LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

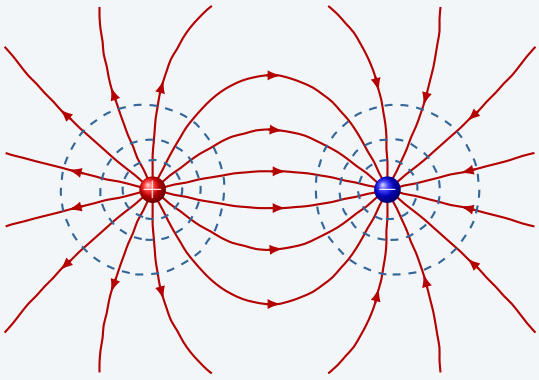
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

EM1

ÉLECTROMAGNÉTISME

Champ et potentiel électrostatiques

Loi de Coulomb — Distributions de charges — Symétries et invariances — Potentiel — Théorème de Gauss — Condensateur plan



« *C'est la dissymétrie qui crée le phénomène.*

— Pierre Curie, *Journal de physique* (1894)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Champ et potentiel de charges ponctuelles »

EM1 — Champ et potentiel

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Exprimer le champ et le potentiel d'une charge ponctuelle ; utiliser le principe de superposition.
- Modéliser une distribution (densités ρ, σ, λ) et exploiter ses symétries et invariances.
- Relier $\vec{E}$ et V ; lire une carte de lignes de champ et d'équipotentielles.
- Appliquer le théorème de Gauss aux distributions sphériques, cylindriques et planes.
- Transposer à la gravitation ; établir la capacité et l'énergie d'un condensateur plan.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Champ et potentiel de charges ponctuelles » trace en direct les lignes de champ et les équipotentielles de charges que l'on place librement.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Charge électrique et loi de Coulomb . . . 3
I.1 La charge électrique . . . 3
I.2 Loi de Coulomb . . . 3
I.3 Champ électrostatique d'une charge ponctuelle . . . 4
II Distributions continues de charges . . . 5
II.1 Densités de charge . . . 5
II.2 Champ créé par une distribution continue . . . 6
III Symétries et invariances . . . 6
III.1 Principe de Curie ; plans de symétrie et d'antisymétrie . . . 6
III.2 Invariances . . . 7
IV Potentiel électrostatique . . . 9
IV.1 Circulation du champ d'une charge ponctuelle . . . 9
IV.2 Énergie potentielle d'une charge . . . 9
IV.3 Lignes de champ et surfaces équipotentielles . . . 10
IV.4 Calcul direct : fil rectiligne de longueur finie . . . 11
IV.5 Calcul direct : le disque uniformément chargé . . . 12
V Flux du champ électrostatique et théorème de Gauss . . . 14
V.1 Flux et théorème de Gauss . . . 14
V.2 Distribution à symétrie sphérique : la boule uniformément chargée . . . 15
V.3 Distribution à symétrie cylindrique : le fil infini . . . 15
V.4 Distribution plane : le plan infini . . . 16
V.5 Analogie avec la gravitation . . . 17
VI Énergie électrostatique et condensateur plan . . . 18
VI.1 Énergie d'un système de charges ponctuelles . . . 18
VI.2 Condensateurs ; le condensateur plan . . . 19
VII Synthèse . . . 20
VIII Exercices d'approfondissement . . . 21
IX Classiques des concours . . . 23

I Charge électrique et loi de Coulomb

I.1 La charge électrique

L'électrisation par frottement (ambre, verre, matières plastiques) est connue depuis l'Antiquité. Elle révèle une grandeur physique, la **charge électrique**, qui existe sous deux formes : deux corps chargés de même signe se repoussent, deux corps de signes opposés s'attirent.

Propriétés de la charge électrique R

- La charge s'exprime en **coulombs** (C) ; c'est une grandeur **algébrique** et **additive**.
- Elle est **quantifiée** : toute charge observée est un multiple entier de la charge élémentaire $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (proton : $+e$, électron : $-e$).
- Elle est **conservée** : la charge totale d'un système isolé est constante (dans une réaction chimique ou nucléaire, la charge se redistribue mais ne se crée pas).
- Elle est **invariante** : sa valeur ne dépend pas du référentiel.

Remarque

À l'échelle macroscopique, la quantification est invisible : un objet électrisé porte typiquement $10^{-8}\,\mathrm{C}$, soit 6×10^{10} charges élémentaires en excès. On décrira donc les charges par des **distributions continues** (partie II).

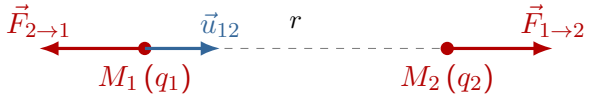
I.2 Loi de Coulomb

Loi de Coulomb (1785) R

Deux charges ponctuelles q_1 (en M_1) et q_2 (en M_2), immobiles dans le vide, exercent l'une sur l'autre des forces opposées. La force exercée par q_1 sur q_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{u}_{12} \qquad \text{avec} \quad r = M_1M_2, \quad \vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$$

où $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$ est la permittivité du vide ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9{,}0 \times 10^{9}\,\mathrm{m\cdot F^{-1}}$).



Cas $q_1q_2 > 0$: répulsion.
Si $q_1q_2 < 0$, les forces changent de sens : attraction.

Fig. 1 : Loi de Coulomb : forces opposées, portées par la droite (M_1M_2), en $1/r^2$.

Ordres de grandeur

Dans l'atome d'hydrogène ($r = 53\,\mathrm{pm}$), la force électrostatique entre le proton et l'électron vaut $F_e = 8{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$, alors que la force gravitationnelle vaut $F_g = \frac{Gm_pm_e}{r^2} = 3{,}6 \times 10^{-47}\,\mathrm{N}$: $F_e/F_g \approx 2 \times 10^{39}$, indépendamment de r. La gravitation est négligeable à l'échelle atomique ; elle ne domine aux grandes échelles que parce que la matière est globalement neutre.

I.3 Champ électrostatique d'une charge ponctuelle

La force subie par une charge test q placée en M est proportionnelle à q : on peut l'écrire $\vec{F} = q\vec{E}(M)$, où $\vec{E}(M)$ ne dépend que des *sources*. Cela permet de séparer la création du champ (par les sources) et son action (sur la charge test).

Définition — Champ électrostatique R

Une charge ponctuelle q placée en O crée en tout point $M \neq O$ le champ

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{u}_r \qquad r = OM, \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Une charge q' placée en M subit la force $\vec{F} = q'\vec{E}(M)$. Le champ s'exprime en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ (ou $\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$).

Principe de superposition R

Le champ créé par un ensemble de charges ponctuelles q_i placées en P_i est la somme vectorielle des champs créés par chacune :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}.$$

✗ Attention, erreurs fréquentes

- On additionne des **vecteurs**, pas des normes : deux champs de même norme peuvent s'annuler.
- Le champ créé par une charge ponctuelle n'est pas défini à l'emplacement de la charge elle-même : une charge ne subit pas son propre champ.
- Dans $\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$, le vecteur va de la **source** P vers le **point d'observation** M.

Ordres de grandeur

Champ créé par le proton à la distance de l'électron dans H	$5\times10^{11}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$
Champ disruptif de l'air sec (apparition d'étincelles)	$3\times10^{6}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$
Champ sous un nuage d'orage	$10^{4}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$
Champ atmosphérique par beau temps, au sol	$100\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Point de champ nul ✦✧✧✧✧

On place une charge $q > 0$ en A (abscisse 0) et une charge $-2q$ en B (abscisse a) sur l'axe Ox.

Q-1) Montrer qu'il n'existe pas de point de champ nul sur le segment $[AB]$, ni à droite de B.

Q-2) Déterminer la position du point N de l'axe où le champ est nul.

Correction

Q-1) Entre A et B, les deux champs sont dirigés selon $+\vec{u}_x$ (le champ de q s'éloigne de A, celui de $-2q$ pointe vers B) : ils s'ajoutent. À droite de B, le point est plus proche de la charge la plus forte en valeur absolue : $\frac{2q}{(x-a)^2} > \frac{q}{x^2}$, les champs opposés ne peuvent pas se compenser.

Q-2) À gauche de A, en $x = -d$ ($d > 0$) : $\frac{q}{d^2} = \frac{2q}{(d+a)^2}$, soit $d + a = \sqrt{2}\,d$ et

$$d = \frac{a}{\sqrt{2}-1} = (1+\sqrt{2})\,a \approx 2{,}41\,a.$$

Le point de champ nul est toujours situé du côté de la charge la plus faible en valeur absolue.

EXERCICE 2 Pendule électrostatique

✦✦✧✧✧

Deux petites boules identiques, de masse $m = 0{,}10\,\mathrm{g}$, portant la même charge q, sont suspendues en un même point par des fils de longueur $\ell = 20\,\mathrm{cm}$. À l'équilibre, chaque fil fait l'angle $\alpha = 10°$ avec la verticale.

Q-1) Écrire l'équilibre d'une boule et en déduire $|q|$. On prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-2) Combien de charges élémentaires cela représente-t-il ?

Correction

Q-1) La boule est soumise à son poids, à la tension du fil et à la force de Coulomb horizontale $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ avec $d = 2\ell\sin\alpha$. L'équilibre impose $\tan\alpha = \frac{F}{mg}$, d'où

$$|q| = 2\ell\sin\alpha\sqrt{4\pi\varepsilon_0\, mg\tan\alpha} = 9{,}6\times10^{-9}\,\mathrm{C}.$$

Q-2) $|q|/e \approx 6\times10^{10}$: la quantification de la charge est bien invisible à cette échelle.

II Distributions continues de charges

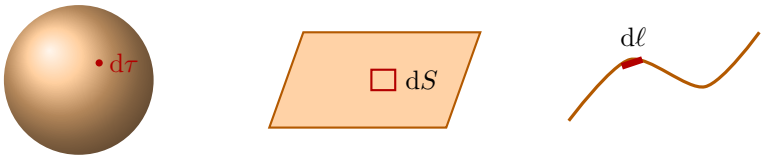
II.1 Densités de charge

À l'échelle mésoscopique (grande devant les distances interatomiques, petite devant les dimensions du système), on remplace les charges discrètes par une répartition continue.

Définition — Densités volumique, surfacique et linéique R

- **Volumique** : un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ autour de P porte la charge $\mathrm{d}q = \rho(P)\,\mathrm{d}\tau$ (ρ en $\mathrm{C\cdot m^{-3}}$).
- **Surfacique** : lorsque les charges occupent une couche d'épaisseur négligeable (surface d'un conducteur), $\mathrm{d}q = \sigma(P)\,\mathrm{d}S$ (σ en $\mathrm{C\cdot m^{-2}}$).
- **Linéique** : pour un fil fin, $\mathrm{d}q = \lambda(P)\,\mathrm{d}\ell$ (λ en $\mathrm{C\cdot m^{-1}}$).

La charge totale s'obtient par intégration : $Q = \iiint \rho\,\mathrm{d}\tau$, $Q = \iint \sigma\,\mathrm{d}S$ ou $Q = \int \lambda\,\mathrm{d}\ell$.



volumique ρ surfacique σ linéique λ

Fig. 2 : Les trois modèles de distribution continue.

II.2 Champ créé par une distribution continue

Chaque élément $\mathrm{d}q$ situé en P se comporte comme une charge ponctuelle ; par superposition,

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in\mathcal{D}} \frac{\rho(P)\,\mathrm{d}\tau}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \qquad \text{(et de même avec } \sigma\,\mathrm{d}S \text{ ou } \lambda\,\mathrm{d}\ell\text{)}.$$

Ce calcul direct n'est simple que dans quelques cas ; en pratique, on commence **toujours** par exploiter les symétries (partie III), puis on utilise soit le potentiel (partie IV), soit le théorème de Gauss (partie V).

> **Remarque**
>
> Les modèles surfacique et linéique sont des idéalisations : ils conduisent à des champs **discontinus** à la traversée d'une surface chargée et **infinis** au voisinage d'un fil, ce qui n'arrive jamais avec une densité volumique bornée.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 **Charges totales** ✦✧✧✧✧

Q-1) Une sphère de rayon R porte la densité surfacique $\sigma(\theta) = \sigma_0\cos\theta$ (coordonnées sphériques d'axe Oz). Calculer sa charge totale.

Q-2) Une boule de rayon R porte la densité volumique $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. Calculer sa charge totale Q.

Correction

Q-1) $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$: $Q = \sigma_0 R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$. La sphère est globalement neutre : l'hémisphère nord porte $+\pi R^2\sigma_0$, l'hémisphère sud l'opposé (cette distribution réapparaît dans le chapitre EM2).

Q-2) Avec $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\mathrm{d}r$ (coquille sphérique) :

$$Q = 4\pi\rho_0\int_0^R\left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right)\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4}\right) = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3}.$$

III Symétries et invariances

III.1 Principe de Curie ; plans de symétrie et d'antisymétrie

Principe de Curie R

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. Ici, la cause est la distribution de charges, l'effet est le champ $\vec{E}$ (et le potentiel V).

Définition — Plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution R

- Π est un **plan de symétrie** de la distribution si, pour tout point P et son symétrique P' par rapport à Π, $\rho(P') = \rho(P)$.
- Π^* est un **plan d'antisymétrie** si $\rho(P') = -\rho(P)$.

Conséquences sur le champ électrostatique R D

- En un point M d'un **plan de symétrie** Π, le champ $\vec{E}(M)$ est **contenu dans** Π.
- En un point M d'un **plan d'antisymétrie** Π^*, le champ $\vec{E}(M)$ est **perpendiculaire à** Π^*.

On dit que $\vec{E}$ est un **vecteur polaire** (un « vrai » vecteur, comme $\overrightarrow{OM}$ ou une force).

Démonstration. Soit $M \in \Pi$ et deux charges élémentaires $\mathrm{d}q$ en P et en P' symétrique de P. Les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{P'M}$ sont symétriques l'un de l'autre, de même norme : leur somme est dans Π (figure 3). En regroupant ainsi toutes les charges deux à deux, $\vec{E}(M) \in \Pi$. Pour un plan d'antisymétrie, les charges sont opposées : on fait la différence de deux vecteurs symétriques, qui est perpendiculaire au plan.

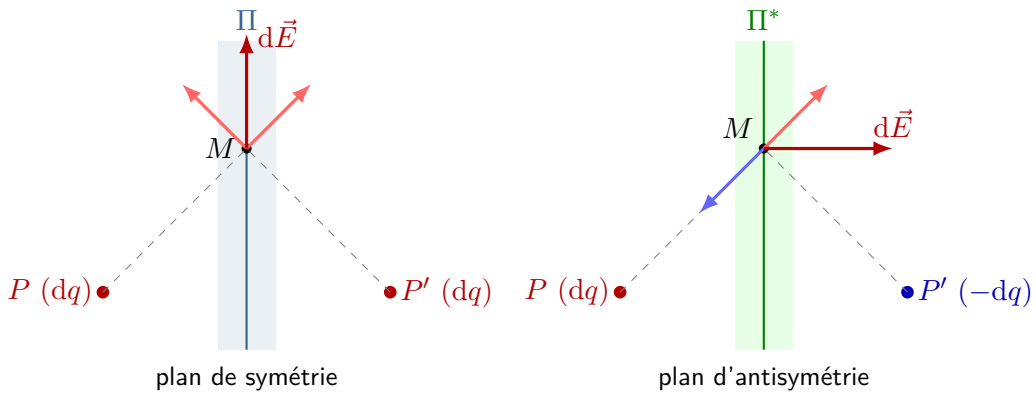


Fig. 3 : Contributions de deux charges symétriques : la résultante est dans Π, ou perpendiculaire à Π^*.

Remarque

Le potentiel V est un scalaire : il prend la même valeur en deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie, des valeurs opposées par rapport à un plan d'antisymétrie (avec $V = 0$ à l'infini). En particulier $V = 0$ sur un plan d'antisymétrie.

III.2 Invariances

Invariances R

- Si la distribution est invariante par **translation** selon Oz, le champ ne dépend pas de z.
- Si elle est invariante par **rotation** autour de Oz, les composantes de $\vec{E}$ dans la base cylindrique ne dépendent pas de θ.
- Si elle est invariante par toute rotation autour de O (symétrie sphérique), les composantes sphériques ne dépendent que de r.

☞ Méthode — Analyse des symétries M

1. Choisir le système de coordonnées adapté à la distribution (cartésiennes, cylindriques, sphériques).
2. Chercher les **invariances** : elles éliminent des **variables**.
3. Chercher, pour un point M **quelconque**, les plans de symétrie (ou d'antisymétrie) **passant par** M : leur intersection donne la **direction** de $\vec{E}(M)$.
4. Conclure, par exemple : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$.

Distribution	Plans de symétrie contenant M	Champ
Sphère ou boule, $\rho(r)$	tous les plans contenant (OM)	$E(r)\,\vec{u}_r$
Fil ou cylindre infini, $\rho(r)$	$(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ et $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$	$E(r)\,\vec{u}_r$
Plan infini $z=0$, σ uniforme	tous les plans contenant $(M,\vec{u}_z)$	$E(z)\,\vec{u}_z$
Disque ou spire, point de l'axe	tous les plans contenant l'axe	$E(z)\,\vec{u}_z$

Tab. 1 : Résultats de l'analyse des symétries pour les distributions usuelles.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Les plans utilisés doivent **contenir le point** M où l'on cherche le champ.
- L'invariance porte sur les **variables** ; la symétrie porte sur la **direction**. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente.
- Pour un fil infini, $\vec{E}(M)=E(r)\,\vec{u}_r$: r est la distance **à l'axe** (coordonnées cylindriques), pas à un point.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 — Analyse des symétries

✦✦✧✧✧

Pour chaque distribution, déterminer la direction du champ et les variables dont il dépend.

Q-1) Un cylindre infini d'axe Oz, de rayon R, chargé en volume avec une densité $\rho(r)$.

Q-2) Une plaque infinie comprise entre $z=-a$ et $z=a$, de densité $\rho(z)=\rho_0\,\frac{z}{a}$.

Q-3) Deux charges $+q$ en $A(0,0,a)$ et $-q$ en $B(0,0,-a)$, en un point M du plan $z=0$.

Correction

Q-1) Invariance par translation selon Oz et par rotation autour de Oz : $\vec{E}$ ne dépend que de r. Les plans $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ et $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ sont plans de symétrie : $\vec{E}=E(r)\,\vec{u}_r$.

Q-2) Invariance par translation selon Ox et Oy : dépendance en z seul. Tout plan contenant M et $\vec{u}_z$ est plan de symétrie : $\vec{E}=E(z)\,\vec{u}_z$. De plus, le plan $z=0$ est un plan d'antisymétrie ($\rho(-z)=-\rho(z)$) : en deux points symétriques par rapport à ce plan, $E_z(-z)=E_z(z)$ (la composante normale d'un vecteur polaire est conservée par antisymétrie).

Q-3) Le plan $z=0$ est un plan d'antisymétrie : $\vec{E}(M)$ lui est perpendiculaire, donc dirigé selon $\pm\vec{u}_z$; en fait selon $-\vec{u}_z$ (le champ va de $+q$ vers $-q$). Le plan contenant M et l'axe Oz est de symétrie, ce qui est cohérent.

IV Potentiel électrostatique

IV.1 Circulation du champ d'une charge ponctuelle

Calculons la circulation élémentaire du champ d'une charge q placée en O, pour un déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$:

$$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right).$$

La circulation élémentaire est une différentielle exacte : la circulation de $\vec{E}$ entre deux points ne dépend pas du chemin suivi. Par superposition, c'est vrai pour toute distribution.

Définition — Potentiel électrostatique R

Le potentiel V est défini (à une constante près) par $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, soit

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V \qquad V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Il s'exprime en volts (V). Pour une charge ponctuelle, avec $V = 0$ à l'infini : $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$.

Pour une distribution, par superposition (si elle est bornée, avec $V(\infty) = 0$) :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\, P_i M} \qquad \text{ou} \qquad V(M) = \iiint \frac{\rho(P)\,\mathrm{d}\tau}{4\pi\varepsilon_0\, PM}.$$

Le calcul est **scalaire**, donc souvent plus simple que celui de $\vec{E}$; on obtient ensuite le champ par dérivation.

Gradient dans les trois systèmes de coordonnées R

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z \quad \text{(cyl.)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi \quad \text{(sphériques)}$$

On retrouve ces expressions à partir de $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ et de l'expression du déplacement élémentaire (chapitre M1).

IV.2 Énergie potentielle d'une charge

Énergie potentielle électrostatique R D

Une charge q placée dans un champ $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ (créé par d'autres charges, fixes) possède l'énergie potentielle

$$E_p = qV$$

En effet, le travail de la force $q\vec{E}$ pour un déplacement élémentaire est $\delta W = q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -q\,\mathrm{d}V = -\mathrm{d}(qV)$. La force électrostatique est conservative.

Remarque

Une particule de charge q accélérée sous la tension U gagne l'énergie cinétique $|q|U$. L'électronvolt est l'énergie gagnée par un électron sous $1\,\mathrm{V}$: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

IV.3 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Définition — Lignes de champ, équipotentielles R

Une **ligne de champ** est une courbe tangente en chacun de ses points au champ $\vec{E}$, orientée dans le sens de $\vec{E}$. Une **surface équipotentielle** est une surface d'équation $V = \text{cte}$.

Propriétés des cartes de champ R

- Les lignes de champ sont **perpendiculaires** aux équipotentielles (car $\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0$ pour un déplacement sur une équipotentielle).
- Le champ est orienté dans le sens des **potentiels décroissants**.
- Les lignes de champ **partent des charges positives** et **aboutissent aux charges négatives** (ou à l'infini) ; elles ne se referment jamais sur elles-mêmes (la circulation de $\vec{E}$ sur une courbe fermée est nulle).
- Là où les équipotentielles (tracées à pas constant) se resserrent, le champ est intense.
- Deux lignes de champ ne se coupent qu'en un point où le champ est nul ou non défini.

☞ Méthode — Équation d'une ligne de champ M

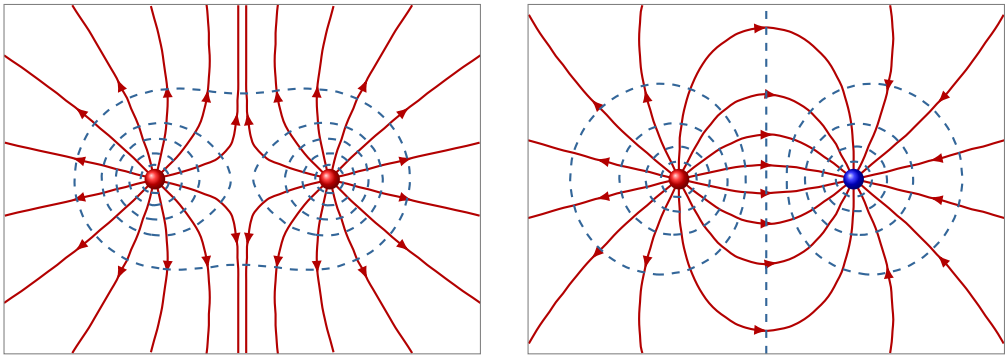
Un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ le long d'une ligne de champ est colinéaire à $\vec{E}$:

$$\vec{E} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{0} \qquad \text{soit, en cartésiennes,} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}.$$

Exemple : charge ponctuelle. En sphériques, $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$: la nullité du produit vectoriel impose $\mathrm{d}\theta = 0$ et $\mathrm{d}\varphi = 0$. Les lignes de champ sont les demi-droites issues de la charge ; les équipotentielles $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = V_0$ sont les sphères centrées sur la charge, de rayon $r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V_0}$.

Remarque

La circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe **fermée** est nulle, puisque $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\oint \mathrm{d}V = 0$. Appliquée à une maille de circuit, cette propriété donne la **loi des mailles** (chapitre E1) : la somme des tensions le long d'une maille est nulle. La tension $U_{AB} = V_A - V_B$ de l'électrocinétique est une différence de potentiel électrostatique.



(a) deux charges $+q$ et $+q$ (b) deux charges $+q$ et $-q$

Fig. 4 : Lignes de champ (rouge) et équipotentielles (tirets bleus) dans un plan contenant les charges. En (a), le champ est nul au milieu des charges (point col du potentiel) ; en (b), le plan médiateur est l'équipotentielle $V = 0$.

☞ Méthode — Lire une carte de champ M

- Repérer les sources (lignes divergentes : charge positive ; convergentes : charge négative) et comparer leurs valeurs absolues au nombre de lignes qui en partent.
- Repérer les plans de symétrie et d'antisymétrie de la carte ; un point où les lignes semblent se croiser est un point de champ nul.
- Évaluer la norme du champ par l'écartement des équipotentielles : $E \approx \frac{|\Delta V|}{\Delta \ell}$.

IV.4 Calcul direct : fil rectiligne de longueur finie

Un segment rectiligne porté par l'axe Oz porte la densité linéique uniforme λ. Le point M est à la distance r de l'axe ; on choisit l'origine O au pied de la perpendiculaire issue de M. Un point P du fil, de cote z, est vu depuis M sous l'angle α compté à partir de (MO), avec $z = r\tan\alpha$. Les extrémités du segment sont vues sous les angles $\alpha_1 < \alpha_2$.

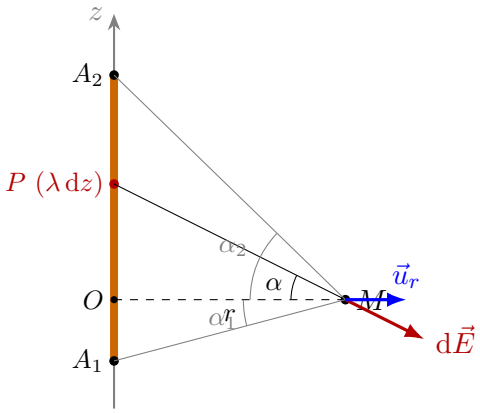


Fig. 5 : Fil de longueur finie : repérage d'un élément de charge par l'angle α ($\alpha_1 < 0$ sur la figure).

Démonstration D. $\overrightarrow{PM} = r\vec{u}_r - z\vec{u}_z$, donc $\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\lambda\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\vec{u}_r - z\vec{u}_z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$. Avec $z = r\tan\alpha$, $\mathrm{d}z = \frac{r\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha}$ et $(r^2+z^2)^{3/2} = \frac{r^3}{\cos^3\alpha}$:

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\, r}\left(\cos\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,\vec{u}_z\right)\mathrm{d}\alpha.$$

L'intégration entre α_1 et α_2 donne

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\, r}\,(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \qquad E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\, r}\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

Cas particuliers. Sur le plan médiateur, $\alpha_1 = -\alpha_2$: $E_z = 0$, conformément à la symétrie. Pour un fil infini, $\alpha_1 \to -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 \to \frac{\pi}{2}$: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$, résultat retrouvé plus simplement par le théorème de Gauss (partie V).

Ordres de grandeur

Pour un fil de longueur $2L$ observé sur son plan médiateur à la distance r, le rapport au champ du fil infini vaut $\sin\alpha_2 = \frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}} \approx 1 - \frac{r^2}{2L^2}$: le modèle du fil infini est valable à $1\,\%$ près dès que $L > 7r$. Un fil de $1\,\mathrm{m}$ est « infini » vu à quelques centimètres.

IV.5 Calcul direct : le disque uniformément chargé

Un disque de centre O, d'axe Oz, de rayon R, porte la densité surfacique uniforme σ. Cherchons le potentiel en un point M de l'axe, de cote z.

Potentiel D. On découpe le disque en couronnes de rayon r et de largeur $\mathrm{d}r$, de charge $\mathrm{d}q = \sigma\, 2\pi r\,\mathrm{d}r$, toutes situées à la distance $\sqrt{r^2+z^2}$ de M :

$$V(z) = \int_0^R \frac{\sigma\, 2\pi r\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right).$$

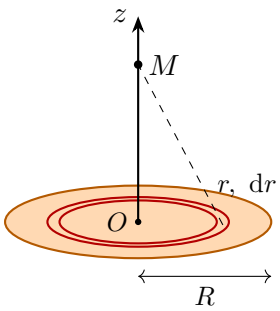


Fig. 6 : Découpage du disque en couronnes de rayon r et de largeur $\mathrm{d}r$.

Champ. Par symétrie, sur l'axe $\vec{E} = E_z\vec{u}_z$ et $E_z = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$:

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Au centre du disque, le champ est nul : deux points diamétralement opposés du disque y créent des champs opposés. La formule précédente, valable sur l'axe pour $z \neq 0$, montre que le champ tend vers $\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ quand $z \to 0^{\pm}$: le point O, situé sur la surface chargée, est un point de discontinuité.

Limites. Pour $|z| \gg R$, $E_z \approx \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$: on retrouve le champ d'une charge ponctuelle $Q = \sigma\pi R^2$. Pour $R \to \infty$ (plan infini), $E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sgn}(z)$: le champ est uniforme de chaque côté et **subit une discontinuité** $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à la traversée du plan.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Le potentiel est continu à la traversée d'une surface chargée, mais le champ ne l'est pas : sa composante normale saute de σ/ε_0.
- Pour une distribution infinie (plan, fil infini), on ne peut pas prendre $V = 0$ à l'infini : l'intégrale diverge. On choisit alors une référence arbitraire.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Charges aux sommets d'un triangle

★✧✧✧✧

Trois charges q sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a, de centre G.

Q-1) Que vaut le champ en G ? Calculer le potentiel en G.

Q-2) Calculer l'énergie qu'il a fallu fournir pour constituer ce système à partir de charges infiniment éloignées.

Correction

Q-1) Les trois champs ont même norme et font entre eux des angles de $120°$: leur somme est nulle, $\vec{E}(G) = \vec{0}$ (les trois plans médiateurs sont des plans de symétrie qui se coupent selon une droite orthogonale au plan du triangle, et le plan du triangle est aussi de symétrie). Avec $GA = \frac{a}{\sqrt{3}}$:

$$V(G) = 3 \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, a/\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}\,q}{4\pi\varepsilon_0\, a}.$$

Un champ nul n'implique pas un potentiel nul.

Q-2) On amène les charges une à une : la première ne coûte rien, la deuxième coûte $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$, la troisième $\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$, d'où $E_p = \dfrac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0\, a}$.

EXERCICE 6 Anneau et couronne chargés

★★✧✧✧

Q-1) Un anneau de centre O, d'axe Oz, de rayon R, porte la densité linéique uniforme λ. Établir le champ en un point de l'axe de cote z, puis déterminer les points de l'axe où sa norme est maximale.

Q-2) Une couronne plane comprise entre les rayons R_i et R_e porte la densité surfacique uniforme σ. En la considérant comme la superposition d'un disque de rayon R_e chargé avec σ et d'un disque de rayon R_i chargé avec $-\sigma$, établir le champ sur l'axe pour $z > 0$.

Correction

Q-1) Tous les plans contenant l'axe sont de symétrie : $\vec{E} = E_z\vec{u}_z$. Chaque élément $\lambda R\,\mathrm{d}\theta$ est à la distance $\sqrt{R^2+z^2}$ et sa contribution axiale porte le facteur $\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$:

$$E_z = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

E_z est impaire, nulle en O et à l'infini ; $\dfrac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}z} \propto (R^2+z^2) - 3z^2 = 0$ pour $z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Q-2) Pour un disque de rayon R et $z > 0$, $E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$. Par superposition :

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{R_i^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_e^2+z^2}}\right).$$

On retrouve le disque pour $R_i \to 0$; le champ est nul au centre de la couronne.

EXERCICE 7 Équipotentielle nulle de deux charges ✦✦✧✧✧

On reprend les charges q en $A(0,0)$ et $-2q$ en $B(a,0)$ de l'exercice « Point de champ nul ».

Q-1) Montrer que l'équipotentielle $V = 0$ est l'ensemble des points M tels que $MB = 2MA$.

Q-2) Montrer qu'il s'agit d'un cercle (une sphère dans l'espace) dont on donnera le centre et le rayon.

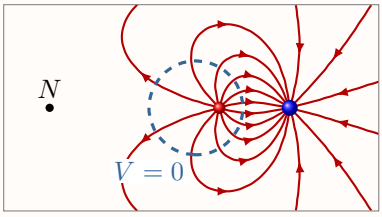
Correction

Q-1) $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{MA} - \frac{2q}{MB}\right) = 0 \iff MB = 2MA.$

Q-2) $(x-a)^2 + y^2 = 4(x^2+y^2)$ donne $3x^2 + 3y^2 + 2ax - a^2 = 0$, soit

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2}{9}.$$

C'est le cercle de centre $\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{2a}{3}$: il entoure la charge la plus faible, A, et passe par $\left(\frac{a}{3}, 0\right)$ et $(-a, 0)$.



Ici a vaut $1,5$ unité : on observe le point de champ nul N à $2,41\,a$ à gauche de A, et le cercle $V = 0$ autour de A.

V Flux du champ électrostatique et théorème de Gauss

V.1 Flux et théorème de Gauss

Définition — Flux R

Le flux d'un champ $\vec{E}$ à travers une surface orientée S est $\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$, où $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ est le vecteur surface élémentaire. Pour une surface **fermée**, on oriente $\vec{n}$ vers l'**extérieur**.

Pour une charge ponctuelle q au centre d'une sphère de rayon r : $\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$, indépendamment de r. Ce résultat, conséquence de la décroissance en $1/r^2$, se généralise à toute surface fermée.

Théorème de Gauss R

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée Σ quelconque est égal à la charge intérieure à Σ divisée par ε_0 :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Les charges extérieures à Σ contribuent au champ mais pas au flux total.

☞ Méthode — Appliquer le théorème de Gauss M

1. Analyser symétries et invariances : direction et variables de $\vec{E}$.
2. Choisir une **surface de Gauss** fermée passant par M, sur laquelle $\vec{E}$ est soit normal et de norme constante, soit tangent (flux nul).
3. Calculer le flux en fonction de la composante inconnue (par exemple $\Phi = E(r)\,4\pi r^2$).
4. Calculer la charge intérieure (souvent en distinguant M intérieur et M extérieur à la distribution).
5. Conclure et vérifier la continuité du champ (sauf traversée d'une surface chargée).

V.2 Distribution à symétrie sphérique : la boule uniformément chargée

Une boule de centre O, de rayon R, porte la densité uniforme ρ (charge $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$).

Symétries D**.** Tous les plans contenant (OM) sont plans de symétrie et la distribution est invariante par rotation autour de O : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$.

Surface de Gauss. La sphère de centre O et de rayon r : $\Phi = 4\pi r^2 E(r)$.

Charge intérieure. Pour $r \geq R$: $Q_{\text{int}} = Q$; pour $r < R$: $Q_{\text{int}} = Q\,\frac{r^3}{R^3}$. D'où

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq R) \qquad\qquad E(r) = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho\,r}{3\varepsilon_0} \quad (r \leq R)$$

À l'extérieur, tout se passe comme si la charge était concentrée au centre. Le potentiel s'en déduit par $E = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ avec continuité en $r = R$: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ pour $r \geq R$ et $V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ pour $r \leq R$.

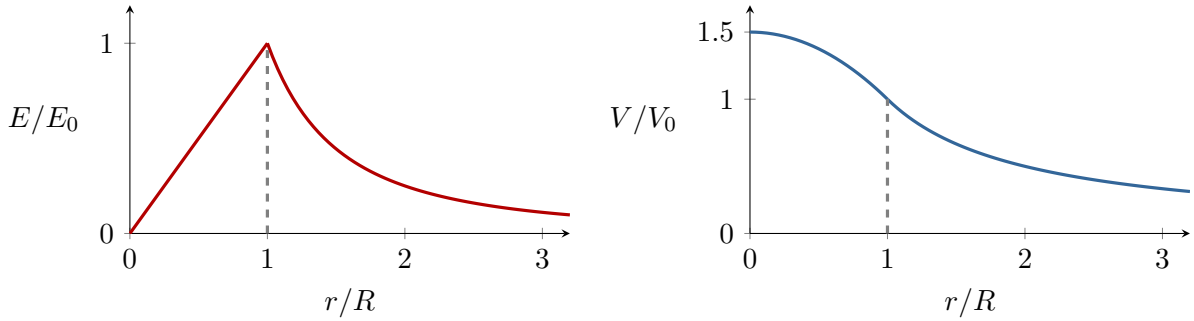


Fig. 7 : Champ et potentiel d'une boule uniformément chargée, avec $E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ et $V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$: le champ est continu et maximal à la surface.

V.3 Distribution à symétrie cylindrique : le fil infini

Un fil rectiligne infini d'axe Oz porte la densité linéique uniforme λ.

Symétries. $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$ (r : distance à l'axe). **Surface de Gauss.** Un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur h, fermé par deux disques. Le flux à travers les disques est nul ($\vec{E} \perp \vec{n}$) ; à travers la surface latérale, $\Phi = 2\pi r h\,E(r)$. **Charge intérieure.** $Q_{\text{int}} = \lambda h$. D'où

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,r}\,\vec{u}_r \qquad\qquad V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

Le champ décroît en $1/r$ (et non en $1/r^2$) ; le potentiel n'est défini qu'à une constante près, fixée par une distance de référence r_0. Il diverge en $r \to 0$: au voisinage immédiat du fil, le modèle linéique n'est plus valable et il faut tenir compte de son rayon.

Cylindre uniformément chargé D**.** Pour un cylindre infini de rayon R et de densité volumique uniforme ρ, la même surface de Gauss entoure la charge $\rho\pi r^2 h$ si $r < R$ et $\rho\pi R^2 h$ si $r > R$:

$$E(r) = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0} \quad (r \le R) \qquad\qquad E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0\, r} \quad (r \ge R).$$

On en déduit le potentiel en intégrant $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E$ dans chaque région ; les deux constantes sont fixées par un choix de référence (par exemple $V(0) = 0$) et par la **continuité** du potentiel en $r = R$:

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} \quad (r \le R) \qquad\qquad V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1 + 2\ln\frac{r}{R}\right) \quad (r \ge R).$$

V.4 Distribution plane : le plan infini

Pour un plan $z = 0$ portant la densité σ uniforme : $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$ avec $E(-z) = -E(z)$ (le plan $z = 0$ est de symétrie). Un cylindre d'axe Oz de section S, compris entre $-z$ et z, donne $2SE(z) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_z \quad (z > 0) \qquad\qquad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_z \quad (z < 0)$$

On retrouve, beaucoup plus rapidement, la limite du disque.

★ À retenir

Distribution	Champ à l'extérieur	Champ à l'intérieur
Sphère de rayon R, charge Q en surface	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	$\vec{0}$
Boule uniforme, charge Q	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	$\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$
Fil infini λ	$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$	—
Cylindre infini uniforme ρ, rayon R	$\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$	$\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{u}_r$
Cylindre infini chargé en surface σ, rayon R	$\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$	$\vec{0}$
Plan infini σ	$\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$	—

Pour les distributions surfaciques, le champ est discontinu à la traversée de la surface (saut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$) ; pour les distributions volumiques, il est continu.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Le théorème de Gauss est **toujours vrai**, mais il ne permet de calculer le champ que si la symétrie est suffisante. Pour un disque, un segment ou un cube chargé, il ne donne pas le champ.
- La surface de Gauss est une surface **fictive** ; elle doit passer par le point M et être fermée.
- Le flux ne dépend que de la charge intérieure, mais le **champ** en un point de Σ dépend de toutes les charges.

V.5 Analogie avec la gravitation

La loi de Newton $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$ a la même structure que la loi de Coulomb. Toutes les propriétés précédentes se transposent.

	Électrostatique	Gravitation
Source	charge q	masse m
Champ d'une source ponctuelle	$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$	$\vec{\mathcal{G}} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{u}_r$
Constante	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$
Théorème de Gauss	$\oiint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\oiint \vec{\mathcal{G}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G\, M_{\text{int}}$
Énergie potentielle	qV	$m\,V_g$ avec $V_g = -\frac{GM}{r}$

Tab. 2 : Dictionnaire électrostatique–gravitation (il n'existe pas de masse négative : la gravitation est toujours attractive).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Flux à travers un cube

Une charge ponctuelle q est placée au centre d'un cube.

Q-1) Quel est le flux du champ à travers une face du cube ?

Q-2) La charge est maintenant placée à un sommet du cube. Quel est le flux à travers chacune des faces ?

Correction

Q-1) Le flux total sortant est $\frac{q}{\varepsilon_0}$; les six faces jouent le même rôle : $\Phi_{\text{face}} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$.

Q-2) On complète le cube par sept cubes identiques pour former un grand cube de centre q : le petit cube intercepte $\frac{1}{8}$ du flux, soit $\frac{q}{8\varepsilon_0}$. Les trois faces contenant le sommet ont un flux nul (le champ y est tangent) ; les trois autres se partagent le flux : $\frac{q}{24\varepsilon_0}$ chacune.

EXERCICE 9 Boule à densité non uniforme

Une boule de rayon R porte la densité $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ (exercice « Charges totales »).

Q-1) Déterminer le champ en tout point.

Q-2) Où le champ est-il maximal ? Que vaut-il alors ?

Correction

Q-1) $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ et la sphère de rayon r donne $4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}$. Pour $r \le R$: $Q_{\text{int}} = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$, d'où

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right); \qquad \text{pour } r \ge R : \; E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}.$$

Q-2) $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} = 0$ pour $r = \frac{2R}{3}$ (à l'intérieur), avec $E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$, supérieur à la valeur en surface $\frac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$.

EXERCICE 10 **Câble coaxial** ✦✦✧✧✧

Un câble coaxial est formé d'un cylindre intérieur de rayon R_1 portant la charge $+\lambda$ par unité de longueur et d'un cylindre extérieur de rayon R_2 portant $-\lambda$.

Q-1) Calculer le champ entre les armatures et la tension $U = V_1 - V_2$.

Q-2) En déduire la capacité par unité de longueur $\frac{C}{\ell} = \frac{\lambda}{U}$. Application numérique : $R_1 = 0{,}5\,\text{mm}$, $R_2 = 3{,}5\,\text{mm}$ (sans diélectrique).

Q-3) En intégrant la densité d'énergie $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, calculer l'énergie stockée dans une longueur ℓ de câble et vérifier qu'elle vaut $\frac{Q^2}{2C}$.

Correction

Q-1) Entre les armatures, seule la charge du conducteur intérieur est entourée : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$. Hors de l'espace inter-armatures, $Q_{\text{int}} = 0$ et $\vec{E} = \vec{0}$. Puis $U = \int_{R_1}^{R_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

Q-2) $\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} = 29\,\text{pF}\cdot\text{m}^{-1}$ (en pratique, le diélectrique multiplie cette valeur par sa permittivité relative, d'où les $100\,\text{pF}\cdot\text{m}^{-1}$ typiques).

Q-3) Avec $\mathrm{d}\tau = 2\pi r\ell\,\mathrm{d}r$: $\mathcal{E} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 2\pi r\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{Q^2}{2C}$ avec $Q = \lambda\ell$. Si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, $\ln\frac{R_2}{R_1} \approx \frac{e}{R_1}$ et $C \approx \frac{\varepsilon_0 2\pi R_1\ell}{e}$: condensateur plan de surface $2\pi R_1\ell$.

VI Énergie électrostatique et condensateur plan

VI.1 Énergie d'un système de charges ponctuelles

Énergie d'interaction R

L'énergie nécessaire pour constituer un système de charges ponctuelles q_i, initialement infiniment éloignées, est

$$E_p = \sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i,$$

où V_i est le potentiel créé au point P_i par les **autres** charges. Le facteur $\frac{1}{2}$ évite de compter deux fois chaque paire. Pour une distribution continue, la somme devient une intégrale :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\iiint \rho V\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\iint \sigma V\,\mathrm{d}S.$$

Remarque

Il faut distinguer l'énergie potentielle qV_{ext} d'une charge placée dans un champ **extérieur** (créé par des sources fixes, dont on ne compte pas l'énergie propre) et l'énergie d'interaction de **toutes** les charges d'un système, qui comporte le facteur $\frac{1}{2}$.

VI.2 Condensateurs ; le condensateur plan

Définition — Condensateur, capacité R

Un **condensateur** est formé de deux conducteurs, les **armatures**, en **influence totale** : toute ligne de champ partant de l'une aboutit sur l'autre. Les armatures portent alors des charges opposées $+Q$ et $-Q$. La tension $U = V_+ - V_-$ entre elles est proportionnelle à Q :

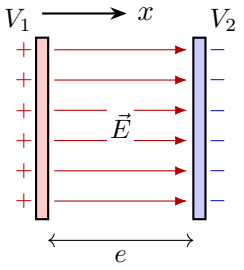
$$Q = CU,$$

où la **capacité** $C > 0$, en farads (F), ne dépend que de la géométrie et du milieu isolant entre les armatures.

Les trois géométries usuelles sont le condensateur **plan** (deux plaques parallèles proches), **cylindrique** (deux cylindres coaxiaux : voir l'exercice sur le câble coaxial) et **sphérique** (deux sphères concentriques : voir l'exercice d'application ci-dessous).

Deux plaques conductrices parallèles de surface S, séparées d'une distance $e \ll \sqrt{S}$, portent les charges $+Q$ et $-Q$, uniformément réparties : $\sigma = \frac{Q}{S}$. On néglige les effets de bord (plans quasi infinis).

Champ D. Par superposition des champs de deux plans infinis de densités $+\sigma$ et $-\sigma$: entre les armatures, les deux champs $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ s'ajoutent ; à l'extérieur, ils se compensent.



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{u}_x \text{ entre les armatures,} \qquad \vec{E} = \vec{0} \text{ à l'extérieur}$$

Capacité. La tension $U = V_1 - V_2 = \int_0^e E\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$ est proportionnelle à Q :

$$Q = CU \qquad \text{avec} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Énergie D. Chaque armature est équipotentielle ; l'énergie d'interaction de toutes les charges vaut donc $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(QV_+ + (-Q)V_-\right) = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$: on retrouve l'énergie stockée dans un condensateur (chapitre E2). En exprimant C et $U = Ee$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 S}{e}\,E^2 e^2 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \times Se.$$

Densité volumique d'énergie électrostatique R

L'énergie du condensateur est localisée dans le champ, entre les armatures, avec la densité volumique

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad (\mathrm{J \cdot m^{-3}})$$

Ce résultat, établi ici pour un cas particulier, est général.

Ordres de grandeur

Avec $S = 100\,\mathrm{cm^2}$ et $e = 1\,\mathrm{mm}$: $C = 89\,\mathrm{pF}$. Sous $U = 1\,\mathrm{kV}$, $E = 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ (proche du champ disruptif de l'air), $Q = 89\,\mathrm{nC}$ et $\mathcal{E} = 44\,\mu\mathrm{J}$: un condensateur à air stocke très peu d'énergie. Pour augmenter la capacité, on augmente la surface en regard (feuilles enroulées, électrodes poreuses), on diminue l'épaisseur (limitée par le claquage de l'isolant) et on remplace le vide par un isolant de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, ce qui donne $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{e}$ ($\varepsilon_r \approx 3$ pour un polymère, plusieurs milliers pour

certaines céramiques). Les capacités usuelles vont du picofarad au millifarad, et jusqu'à quelques milliers de farads pour les supercondensateurs.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 11 Condensateur sphérique ✦✦✧✧✧

Deux sphères conductrices concentriques de rayons $R_1 < R_2$ portent les charges $+Q$ (intérieure) et $-Q$ (extérieure).

Q-1) Déterminer le champ entre les armatures, puis la tension $U = V_1 - V_2$.

Q-2) En déduire la capacité C. Application : $R_1 = 1\,\text{cm}$, $R_2 = 2\,\text{cm}$.

Q-3) Retrouver la capacité d'une sphère isolée de rayon R ($R_2 \to \infty$). Application à la Terre ($R = 6400\,\text{km}$).

Correction

Q-1) Gauss sur une sphère de rayon $r \in]R_1, R_2[$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, et $U = \int_{R_1}^{R_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.

Q-2) $C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 2{,}2\,\text{pF}$.

Q-3) $C = 4\pi\varepsilon_0 R$: pour la Terre, $C \approx 0{,}7\,\text{mF}$ seulement. Remarque : si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, $C \approx \frac{\varepsilon_0\, 4\pi R_1^2}{e}$, on retrouve le condensateur plan.

VII Synthèse

★ À retenir

- **Coulomb** : $\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{12}$; champ d'une charge ponctuelle $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, potentiel $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; superposition.
- **Symétries** : $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie et est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie passant par M ; les invariances éliminent des variables.
- **Potentiel** : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$; $E_p = qV$. Lignes de champ perpendiculaires aux équipotentielles, orientées vers les potentiels décroissants.
- **Gauss** : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$; méthode : symétries, surface de Gauss, flux, charge intérieure.
- Résultats à connaître : boule ($\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ dedans, $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ dehors), fil ($\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$), plan ($\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, discontinuité $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$).
- **Gravitation** : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \leftrightarrow -G$, $q \leftrightarrow m$.
- **Condensateur plan** : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$, $w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

Pour aller plus loin

Les **conducteurs en équilibre** ont un champ intérieur nul et sont équipotentiels ; au voisinage de leur surface, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ (théorème de Coulomb). Le champ est plus intense près des pointes (paratonnerre), et une enceinte conductrice fermée protège son intérieur des champs extérieurs (cage de Faraday). La version locale du théorème de Gauss, $\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, sera établie en deuxième année. Chapitre suivant : EM2, dipôle électrostatique.

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 12 Cavité sphérique dans une boule chargée

★★★☆☆

Une boule de centre O_1, de rayon R_1, porte la densité uniforme ρ, sauf dans une cavité sphérique vide de centre O_2 et de rayon R_2, entièrement contenue dans la boule.

Q-1) Montrer que la distribution est la superposition d'une boule pleine de densité ρ et d'une boule de centre O_2 et de densité $-\rho$.

Q-2) En déduire que le champ dans la cavité est uniforme ; l'exprimer en fonction de $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Correction

Q-1) Dans la cavité, $\rho - \rho = 0$; ailleurs dans la boule, $\rho + 0 = \rho$: les deux distributions superposées reproduisent bien la distribution réelle.

Q-2) À l'intérieur d'une boule uniforme, $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OM}$ (forme vectorielle de $\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$). En un point M de la cavité :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Le champ est uniforme, dirigé selon la droite des centres. La superposition permet de traiter une distribution peu symétrique à l'aide de deux distributions très symétriques.

EXERCICE 13 Jonction p–n

★★★☆☆

Au voisinage d'une jonction p–n de semi-conducteur, on modélise la charge par $\rho = -\rho_0$ pour $-e < z < 0$ (zone p), $\rho = +\rho_0$ pour $0 < z < e$ (zone n), $\rho = 0$ ailleurs, avec $\rho_0 > 0$. La distribution est infinie selon x et y, et le champ est nul loin de la jonction.

Q-1) Justifier que $\vec{E} = E(z)\,\vec{u}_z$.

Q-2) En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz dont une base est en $z < -e$, établir $E(z)$ pour $|z| < e$.

Q-3) Calculer la tension $V(e) - V(-e)$, appelée tension de diffusion. Application : $\rho_0 = 1{,}6 \times 10^3\,\mathrm{C\cdot m^{-3}}$ (soit $10^{22}\,\mathrm{ions\cdot m^{-3}}$), $e = 0{,}3\,\mu\mathrm{m}$, ε_0 remplacé par $\varepsilon = 12\varepsilon_0$ dans le silicium.

Correction

Q-1) Invariance par translation selon x et y ; tout plan contenant M et $\vec{u}_z$ est plan de symétrie.

Q-2) Cylindre de section S, de base inférieure en $z_1 < -e$ (où $E = 0$) et supérieure en z : seule la base supérieure contribue, $\Phi = E(z)S$. Pour $-e < z < 0$: $Q_{\text{int}} = -\rho_0 S(z + e)$; pour $0 < z < e$: $Q_{\text{int}} = -\rho_0 Se + \rho_0 Sz$. Dans les deux cas :

$$E(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\,(e - |z|)\,.$$

Le champ est dirigé de la zone n vers la zone p, maximal en norme à la jonction.

Q-3) $V(e) - V(-e) = -\int_{-e}^{e} E\,\mathrm{d}z = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \times e^2$ (aire d'un triangle de base $2e$ et de hauteur $\frac{\rho_0 e}{\varepsilon_0}$). Avec $\varepsilon = 12\varepsilon_0$: $\Delta V = \frac{\rho_0 e^2}{\varepsilon} = 1{,}4\,\mathrm{V}$, de l'ordre de grandeur du volt observé pour les diodes au silicium.

EXERCICE 14 Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

★★★☆☆

Dans le modèle de J. J. Thomson (1904), l'atome d'hydrogène est une boule de rayon a uniformément chargée de charge totale $+e$, dans laquelle se déplace l'électron, ponctuel, de masse m.

Q-1) Montrer que l'électron, à la distance $r < a$ du centre, subit une force de rappel élastique $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM}$. Exprimer k.

Q-2) En déduire la pulsation ω_0 des oscillations de l'électron, puis la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ du rayonnement émis. Application : $a = 53\,\text{pm}$, $m = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg}$.

Q-3) Calculer l'énergie d'ionisation (énergie à fournir pour amener l'électron du centre à l'infini) en eV. Comparer à la valeur mesurée $13{,}6\,\text{eV}$ et à la raie $121\,\text{nm}$ de l'hydrogène.

Correction

Q-1) $\vec{F} = -e\vec{E} = -e\,\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\overrightarrow{OM}$, d'où $k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$.

Q-2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}} = 4{,}1 \times 10^{16}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\lambda_0 = 46\,\text{nm}$ (ultraviolet).

Q-3) Le potentiel au centre de la boule vaut $V(0) = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 a}$; l'énergie potentielle de l'électron au centre est $-eV(0)$, d'où $E_i = \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = 6{,}5 \times 10^{-18}\,\text{J} = 41\,\text{eV}$. Les ordres de grandeur sont corrects (domaine UV, quelques dizaines d'eV), mais le modèle ne rend pas compte des spectres de raies : il sera abandonné après l'expérience de Rutherford (classique ci-dessous) au profit du modèle nucléaire.

EXERCICE 15 Cadre carré chargé

★★★☆☆

Un cadre carré de côté $2L$, de centre O, d'axe Oz, est formé de quatre segments portant la densité linéique uniforme λ. On cherche le champ en un point M de l'axe, de cote $z > 0$.

Q-1) Justifier que $\vec{E}(M) = E_z\,\vec{u}_z$.

Q-2) À l'aide du champ d'un fil de longueur finie, montrer qu'un côté crée en M un champ de norme $\frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0\, d\sqrt{d^2+L^2}}$, avec $d = \sqrt{z^2+L^2}$, dirigé selon la perpendiculaire au côté issue de M.

Q-3) En déduire $E_z(z)$, puis vérifier le comportement pour $z \gg L$.

Correction

Q-1) Les deux plans contenant l'axe et parallèles aux côtés, ainsi que les deux plans diagonaux, sont des plans de symétrie contenant M : leur intersection est l'axe Oz.

Q-2) Le point M est sur le plan médiateur du côté, à la distance $d = \sqrt{z^2+L^2}$ de celui-ci : $\alpha_2 = -\alpha_1$ avec $\sin\alpha_2 = \frac{L}{\sqrt{d^2+L^2}}$, d'où $E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}\,2\sin\alpha_2 = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0\, d\sqrt{d^2+L^2}}$, la composante parallèle au côté étant nulle.

Q-3) Seule la composante axiale de chaque contribution subsiste ; elle vaut $E\,\frac{z}{d}$. Pour les quatre côtés :

$$E_z = \frac{2\lambda L z}{\pi\varepsilon_0\,(z^2+L^2)\sqrt{z^2+2L^2}}.$$

Pour $z \gg L$, $E_z \approx \frac{2\lambda L}{\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$ avec $Q = 8\lambda L$ la charge totale : de loin, le cadre se comporte comme une charge ponctuelle. En $z = 0$, $E_z = 0$ comme au centre du disque.

EXERCICE 16 Lame métallique dans un condensateur plan

★★★☆☆

Deux plans parallèles distants de d portent les densités $+\sigma$ (plan $z = d$) et $-\sigma$ (plan $z = 0$) ; on néglige les effets de bord. On glisse entre eux, parallèlement, une plaque métallique d'épaisseur $e < d$, dans laquelle le champ est nul à l'équilibre.

Q-1) Expliquer pourquoi des charges apparaissent sur les faces de la plaque. Préciser leur signe.

Q-2) Sachant que la plaque est neutre, déterminer par superposition les densités surfaciques σ_h (face haute) et σ_b (face basse), puis vérifier le résultat par le théorème de Gauss.

Q-3) Calculer la tension entre les armatures puis la capacité par unité de surface. Conclure.

Correction

Q-1) Le champ $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, dirigé vers les z décroissants, met en mouvement les électrons libres du métal vers le haut : la face haute (en regard de $+\sigma$) se charge négativement, la face basse positivement, jusqu'à annulation du champ intérieur.

Q-2) La plaque est neutre : $\sigma_b = -\sigma_h$. En un point du métal, le champ est la superposition des champs de quatre plans : les armatures donnent $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$, la face haute $-\frac{\sigma_h}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ et la face basse $+\frac{\sigma_b}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$. Le champ total est nul si $\sigma_h = -\sigma$, d'où $\sigma_b = +\sigma$. Le théorème de Gauss, appliqué à un cylindre d'axe Oz dont une base est dans le métal et l'autre dans l'intervalle supérieur, donne alors $E_z S = \frac{\sigma_h S}{\varepsilon_0}$, soit $E_z = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$: le champ entre la plaque et l'armature est inchangé.

Q-3) Dans les deux intervalles vides, le champ vaut toujours $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$; dans la plaque, il est nul. Donc $U = \frac{\sigma(d-e)}{\varepsilon_0}$ et $\frac{C}{S} = \frac{\varepsilon_0}{d-e} > \frac{\varepsilon_0}{d}$: la plaque augmente la capacité, comme si l'on rapprochait les armatures de son épaisseur.

IX Classiques des concours

EXERCICE 17 L'expérience de Rutherford

★★★★☆

En 1909, Geiger et Marsden bombardent une mince feuille d'or avec des particules α (charge $2e$, masse $m = 6{,}64 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) d'énergie cinétique $E_c = 5{,}3\,\mathrm{MeV}$. Le noyau d'or (charge Ze, $Z = 79$) est supposé fixe en O ; on néglige les électrons.

Q-1) Exprimer l'énergie potentielle d'interaction de la particule α avec le noyau. La force est-elle conservative ?

Q-2) Choc frontal : établir la distance minimale d'approche $d_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E_c}$. Application numérique ; comparer au rayon de l'atome $(0{,}1\,\mathrm{nm})$.

Q-3) La particule arrive de l'infini avec la vitesse v_0 et le paramètre d'impact b (distance entre O et la droite d'incidence). Justifier la conservation de la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ (le moment cinétique est conservé pour une force centrale) et montrer qu'au point le plus proche, à la distance r_m, $v_0 b = v_m r_m$.

Q-4) En déduire $r_m^2 - d_0 r_m - b^2 = 0$, puis r_m pour $b = d_0$.

Q-5) On admet que l'angle de déviation θ vérifie $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{d_0}{2b}$. Calculer θ pour $b = d_0$, puis le paramètre d'impact b_{90} conduisant à une déviation de $90°$.

Q-6) La feuille d'or a une épaisseur $\ell = 0{,}4\,\mu\mathrm{m}$ et contient $n = 5{,}9 \times 10^{28}\,\mathrm{atomes \cdot m^{-3}}$. Une particule est déviée de plus de $90°$ si elle passe à moins de b_{90} d'un noyau. Estimer la fraction f des particules déviées de plus de $90°$. Conclure sur la structure de l'atome.

Correction

Q-1) $E_p = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (avec $E_p \to 0$ à l'infini) ; la force de Coulomb dérive de cette énergie potentielle : elle est conservative.

Q-2) Au point de rebroussement, la vitesse est nulle : $E_c = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d_0}$, d'où $d_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E_c} = 43\,\text{fm}$ (avec $E_c = 8{,}5\times10^{-13}\,\text{J}$), environ 2000 fois plus petit que l'atome : la charge positive est concentrée dans un noyau minuscule.

Q-3) La force est centrale (dirigée vers O) : son moment en O est nul et le moment cinétique $\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}$ est constant (chapitre M7), de norme $mr^2|\dot\theta|$. À l'infini, $L_O = mv_0 b$; en r_m, la vitesse est orthoradiale : $L_O = mv_m r_m$.

Q-4) Énergie : $\frac12 mv_0^2 = \frac12 mv_m^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_m}$. En divisant par E_c et avec $v_m = v_0 b/r_m$: $1 = \frac{b^2}{r_m^2} + \frac{d_0}{r_m}$, soit $r_m^2 - d_0 r_m - b^2 = 0$ et

$$r_m = \frac{d_0 + \sqrt{d_0^2 + 4b^2}}{2} = \frac{1+\sqrt5}{2}\,d_0 = 69\,\text{fm} \quad \text{pour } b = d_0.$$

Q-5) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac12$ donne $\theta = 53°$. Pour $\theta = 90°$: $b_{90} = \frac{d_0}{2} = 21\,\text{fm}$.

Q-6) Chaque noyau présente une « cible » de surface πb_{90}^2. Dans une épaisseur ℓ, par unité de surface, il y a $n\ell$ noyaux, d'où $f = n\ell\,\pi b_{90}^2 = 5{,}9\times10^{28}\times4\times10^{-7}\times\pi\times(2{,}15\times10^{-14})^2 \approx 3\times10^{-5}$. Quelques particules sur cent mille rebondissent : c'est incompatible avec le modèle de Thomson (champ trop faible, voir l'exercice d'approfondissement) et cela prouve l'existence d'un noyau quasi ponctuel portant toute la charge positive.

EXERCICE 18 Champ de gravitation à l'intérieur de la Terre ✦✦✦✦✧

On assimile la Terre à une boule de rayon $R = 6370\,\text{km}$, de masse M, à symétrie sphérique. On donne $G = 6{,}67\times10^{-11}\,\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ et $g_0 = 9{,}82\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ en surface.

Q-1) Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel. En déduire le champ $\vec{\mathcal{G}}$ à l'extérieur de la Terre, puis la masse volumique moyenne ρ_m.

Q-2) Dans le modèle d'une Terre homogène, établir $\mathcal{G}(r)$ pour $r < R$.

Q-3) On perce un tunnel rectiligne, sans frottement, passant par le centre. Montrer qu'un objet lâché à l'entrée effectue des oscillations harmoniques ; calculer la durée d'un aller simple.

Q-4) Modèle à deux couches : un noyau de rayon $R_N = 3480\,\text{km}$ et de masse volumique $\rho_N = 1{,}1\times10^4\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, entouré d'un manteau homogène de masse volumique ρ_M. Déterminer ρ_M en conservant la masse totale, puis $\mathcal{G}$ à la surface du noyau. Commenter.

Q-5) Calculer la vitesse de libération à la surface de la Terre.

Correction

Q-1) $\oiint \vec{\mathcal{G}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$. Par symétrie, $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\vec{u}_r$; pour $r \geq R$, $\mathcal{G} = -\frac{GM}{r^2}$. Avec $g_0 = \frac{GM}{R^2}$ et $M = \frac43\pi R^3\rho_m$: $\rho_m = \frac{3g_0}{4\pi GR} = 5{,}5\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, nettement plus que la masse volumique des roches de surface ($\approx 2{,}8\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) : l'intérieur de la Terre est plus dense.

Q-2) $4\pi r^2\mathcal{G}(r) = -4\pi G\rho_m\frac43\pi r^3$, d'où $\vec{\mathcal{G}} = -\frac{g_0}{R}\,r\,\vec{u}_r$: le champ croît linéairement jusqu'à la surface (même résultat que la boule chargée).

Q-3) Dans le tunnel, selon l'axe Ox du tunnel : $m\ddot{x} = -\frac{mg_0}{R}x$ (la composante perpendiculaire est compensée par la réaction des parois). C'est un oscillateur harmonique de période $T = 2\pi\sqrt{R/g_0} = 84\,\text{min}$: l'aller simple dure $42\,\text{min}$, quelle que soit la corde choisie.

Q-4) Conservation de la masse : $\rho_m R^3 = \rho_N R_N^3 + \rho_M(R^3 - R_N^3)$. Avec $(R_N/R)^3 = 0,163$: $\rho_M = \frac{5,5\times10^3 - 0,163\times1,1\times10^4}{0,837} \approx 4,5\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. À la surface du noyau, $\mathcal{G} = \frac{4}{3}\pi G\rho_N R_N = 10,7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: le champ est plus intense qu'en surface. Dans ce modèle plus réaliste, $\mathcal{G}$ croît d'abord en descendant dans le manteau, contrairement au modèle homogène.

Q-5) $\frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{GMm}{R} = 0$ donne $v_\ell = \sqrt{2g_0R} = 11,2\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.