LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

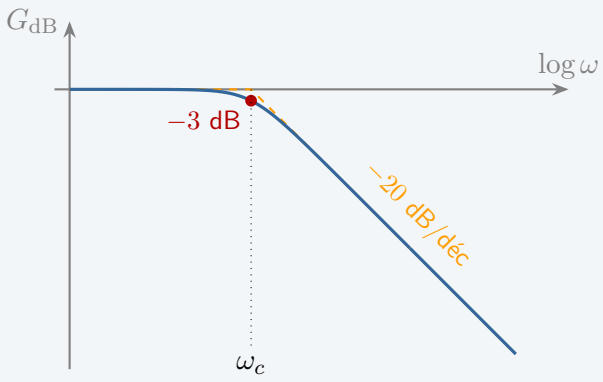
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

FICHE RÉSUMÉ

E5 ÉLECTRONIQUE

Filtrage linéaire

Spectre d'un signal périodique — Fonction de transfert et diagramme de Bode — Filtres du premier et du second ordre — Moyenneur, intégrateur, dérivateur — Mise en cascade



> *L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.*
>
> — Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Filtres et diagramme de Bode »

E5 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Tout signal périodique est la somme d'une composante continue, d'un fondamental et d'harmoniques (**série de Fourier**). Un filtre linéaire agit sur chaque composante séparément : il la multiplie par le gain $|\underline{H}(\mathrm{j}n\omega)|$ et la déphase de $\arg \underline{H}(\mathrm{j}n\omega)$; la **fonction de transfert** et son **diagramme de Bode** résument donc entièrement son action. On prévoit la nature d'un filtre par les comportements limites de L et C, on établit $\underline{H}$ sous forme canonique, puis on trace les asymptotes ($\pm 20n$ dB/décade).

I Signaux périodiques et spectre

Décomposition en série de Fourier R

Un signal $s(t)$ de période T (pulsation $\omega = 2\pi/T$) s'écrit

$$s(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) = S_0 + \sum_{n\geq 1} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec $S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq 0$, $a_0 = S_0 = \langle s \rangle$ (**composante continue**), $a_n = 2\langle s(t)\cos n\omega t\rangle$, $b_n = 2\langle s(t)\sin n\omega t\rangle$. Le terme $n = 1$ est le **fondamental** (allure générale du signal), les termes $n \geq 2$ les **harmoniques** (détails, fronts raides, discontinuités). Le **spectre** représente les S_n en fonction de nf.

Valeur efficace : relation de Parseval R D

$$S_{\text{eff}}^2 = \langle s^2 \rangle = S_0^2 + \sum_{n\geq 1} \frac{S_n^2}{2}$$

Les produits croisés ont une moyenne nulle. Signal pair : $b_n = 0$; impair : $a_0 = a_n = 0$. Créneau $\pm E$: $s = \dfrac{4E}{\pi} \sum_{p\geq 0} \dfrac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$ (harmoniques impairs, amplitudes en $1/n$; triangle : en $1/n^2$) ; le fondamental porte $8/\pi^2 \approx 81\,\%$ de la puissance.

II Fonction de transfert et diagramme de Bode

Définition — Fonction de transfert, gain, bande passante R

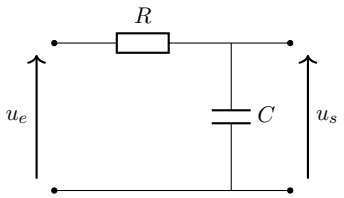
- Filtre = quadripôle linéaire. En régime sinusoïdal forcé et **sortie ouverte** : $\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{\underline{S}_m}{\underline{E}_m}}$, $G = |\underline{H}| = S_m/E_m$, $\varphi = \arg \underline{H} = \varphi_s - \varphi_e$. Rapport de deux polynômes en $\mathrm{j}\omega$; **ordre** = degré du dénominateur ($\geq$ celui du numérateur).
- Gain en décibels : $\boxed{G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}|}$. **Diagramme de Bode** : G_{dB} et φ en fonction de $\log \omega$; asymptotes de pentes multiples de 20 dB/décade.

- **Bande passante** à -3 dB : $|\underline{H}| \geq H_{\max}/\sqrt{2}$, soit $G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB,max}} - 3$ dB ; ses bornes sont les pulsations de **coupure**.
- Passage à l'équation différentielle : produit en croix puis $\mathrm{j}\omega \to \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Ex. $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_c} \Leftrightarrow s + \dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = H_0 e$.

G_{dB}	$+40$	$+20$	0	-1	-3	-10	-20	-40
$\lvert\underline{H}\rvert$	100	10	1	$0{,}9$	$1/\sqrt{2} \approx 0{,}7$	$\approx 0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}01$

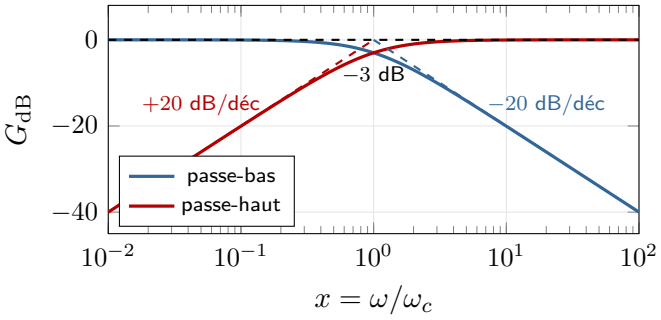
Gains en dB de filtres en cascade (sans interaction) : ils s'ajoutent, ainsi que les phases.

III Filtres du premier ordre



Passe-bas RC (passe-haut : permuter R et C)

BF : C ouvert, $u_s = u_e$; HF : C fil, $u_s = 0$.

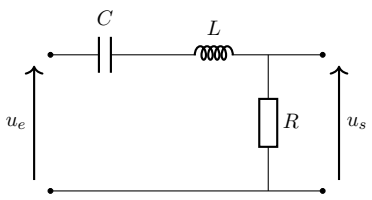


Passe-bas et passe-haut du premier ordre R D

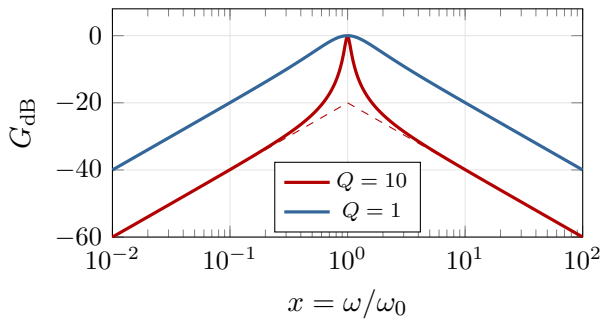
passe-bas : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}x}$ passe-haut : $\underline{H} = H_0\dfrac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x} = \dfrac{H_0}{1-\mathrm{j}/x}$ $x = \dfrac{\omega}{\omega_c}$, $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$

- Passe-bas : $G_{\text{dB}} = 20\log H_0 - 10\log(1+x^2)$; asymptotes 0 (BF) et $-20\log x$ (pente -20 dB/déc) se coupant en $x = 1$; -3 dB en ω_c ; $\varphi = -\arctan x$ de 0 à $-\pi/2$, $-\pi/4$ en ω_c.
- Passe-haut : pente $+20$ dB/déc en BF, 0 en HF ; $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ de $+\pi/2$ à 0.

IV Filtres du second ordre



RLC série : sortie sur $R \to$ passe-bande ; sur $C \to$ passe-bas ; sur $L \to$ passe-haut ; sur $LC \to$ coupe-bande.



Passe-bande : asymptotes ± 20 dB/déc se coupant à $-20\log Q$.

Passe-bande et passe-bas du second ordre R D

passe-bande : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ passe-bas : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$

- Passe-bande : gain maximal H_0 en $x = 1$ ($\varphi = 0$) ; φ de $+\pi/2$ à $-\pi/2$; coupures $x_{1,2} = \mp\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$; $\boxed{\Delta\omega = \omega_0/Q}$: la **sélectivité** croît avec Q.
- Passe-bas : 0 en BF, pente -40 dB/déc en HF, φ de 0 à $-\pi$ ($-\pi/2$ en ω_0) ; $G(\omega_0) = QH_0$; résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$; $Q = 1/\sqrt{2}$: réponse la plus plate (Butterworth), $\omega_c = \omega_0$.

V Action d'un filtre sur un signal

Réponse à un signal périodique R

Par linéarité (superposition), si $e(t) = E_0 + \sum_n E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$:

$$s(t) = \underline{H}(0)\, E_0 + \sum_{n \geq 1} \left|\underline{H}(\mathrm{j}n\omega)\right| E_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\mathrm{j}n\omega)\right)$$

Le spectre de sortie est **inclus** dans celui d'entrée : les composantes de la bande passante sont conservées, les autres atténuées. Une fréquence nouvelle en sortie révèle une **non-linéarité**.

Comportement	Condition	Effet
Moyenneur	passe-bas avec $f_c \ll f$ (fondamental)	$s \approx H_0\langle e\rangle$: ne garde que la composante continue
Intégrateur	pente -20 dB/déc et $\varphi = -\pi/2$ (passe-bas d'ordre 1, $\omega \gg \omega_c$) : $\underline{H} \approx H_0\omega_c/\mathrm{j}\omega$	$s \approx H_0\omega_c \int e\,\mathrm{d}t$ (signal de moyenne nulle) : créneau $\to$ triangle
Dérivateur	pente $+20$ dB/déc et $\varphi = +\pi/2$ (passe-haut d'ordre 1, $\omega \ll \omega_c$) : $\underline{H} \approx \mathrm{j}\omega H_0/\omega_c$	$s \approx \frac{H_0}{\omega_c}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$: triangle $\to$ créneau
Passe-haut	f_c entre 0 et f	supprime la composante continue, transmet les discontinuités
Passe-bande sélectif	Q élevé, $\omega_0 = n\omega$	isole un harmonique (sinusoïde de fréquence nf)

Mise en cascade, impédances d'entrée et de sortie R D

Vu de sa sortie, un filtre est un générateur de Thévenin $(\underline{HE}, \underline{Z}_s)$; vu de son entrée, une impédance $\underline{Z}_e$. Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{H}_1\underline{H}_2}{1 + \underline{Z}_{s1}/\underline{Z}_{e2}} \approx \underline{H}_1\underline{H}_2 \quad \text{si} \quad |\underline{Z}_{s1}| \ll |\underline{Z}_{e2}|$$

Il faut une **faible impédance de sortie** et une **forte impédance d'entrée** ; sinon on intercale un **suiveur** à ALI (E6). **Gabarit** : zones interdites du diagramme de gain ; plus la transition est étroite, plus l'ordre n doit être élevé (pente $-20n$ dB/déc).

★ À retenir

Filtre	Forme canonique	BF / HF (dB/déc)	Comportement remarquable
Passe-bas ordre 1	$\dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}x}$	$0\ /\ -20$	intégrateur en HF
Passe-haut ordre 1	$H_0\dfrac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$	$+20\ /\ 0$	dérivateur en BF
Passe-bas ordre 2	$\dfrac{H_0}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	$0\ /\ -40$	résonance si $Q>1/\sqrt{2}$
Passe-haut ordre 2	$\dfrac{-H_0x^2}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	$+40\ /\ 0$	résonance si $Q>1/\sqrt{2}$
Passe-bande ordre 2	$\dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}Q(x-\frac{1}{x})}=\dfrac{\mathrm{j}\frac{x}{Q}H_0}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	$+20\ /\ -20$	$\Delta\omega=\omega_0/Q$
Coupe-bande ordre 2	$H_0\dfrac{1-x^2}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	$0\ /\ 0$	transmission nulle en $x=1$

Ordres de grandeur

Filtre RC avec $R=1\,\mathrm{k\Omega}$, $C=100\,\mathrm{nF}$: $f_c=1/(2\pi RC)\approx 1{,}6\,\mathrm{kHz}$. Ronflement du secteur à $50\,\mathrm{Hz}$; domaine audible : $20\,\mathrm{Hz}$ à $20\,\mathrm{kHz}$. Durée Δt d'un signal et largeur Δf de son spectre : $\Delta t\cdot\Delta f\sim 1$.

VI Méthodes et pièges

☞ Méthode — Étudier un filtre M

1. **Nature** : comportements limites de L et C (condensateur : ouvert en BF, fil en HF ; bobine : l'inverse) $\Rightarrow$ s nul ou non en BF et en HF.
2. **Fonction de transfert** en sortie ouverte : diviseur de tension ou loi des nœuds en potentiels ; forme canonique en faisant apparaître des « 1 » ; identifier H_0, ω_c ou ω_0 et Q.
3. **Bode** : équivalents BF et HF $\Rightarrow$ asymptotes ; valeur exacte en ω_c ou ω_0 ; allure réelle. Pour un $\underline{H}$ quelconque, factoriser : les gains en dB et les phases des facteurs s'additionnent.
4. **Action sur un signal** : traiter séparément composante continue et chaque harmonique.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\underline{H}$ est établie en **sortie ouverte** : elle change si l'on charge le filtre ; on ne multiplie pas les $\underline{H}$ de filtres passifs en cascade.
- Un passe-bas avec $f_c \ll f$ est un **moyenneur** : il conserve la composante continue (pas le fondamental).
- Ne pas confondre pulsation propre ω_0 et pulsation de coupure d'un passe-bas d'ordre 2 (égales seulement si $Q=1/\sqrt{2}$).
- Ne pas oublier la composante continue, transmise avec le gain $\underline{H}(0)$ (nul pour un passe-haut ou un passe-bande).
- Intégrateur et dérivateur ne le sont que dans un domaine de fréquences, au prix d'une forte atténuation.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais décomposer un signal périodique (continu, fondamental, harmoniques) et utiliser Parseval.
- ☐ Je sais définir $\underline{H}$, G_{dB}, φ, la bande passante, et passer de $\underline{H}$ à l'équation différentielle.
- ☐ Je prévois la nature d'un filtre par ses comportements limites avant tout calcul.
- ☐ Je connais les formes canoniques des filtres d'ordre 1 et 2 et je trace leurs diagrammes de Bode asymptotiques.
- ☐ Je sais prévoir le signal de sortie pour une entrée périodique dont le spectre est donné.
- ☐ Je reconnais les comportements moyenneur, intégrateur, dérivateur.
- ☐ Je sais justifier le rôle des impédances d'entrée et de sortie dans une mise en cascade.