées $\Leftrightarrow$ champ intense.



charge $q > 0$



champ uniforme

Disque, plan infini et discontinuité R D

Disque de rayon R, densité σ, sur son axe (couronnes $\mathrm{d}q = \sigma\, 2\pi r\, \mathrm{d}r$) :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right) \qquad E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Plan infini ($R \to \infty$) : $\vec{E} = \pm\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$, uniforme de chaque côté. À la traversée d'une surface chargée (normale $\vec{n}_{1\to2}$) : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2}$ (composante tangentielle et potentiel continus). Le champ n'est pas défini *sur* une surface (ou un fil) chargé(e).

Remarque

Segment chargé (λ), vu de M à la distance r sous les angles $\alpha_1 < \alpha_2$ comptés depuis la perpendiculaire : $E_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$, $E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$; le fil infini ($\alpha_{1,2} = \mp\frac{\pi}{2}$) redonne $\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

IV Théorème de Gauss

Théorème de Gauss (admis) R

Flux de $\vec{E}$ à travers une surface orientée : $\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$, avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ **sortant** pour une surface fermée).

$$\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

☞ Méthode — Appliquer le théorème de Gauss M

1. Symétries et invariances : direction de $\vec{E}$ et variables (partie II).
2. **Surface de Gauss** fermée passant par M, sur laquelle $\vec{E}$ est soit normal et de norme constante, soit tangent : sphère de rayon r, cylindre coaxial fermé (r,h), cylindre traversant le plan.
3. Calculer le flux (souvent $E(r)\times$ aire), la charge intérieure ($Q_{\text{int}} = \iiint \rho\,\mathrm{d}\tau$ **dans** Σ), conclure.

★ À retenir

Distribution	Surface de Gauss	Champ
Sphère R, charge Q en surface	sphère de rayon r	$r>R : \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$; $r<R : \vec{0}$ (discontinu en R)
Boule R, ρ uniforme ($Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$)	sphère de rayon r	$r>R : \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$; $r<R : \dfrac{\rho\, r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$ (continu)
Fil infini, λ uniforme	cylindre coaxial (r,h)	$\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$, $V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{r_0}$
Cylindre infini a, ρ uniforme	cylindre coaxial (r,h)	$r>a : \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$; $r<a : \dfrac{\rho\, r}{2\varepsilon_0}\vec{u}_r$
Plan infini, σ uniforme	cylindre traversant	$\pm\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ (saut σ/ε_0)

Analogie avec la gravitation R

	Champ d'une source ponctuelle	Correspondance	Théorème de Gauss
Électrostatique	$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	q, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\oiint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$
Gravitation	$\vec{\mathcal{G}} = -\dfrac{\mathcal{G}m}{r^2}\vec{u}_r$	m, $-\mathcal{G}$	$\oiint \vec{\mathcal{G}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$

À l'extérieur d'un astre à symétrie sphérique, le champ est celui d'une masse ponctuelle placée en son centre.

V Énergie et condensateur plan

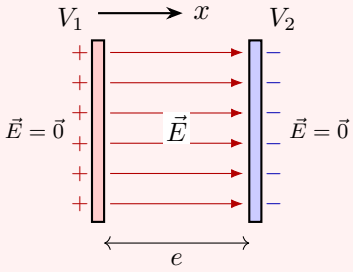
Énergie d'interaction R

Système de charges ponctuelles amenées depuis l'infini : $E_p = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$, où V_i est le potentiel créé en P_i par les **autres** charges (le $\frac{1}{2}$ évite de compter deux fois chaque paire).

Condensateur plan, capacité R D

Deux armatures de surface S, distantes de $e \ll \sqrt{S}$, portant $\pm Q = \pm\sigma S$ (influence totale), effets de bord négligés. Superposition de deux plans :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x \text{ (entre)}, \quad \vec{0} \text{ (dehors)} \qquad C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$



Énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Se$: elle est localisée dans le champ, avec la densité

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (\mathrm{J \cdot m^{-3}})$$

Ordres de grandeur

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\,\mathrm{m \cdot F^{-1}}$; près du noyau d'hydrogène ($53\,\mathrm{pm}$) : $5 \times 10^{11}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$; claquage de l'air : $3 \times 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$; atmosphère par beau temps : $100\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$; sous un orage : $10^4\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Condensateur plan $S = 100\,\mathrm{cm^2}$, $e = 1\,\mathrm{mm}$: $C \approx 89\,\mathrm{pF}$; sphère isolée $C = 4\pi\varepsilon_0 R$: Terre $\approx 0{,}7\,\mathrm{mF}$.

VI Méthodes et pièges

☞ Méthode — Choisir la bonne méthode de calcul M

- **Haute symétrie** (sphérique, cylindrique, plane, distribution infinie) : théorème de Gauss, puis V par $\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}r$ (avec continuité de V).
- **Symétrie faible** (disque, segment, anneau, point sur l'axe) : calcul direct de V (scalaire, plus simple), puis $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$; ou de $\vec{E}$ en ne projetant que sur la direction imposée par les symétries.
- **Cavité** : superposition de la distribution pleine (ρ) et de la cavité de densité $-\rho$.
- **Capacité** : $\vec{E}$ entre les armatures (Gauss) $\to U = \int_1^2 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} \to C = Q/U$; cylindrique $\frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\ln(R_2/R_1)}$, sphérique $\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ (redonnent $\frac{\varepsilon_0 S}{e}$ si $e \ll R_1$).

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Les plans de symétrie doivent passer par le point M **où l'on calcule** $\vec{E}$; la symétrie donne la direction, pas le sens.
- Le théorème de Gauss est toujours vrai, mais ne donne E que si la symétrie permet de sortir E de l'intégrale.

- Q_{int} ne compte que les charges **intérieures** à Σ ; les charges extérieures modifient pourtant $\vec{E}$ sur Σ.
- $V(\infty) = 0$ est impossible pour une distribution infinie (fil, plan) : choisir une référence r_0.
- Ne pas confondre $E_p = qV_{\text{ext}}$ (charge dans un champ extérieur) et l'énergie d'interaction du système (facteur $\frac{1}{2}$).
- $\vec{E}$ pointe vers les potentiels **décroissants** : vérifier le signe de $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais choisir un modèle de distribution (ρ, σ, λ) et calculer une charge totale.
- ☐ Je sais exploiter plans de symétrie, d'antisymétrie et invariances pour réduire $\vec{E}(M)$.
- ☐ Je sais passer de V à $\vec{E}$ (gradient) et de $\vec{E}$ à V (circulation).
- ☐ Je sais lire une carte de champ : lignes, équipotentielles, zones de champ fort, position des charges.
- ☐ Je sais calculer V et E sur l'axe d'un disque et en déduire le plan infini.
- ☐ Je sais appliquer le théorème de Gauss aux cas sphérique, cylindrique et plan.
- ☐ Je sais établir $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ et $w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ pour le condensateur plan.

Remarque

Pour aller plus loin (MP). Forme locale du théorème de Gauss $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$; avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$: équation de Poisson $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ (Laplace $\Delta V = 0$ dans le vide). Conducteur en équilibre : $\vec{E} = \vec{0}$ dedans, volume équipotentiel, charges en surface, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ juste à l'extérieur (pouvoir des pointes, cage de Faraday).