LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

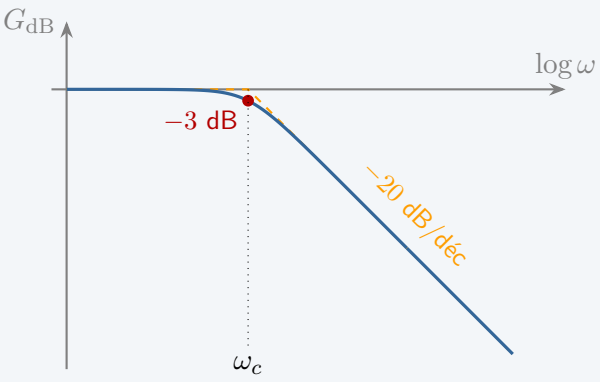
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

E5

ÉLECTRONIQUE

Filtrage linéaire

Spectre d'un signal périodique — Fonction de transfert et diagramme de Bode — Filtres du premier et du second ordre — Moyenneur, intégrateur, dérivateur — Mise en cascade



« *L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.*

— Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur* (1822)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Filtres et diagramme de Bode »

E5 — Filtrage linéaire

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Décomposer un signal périodique en composante continue, fondamental et harmoniques ; relier valeur efficace et spectre (Parseval).
- Définir la fonction de transfert d'un filtre, le gain en décibels, le déphasage et la bande passante ; passer de $\underline{H}$ à l'équation différentielle.
- Prévoir la nature d'un filtre par ses comportements limites, établir sa fonction de transfert canonique et tracer son diagramme de Bode.
- Connaître les filtres du premier ordre et du second ordre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande).
- Prévoir l'action d'un filtre sur un signal périodique ; reconnaître les comportements moyenneur, intégrateur et dérivateur.
- Tenir compte des impédances d'entrée et de sortie lors d'une mise en cascade ; exploiter un gabarit.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Filtres et diagramme de Bode » permet de choisir un filtre, de faire varier ses paramètres et d'observer en direct son diagramme de Bode et son action sur un signal d'entrée.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

Introduction . . . 3
I Signaux périodiques et spectre . . . 3
I.1 Décomposition de Fourier . . . 3
I.2 Valeur moyenne et valeur efficace . . . 4
II Filtre linéaire et fonction de transfert . . . 5
II.1 Quadripôle et fonction de transfert . . . 5
II.2 Gain en décibels et diagramme de Bode . . . 5
III Filtres du premier ordre . . . 6
III.1 Passe-bas du premier ordre . . . 6
III.2 Passe-haut du premier ordre . . . 7
IV Filtres du second ordre . . . 9
IV.1 Passe-bande : RLC série, sortie sur R . . . 9
IV.2 Passe-bas du second ordre : RLC série, sortie sur C . . . 9
IV.3 Passe-haut et coupe-bande du second ordre . . . 10
V Action d'un filtre sur un signal . . . 11
V.1 Point de vue fréquentiel . . . 11
V.2 Moyenneur, intégrateur, dérivateur . . . 12
VI Association de filtres . . . 14
VI.1 Influence de la charge, impédances d'entrée et de sortie . . . 14
VI.2 Gabarit . . . 14
VII Synthèse . . . 15
VIII Exercices d'approfondissement . . . 15
IX Classiques des concours . . . 17

Introduction

Le **filtrage** consiste à sélectionner la partie utile d'un signal : transmettre certaines fréquences et en atténuer d'autres, éliminer un bruit ou le ronflement à $50\,\mathrm{Hz}$ du secteur, extraire une station radio, séparer les graves et les aigus d'un haut-parleur. Comme tout signal périodique est une somme de sinusoïdes, et qu'un filtre linéaire traite chacune d'elles séparément, l'étude du régime sinusoïdal forcé (**E4**) suffit à prévoir l'action d'un filtre sur n'importe quel signal. L'outil central est la **fonction de transfert**, représentée par le **diagramme de Bode**.

I Signaux périodiques et spectre

I.1 Décomposition de Fourier

Décomposition en série de Fourier R

Tout signal périodique $y(t)$ de fréquence f (pulsation $\omega = 2\pi f$) s'écrit comme la somme d'une composante continue et de sinusoïdes de fréquences multiples de f :

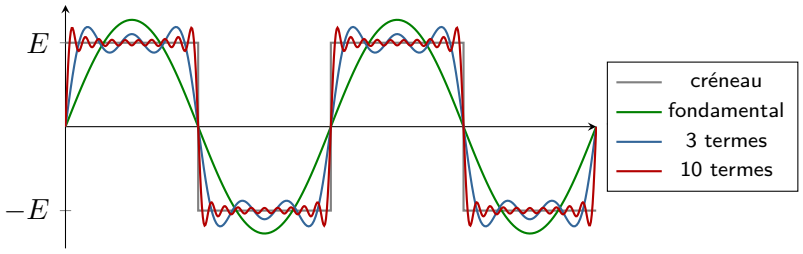
$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \qquad (Y_n \geq 0)$$

Y_0 est la **composante continue** ; le terme $n = 1$ est le **fondamental** ; les termes $n \geq 2$ sont les **harmoniques** de rang n. Le **spectre** d'amplitude est la représentation des Y_n en fonction de la fréquence nf.

Exemple : le créneau. Un créneau symétrique d'amplitude E (valant alternativement $+E$ et $-E$) n'a ni composante continue ni harmoniques de rang pair :

$$y(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \cdots\right) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\sin\big((2p+1)\omega t\big)}{2p+1}.$$

Les amplitudes décroissent en $1/n$. Pour un signal triangulaire, elles décroissent en $1/n^2$: plus un signal est « lisse », plus son spectre décroît vite.



Remarque

Les premiers termes donnent l'**allure générale** du signal ; les harmoniques de rang élevé codent ses **variations rapides** : fronts raides, discontinuités, bruit. Couper les hautes fréquences arrondit donc un signal ; couper les basses fréquences n'en laisse subsister que les variations brusques.

I.2 Valeur moyenne et valeur efficace

Valeurs moyenne et efficace R

- La valeur moyenne $\langle y \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à la composante continue Y_0 (chaque sinusoïde a une moyenne nulle).
- La valeur efficace $Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle}$ vérifie la **relation de Parseval** :

$$Y_{\text{eff}}^2 = Y_0^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{Y_n^2}{2}$$

Justification. En développant y^2, les produits croisés $\cos(n\omega t + \varphi_n)\cos(m\omega t + \varphi_m)$ avec $n \neq m$ se linéarisent en cosinus de pulsations non nulles, de moyenne nulle ; il ne reste que Y_0^2 et les moyennes $\langle Y_n^2 \cos^2 \rangle = Y_n^2/2$.

> **Remarque**
>
> La valeur efficace est liée à la puissance (**E4**) : la puissance moyenne dissipée par un résistor alimenté par un signal périodique est la somme des puissances apportées par chaque harmonique. C'est pourquoi on caractérise les tensions du secteur par leur valeur efficace.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Valeur efficace d'un créneau ✦✦✧✧✧

Q-1) Calculer directement la valeur moyenne et la valeur efficace d'un créneau symétrique d'amplitude E.

Q-2) Vérifier la relation de Parseval à l'aide de son spectre, sachant que $\sum_{p \geq 0} \dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Q-3) Quelle fraction de la puissance est portée par le fondamental ?

Q-4) Un créneau varie entre 0 et E. Donner sa composante continue et sa valeur efficace.

Correction

Q-1) $\langle y \rangle = 0$; $y^2 = E^2$ à chaque instant, donc $Y_{\text{eff}} = E$.

Q-2) $\displaystyle\sum \frac{Y_n^2}{2} = \frac{8E^2}{\pi^2}\sum_p \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{8E^2}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{8} = E^2$: la relation est vérifiée.

Q-3) $\dfrac{Y_1^2/2}{E^2} = \dfrac{8}{\pi^2} \approx 81\,\%$: le fondamental porte l'essentiel de la puissance.

Q-4) $Y_0 = E/2$ et $Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y^2 \rangle} = E/\sqrt{2}$ (le signal vaut E la moitié du temps).

II Filtre linéaire et fonction de transfert

II.1 Quadripôle et fonction de transfert

Définition — Quadripôle, filtre

Un **quadripôle** est un réseau relié à l'extérieur par deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Un **filtre linéaire** est un quadripôle dont l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il est **passif** s'il ne contient que des résistors, condensateurs et bobines, **actif** s'il contient des composants alimentés (ALI, **E6**).



Définition — Fonction de transfert R

En régime sinusoïdal forcé, la **fonction de transfert** du filtre est le rapport des amplitudes complexes de sortie et d'entrée, en **sortie ouverte** (aucun courant n'est prélevé en sortie) :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{S}_m}{\underline{E}_m} \qquad |\underline{H}| = \frac{S_m}{E_m} \qquad \arg \underline{H} = \varphi_s - \varphi_e$$

C'est un rapport de deux polynômes en $\mathrm{j}\omega$; l'**ordre** du filtre est le degré du dénominateur (supérieur ou égal à celui du numérateur pour un système physique).

☞ Méthode — Passer de la fonction de transfert à l'équation différentielle M

On écrit $\underline{H}$ sous forme d'un quotient de polynômes en $\mathrm{j}\omega$, on fait les produits en croix, puis on remplace chaque facteur $\mathrm{j}\omega$ par $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Par exemple, $\underline{H} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_c}$ donne $\underline{S} + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c}\underline{S} = \underline{E}$, soit $s + \dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = e$.

II.2 Gain en décibels et diagramme de Bode

Définition — Gain en décibels, diagramme de Bode R

Le **gain en décibels** est $G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}|$ ($\log$: logarithme décimal), soit $|\underline{H}| = 10^{G_{\mathrm{dB}}/20}$. Le **diagramme de Bode** est formé de deux courbes tracées en fonction de $\log\omega$ (échelle logarithmique) : le gain G_{dB} et la phase $\varphi = \arg\underline{H}$. Une **décade** correspond à un facteur 10 sur la pulsation ; les asymptotes ont des pentes multiples de 20 dB par décade.

Ordres de grandeur

G_{dB}	$+40$	$+20$	0	-1	-3	-10	-20	-40
$\lvert\underline{H}\rvert$	100	10	1	$0{,}9$	$1/\sqrt{2} \approx 0{,}7$	$\approx 0{,}3$	$0{,}1$	$0{,}01$

Une petite variation en décibels traduit une grande variation d'amplitude. Le gain en dB d'un produit de fonctions de transfert est la somme des gains en dB, et les phases s'ajoutent.

Définition — Pulsation de coupure, bande passante R

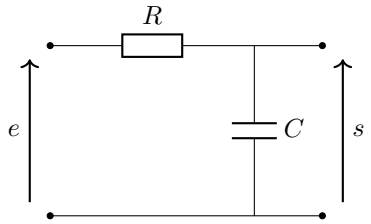
La **bande passante** à -3 dB est l'ensemble des pulsations pour lesquelles $|\underline{H}| \geq H_{\max}/\sqrt{2}$, soit $G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB,max}} - 3$ dB. Ses bornes sont les **pulsations de coupure**.

☞ Méthode — Étudier un filtre M

1. **Nature** : remplacer les composants par leurs comportements limites (condensateur : interrupteur ouvert en BF, fil en HF ; bobine : fil en BF, interrupteur ouvert en HF) et en déduire s en BF et en HF : passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande.
2. **Fonction de transfert** : pont diviseur (sortie ouverte) ou loi des nœuds en potentiels, puis mise sous forme canonique en faisant apparaître des « 1 ».
3. **Bode** : équivalents BF et HF de $\underline{H} \Rightarrow$ asymptotes ; valeur exacte en un point remarquable (ω_c ou ω_0) ; allure réelle. Il est rarement utile de calculer le module et l'argument en toute généralité.

III Filtres du premier ordre

III.1 Passe-bas du premier ordre



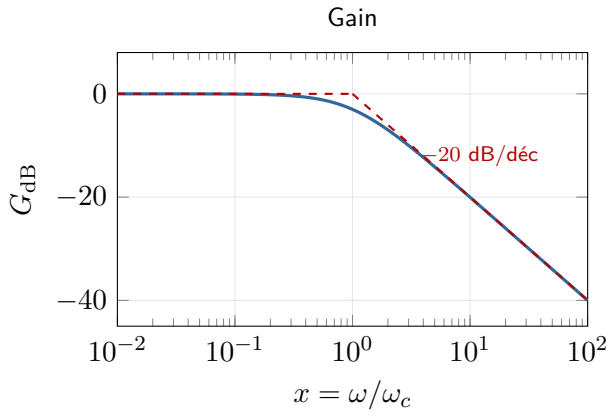
Analyse qualitative : en BF, C est un interrupteur ouvert et $s = e$; en HF, C est un fil et $s = 0$: c'est un passe-bas.

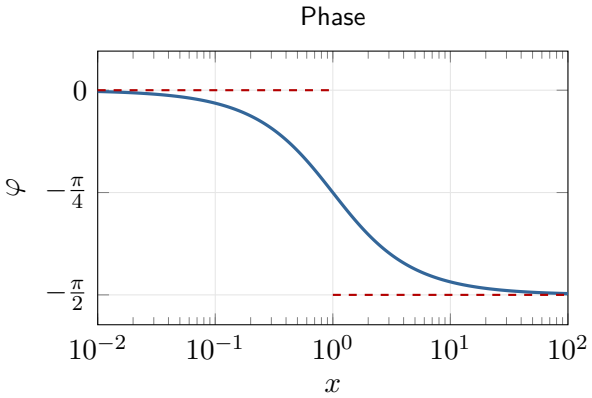
Diviseur de tension : $\underline{H} = \dfrac{1/(\mathrm{j}C\omega)}{R + 1/(\mathrm{j}C\omega)} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$.

Passe-bas du premier ordre R

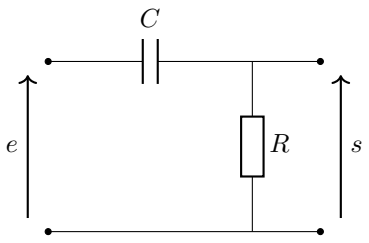
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}x} \qquad H_0 \text{ : gain statique ; ici } H_0 = 1,\ \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- BF ($x \ll 1$) : $G_{\text{dB}} \approx 20\log H_0$, asymptote horizontale ; $\varphi \to 0$.
- HF ($x \gg 1$) : $G_{\text{dB}} \approx 20\log H_0 - 20\log x$, asymptote de pente -20 dB/décade ; $\varphi \to -\pi/2$.
- En $x = 1$: $G_{\text{dB}} = 20\log H_0 - 3$ dB et $\varphi = -\pi/4$; la bande passante est $[0, \omega_c]$.



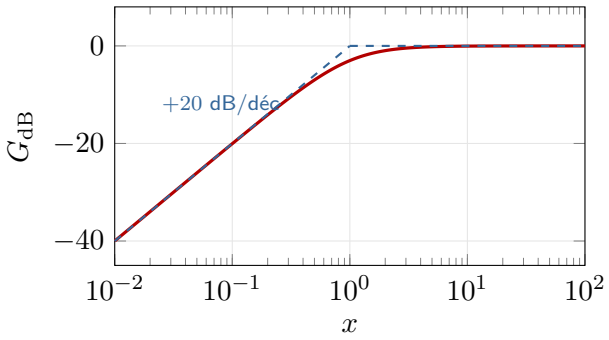


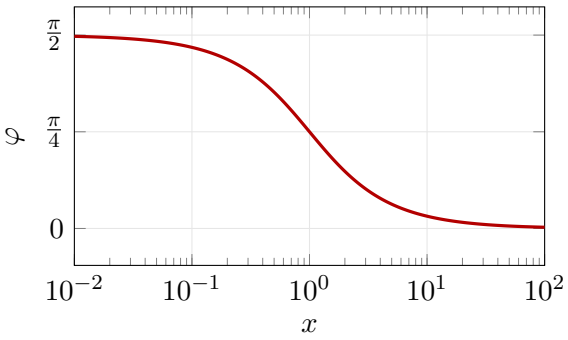
III.2 Passe-haut du premier ordre



$$\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = H_0 \frac{\mathrm{j}x}{1 + \mathrm{j}x}$$

- BF : pente $+20$ dB/décade, $\varphi \to +\pi/2$; HF : $G_{\mathrm{dB}} \to 20\log H_0$, $\varphi \to 0$.
- $\omega_c = 1/RC$; bande passante $[\omega_c, +\infty[$.
- $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$: la phase se déduit de celle du passe-bas par une translation de $\pi/2$.





☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 Décibels et premier ordre

✦✧✧✧✧

Q-1) Convertir en décibels les gains 10 ; $0{,}1$; $1/\sqrt{2}$; 2 ; $1/2$; 1000, puis en gain linéaire -40 dB ; $+6$ dB ; -60 dB.

Q-2) Une pente de -20 dB par décade correspond à combien de dB par octave (facteur 2 en fréquence) ?

Q-3) Un filtre RC passe-bas a $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$. Calculer f_c, puis le gain en dB et la phase à f_c, $10f_c$ et $f_c/10$.

Correction

Q-1) 20 ; -20 ; -3 ; 6 ; -6 ; 60 dB ; puis $0{,}01$; 2 ; $0{,}001$.

Q-2) $20\log 2 \approx 6\,\mathrm{dB}$ par octave.

Q-3) $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC} = 1{,}59\,\mathrm{kHz}$; à f_c : -3 dB et $-45°$; à $10f_c$: -20 dB et $-84°$; à $f_c/10$: $-0{,}04$ dB et $-5{,}7°$.

EXERCICE 3 — Exploiter un diagramme de Bode

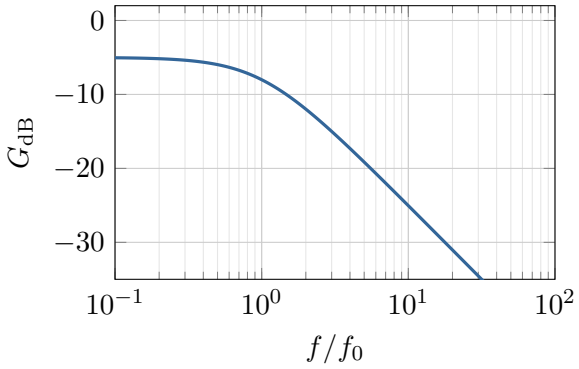
Un filtre a le diagramme de Bode en gain ci-contre, avec $f_0 = 2\,\text{Hz}$.

Q-1) Nature et ordre du filtre ? Valeur de H_0 ?

Q-2) Fréquence de coupure ?

Q-3) On envoie $e = U_m\cos(2\pi f_1 t) + U_m\cos(4\pi f_1 t)$ avec $f_1 = 8\,\text{Hz}$. Exprimer $s(t)$.

Q-4) On envoie une tension sinusoïdale variant entre 0 et $2E$, de fréquence $10\,\text{kHz}$. Décrire s.



Correction

Q-1) Gain constant en BF (-5 dB, soit $H_0 = 10^{-5/20} = 0{,}56$), pente -20 dB/déc en HF : passe-bas du premier ordre, $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \text{j}f/f_0}$.

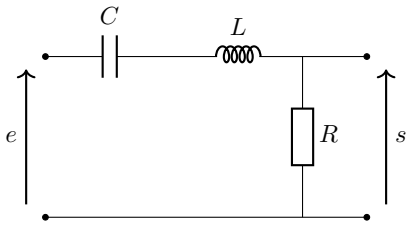
Q-2) $G_{\text{dB}} = -8$ dB pour $f = f_0$: $f_c = f_0 = 2\,\text{Hz}$.

Q-3) $f_1/f_0 = 4$: $G_1 = \dfrac{0{,}56}{\sqrt{17}} = 0{,}137$, $\varphi_1 = -\arctan 4 = -1{,}33\,\text{rad}$; $2f_1/f_0 = 8$: $G_2 = 0{,}070$, $\varphi_2 = -1{,}45\,\text{rad}$. Donc $s = 0{,}137\,U_m\cos(2\pi f_1 t - 1{,}33) + 0{,}070\,U_m\cos(4\pi f_1 t - 1{,}45)$.

Q-4) $e = E + E\cos\omega t$: la composante continue est transmise ($H_0 E$), la composante alternative ($f = 5000 f_0$) est atténuée d'un facteur 5000 environ : $s \approx H_0 E$, comportement moyenneur.

IV Filtres du second ordre

IV.1 Passe-bande : RLC série, sortie sur R



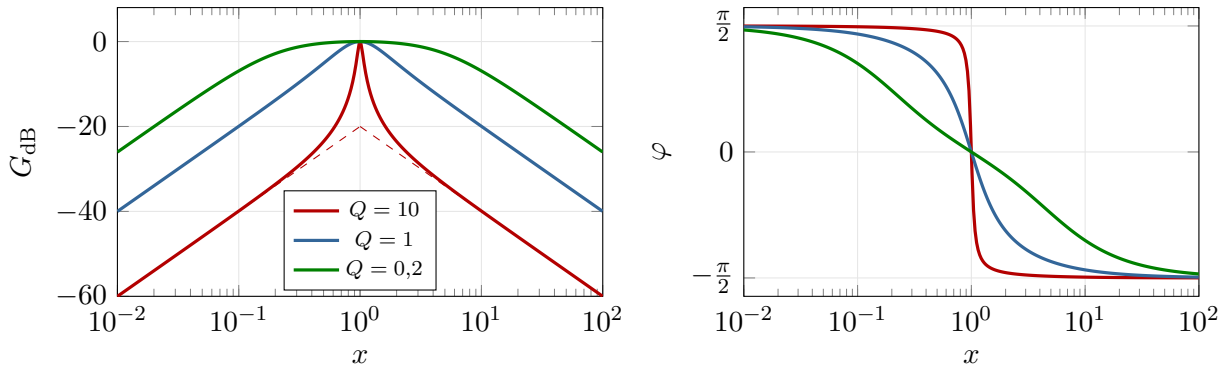
BF : C ouvert, $s = 0$; HF : L ouverte, $s = 0$: **passe-bande**.

$$\underline{H} = \frac{R}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $H_0 = 1$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$.

Passe-bande du second ordre R

- BF ($x \ll 1$) : $\underline{H} \approx \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}H_0$, pente $+20$ dB/déc, $\varphi \to +\pi/2$; HF : $\underline{H} \approx \dfrac{H_0}{\mathrm{j}Qx}$, pente -20 dB/déc, $\varphi \to -\pi/2$.
- Les asymptotes se coupent en $x = 1$ à $20\log H_0 - 20\log Q$; le gain réel y est maximal, égal à H_0, avec $\varphi = 0$.
- Bande passante $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$ (exactement) : la **sélectivité** augmente avec Q.



Remarque

Si $Q < 1$, le point d'intersection des asymptotes est au-dessus du maximum réel ; si $Q > 1$, il est au-dessous. Dans le premier cas, le filtre est dérivateur à très basse fréquence et intégrateur à très haute fréquence, sur une large plage.

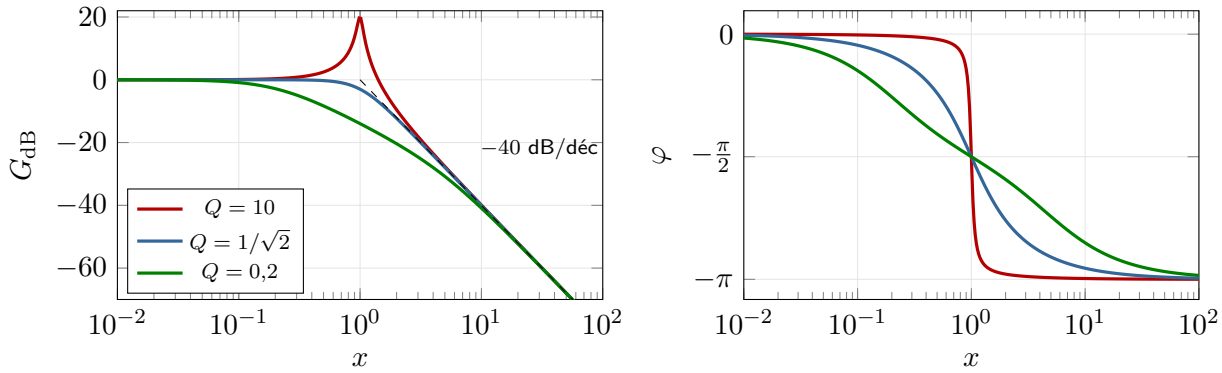
IV.2 Passe-bas du second ordre : RLC série, sortie sur C

Passe-bas du second ordre R

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$$

- BF : $G_{\mathrm{dB}} \to 20\log H_0$, $\varphi \to 0$; HF : $\underline{H} \approx -H_0/x^2$, pente -40 dB/décade, $\varphi \to -\pi$. Un signal HF est atténué beaucoup plus fortement qu'avec un premier ordre.
- En $x = 1$: $|\underline{H}| = QH_0$ et $\varphi = -\pi/2$. Le gain présente un maximum (résonance) si $Q > 1/\sqrt{2}$; cette résonance est généralement indésirable pour un passe-bas.

- Pour $Q = 1/\sqrt{2}$, la courbe de gain est la plus plate possible sans résonance (filtre de Butterworth) et $\omega_c = \omega_0$. En général, la pulsation de coupure dépend de Q.
- Pour $Q \ll 1$, le dénominateur se factorise approximativement en $(1+\mathrm{j}x/Q)(1+\mathrm{j}xQ)$: le diagramme asymptotique comporte une portion intermédiaire de pente -20 dB/décade entre $x = Q$ et $x = 1/Q$.



IV.3 Passe-haut et coupe-bande du second ordre

- **Passe-haut** (RLC série, sortie sur L) : $\underline{H} = \dfrac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + \mathrm{j}x/Q}$; pente $+40$ dB/décade en BF, gain H_0 en HF ; résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$, pour $x_r > 1$. Aux basses fréquences, $s \approx \dfrac{H_0}{\omega_0^2}\dfrac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2}$: il n'est pas dérivateur.
- **Coupe-bande** (réjecteur, RLC série, sortie sur l'ensemble LC) : $\underline{H} = H_0 \dfrac{1 - x^2}{1 - x^2 + \mathrm{j}x/Q}$; gain H_0 en BF et en HF, **transmission nulle** en $x = 1$; bande coupée de largeur $\Delta\omega = \omega_0/Q$; la phase saute de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ en $x = 1$.

★ À retenir

Filtre	Fonction de transfert canonique	Asymptotes BF / HF
Passe-bas ordre 1	$\dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}x}$	0 / -20 dB/déc
Passe-haut ordre 1	$H_0 \dfrac{\mathrm{j}x}{1 + \mathrm{j}x}$	$+20$ / 0 dB/déc
Passe-bas ordre 2	$\dfrac{H_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	0 / -40 dB/déc
Passe-haut ordre 2	$\dfrac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	$+40$ / 0 dB/déc
Passe-bande ordre 2	$\dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\mathrm{j}\frac{x}{Q} H_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	$+20$ / -20 dB/déc
Coupe-bande ordre 2	$H_0 \dfrac{1 - x^2}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	0 / 0 (gain nul en $x = 1$)

☞ Exercices d'application

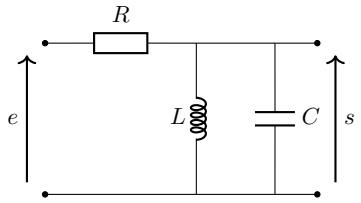
EXERCICE 4 Reconnaître un filtre

Pour le filtre ci-contre (sortie ouverte) :

Q-1) Prévoir son comportement en BF et en HF.

Q-2) Établir $\underline{H}$ et la mettre sous forme canonique ; identifier H_0, ω_0 et Q.

Q-3) Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique pour $Q = 5$.



Correction

Q-1) BF : L est un fil, $s = 0$; HF : C est un fil, $s = 0$: passe-bande.

Q-2) $\underline{Y}_{LC} = \mathrm{j}C\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}$; diviseur de tension : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + R\underline{Y}_{LC}} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$, avec $H_0 = 1$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{C/L}$.

Q-3) Asymptotes de pentes ± 20 dB/déc se coupant en $x = 1$ à $-20\log 5 = -14$ dB ; maximum réel de 0 dB en $x = 1$.

EXERCICE 5 Éliminer le ronflement du secteur

Un résistor R est en série avec l'association série d'une bobine L et d'un condensateur C ; la sortie est prise aux bornes de l'ensemble LC.

Q-1) Étudier qualitativement le comportement en BF et en HF.

Q-2) Établir $\underline{H}$ et montrer que la transmission est nulle pour $\omega = \omega_0$. Exprimer la largeur de la bande coupée.

Q-3) On veut éliminer le ronflement à $50\,\mathrm{Hz}$ d'un signal. Avec $C = 10\,\mu\mathrm{F}$, quelle inductance choisir ? Quelle résistance pour une bande coupée de $10\,\mathrm{Hz}$?

Correction

Q-1) BF : C ouvert, $s = e$; HF : L ouverte, $s = e$: le filtre transmet aux deux extrémités du spectre.

Q-2) $\underline{H} = \dfrac{\mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R + \mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \dfrac{\mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ avec $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$: $\underline{H}(\omega_0) = 0$. La bande coupée a pour largeur $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$.

Q-3) $L = \dfrac{1}{C\omega_0^2} \approx 1{,}0\,\mathrm{H}$; $R = L\Delta\omega = 1 \times 2\pi \times 10 \approx 63\,\Omega$.

V Action d'un filtre sur un signal

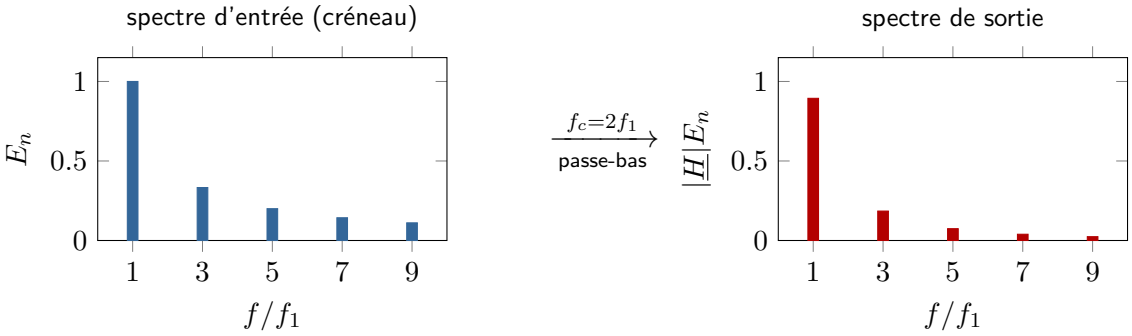
V.1 Point de vue fréquentiel

Réponse à un signal périodique R

Le filtre étant linéaire, si $e(t) = E_0 + \sum_n E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$, alors

$$s(t) = \underline{H}(0)\, E_0 + \sum_n \left|\underline{H}(n\omega)\right| E_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n + \arg \underline{H}(n\omega)\right)$$

Chaque composante est multipliée par le gain et déphasée de $\arg \underline{H}$ à sa propre fréquence. Le spectre de sortie ne contient que des fréquences présentes dans l'entrée : c'est un test expérimental de linéarité.

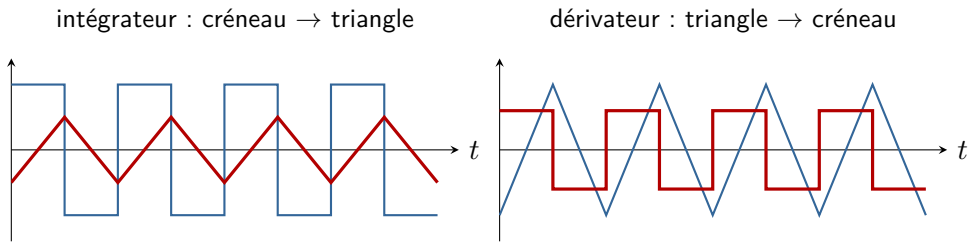


V.2 Moyenneur, intégrateur, dérivateur

Comportements temporels R

- **Moyenneur** : un passe-bas dont la fréquence de coupure est très inférieure au fondamental ne laisse passer que la composante continue : $s \approx H_0 \langle e \rangle$.
- **Intégrateur** : là où le gain a une pente de -20 dB/déc et la phase vaut $-\pi/2$ (passe-bas d'ordre 1 pour $\omega \gg \omega_c$), $\underline{H} \approx \dfrac{H_0 \omega_c}{\mathrm{j}\omega}$ et $s \approx H_0 \omega_c \displaystyle\int e \,\mathrm{d}t$ (pour un signal de moyenne nulle).
- **Dérivateur** : là où le gain a une pente de $+20$ dB/déc et la phase vaut $+\pi/2$ (passe-haut d'ordre 1 pour $\omega \ll \omega_c$), $\underline{H} \approx \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c} H_0$ et $s \approx \dfrac{H_0}{\omega_c} \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$.

Un intégrateur ou un dérivateur parfait n'existe pas : il amplifierait indéfiniment les fréquences très basses ou très hautes. Le comportement n'est obtenu que dans un domaine de fréquences, au prix d'une forte atténuation.



Simulation numérique : reconstruire la sortie à partir du spectre

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f1, E, fc = 100.0, 1.0, 200.0        # fondamental, amplitude, coupure (Hz)
```

```
t = np.linspace(0, 3/f1, 3000)
H = lambda f: 1/(1 + 1j*f/fc)       # passe-bas du premier ordre

ue, us = np.zeros_like(t), np.zeros_like(t)
for n in range(1, 200, 2):          # harmoniques impairs du creneau
    En = 4*E/(np.pi*n)
    ue += En*np.sin(2*np.pi*n*f1*t)
    us += abs(H(n*f1))*En*np.sin(2*np.pi*n*f1*t + np.angle(H(n*f1)))

plt.plot(t*1e3, ue, label="entree"); plt.plot(t*1e3, us, label="sortie")
plt.xlabel("t (ms)"); plt.legend(); plt.grid(); plt.show()
```

Pistes : faire varier f_c ($f_c \ll f_1$: comportement intégrateur ; $f_c \gg f_1$: signal peu déformé) ; remplacer H par un passe-bande.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Filtrer une somme de sinusoïdes

Le signal $e(t) = 2 + 3\cos(2\pi \times 100\,t) + \cos\left(2\pi \times 10^4\,t\right)$ (en volts) traverse un filtre passe-bas du premier ordre de gain statique 1 et de fréquence de coupure $1\,\text{kHz}$.

Q-1) Écrire le signal de sortie $s(t)$.

Q-2) Même question pour un passe-haut du premier ordre de même fréquence de coupure.

Q-3) Quel filtre faut-il pour ne conserver que la valeur moyenne ?

Correction

Q-1) $s = 2 + 2{,}99\cos(2\pi \cdot 100\,t - 5{,}7°) + 0{,}10\cos\left(2\pi \cdot 10^4 t - 84{,}3°\right)$.

Q-2) $s = 0{,}30\cos(2\pi \cdot 100\,t + 84{,}3°) + 0{,}995\cos\left(2\pi \cdot 10^4 t + 5{,}7°\right)$: la composante continue disparaît.

Q-3) Un passe-bas de fréquence de coupure très inférieure à $100\,\text{Hz}$ (moyenneur), par exemple $1\,\text{Hz}$.

EXERCICE 7 Créneau intégré

Un créneau symétrique de fréquence $f = 10\,\text{kHz}$ et d'amplitude $E = 1\,\text{V}$ attaque un passe-bas RC de fréquence de coupure $f_c = 100\,\text{Hz}$.

Q-1) Justifier que le filtre se comporte en intégrateur pour toutes les composantes du signal.

Q-2) En déduire la forme du signal de sortie et son amplitude crête à crête.

Q-3) Retrouver ce résultat par l'analyse spectrale.

Correction

Q-1) Toutes les harmoniques vérifient $f_n \geq f \gg f_c$: $\underline{H} \approx \dfrac{\omega_c}{\mathrm{j}\omega}$, soit $s \approx \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int e\,\mathrm{d}t$ avec $\tau = RC = \dfrac{1}{2\pi f_c}$.

Q-2) L'intégrale d'un créneau est un **triangle** de pente $\pm E/\tau$ pendant chaque demi-période : $\Delta s = \dfrac{E}{\tau} \cdot \dfrac{1}{2f} = 31\,\text{mV}$ crête à crête.

Q-3) Chaque harmonique est divisée par $\dfrac{nf}{f_c}$ et déphasée de $-\dfrac{\pi}{2}$: les amplitudes $\dfrac{4E}{n\pi}\dfrac{f_c}{nf}$ décroissent en $1/n^2$, comme celles d'un signal triangulaire.

VI Association de filtres

VI.1 Influence de la charge, impédances d'entrée et de sortie

Définition — Impédances d'entrée et de sortie R

Vu de l'entrée, un filtre se comporte comme une impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \underline{E}/\underline{I}_e$. Vu de la sortie, il se comporte comme un générateur de Thévenin de f.é.m. $\underline{HE}$ (tension à vide) et d'impédance $\underline{Z}_s$, l'**impédance de sortie** (calculée en éteignant l'entrée). Pour le filtre RC passe-bas : $\underline{Z}_e = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$ et $\underline{Z}_s = \dfrac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}$.

Mise en cascade R

Deux filtres en cascade ont pour fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{H}_1\underline{H}_2}{1+\underline{Z}_{s1}/\underline{Z}_{e2}} \approx \underline{H}_1\underline{H}_2 \quad \text{si} \quad |\underline{Z}_{s1}| \ll |\underline{Z}_{e2}|$$

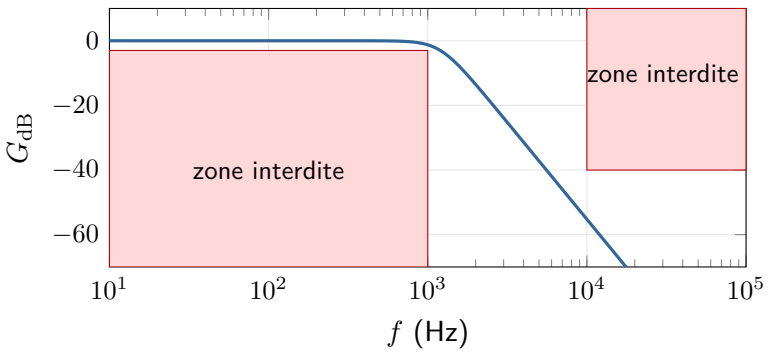
Pour associer des filtres sans qu'ils s'influencent, il faut une **faible impédance de sortie** et une **forte impédance d'entrée**. On intercale si besoin un montage **suiveur** à ALI (**E6**), d'impédance d'entrée infinie et de sortie nulle.

Démonstration D. Le premier filtre, vu de sa sortie, est un générateur de Thévenin $(\underline{H}_1\underline{E}, \underline{Z}_{s1})$ chargé par $\underline{Z}_{e2}$: diviseur de tension, $\underline{V} = \dfrac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2}+\underline{Z}_{s1}}\underline{H}_1\underline{E}$; puis $\underline{S} = \underline{H}_2\underline{V}$.

VI.2 Gabarit

Définition — Gabarit d'un filtre

Le cahier des charges d'un filtre est souvent donné par un **gabarit** : zones interdites du diagramme de Bode en gain. Pour un passe-bas : gain supérieur à $-G_1$ dans la bande passante $[0, f_1]$, inférieur à $-G_2$ dans la bande coupée $[f_2, +\infty[$. Plus la transition $[f_1, f_2]$ est étroite, plus l'ordre du filtre doit être élevé (pente $-20n$ dB/déc pour un ordre n).



Gabarit d'un passe-bas ($G \geq -3$ dB jusqu'à 1 kHz, $G \leq -40$ dB au-delà de 10 kHz), respecté par un filtre d'ordre 3.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 — **Filtre RC chargé** ★★☆☆☆

Un filtre RC passe-bas $(R,\,C)$ débite dans une résistance de charge R_c placée en parallèle sur C.

Q-1) Établir la fonction de transfert. Montrer qu'il s'agit toujours d'un passe-bas du premier ordre, dont on donnera le gain statique et la pulsation de coupure.

Q-2) À quelle condition la charge ne modifie-t-elle pas le filtre ? Interpréter à l'aide de l'impédance de sortie.

Correction

Q-1) $\underline{Z_p} = \dfrac{R_c}{1+\mathrm{j}R_cC\omega}$ et $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z_p}}{R+\underline{Z_p}} = \dfrac{R_c}{R+R_c+\mathrm{j}RR_cC\omega} = \dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_c'}$ avec $H_0 = \dfrac{R_c}{R+R_c}$ et $\omega_c' = \dfrac{R+R_c}{RR_cC} = \dfrac{1}{(R\parallel R_c)C}$.

Q-2) Il faut $R_c \gg R$: alors $H_0 \approx 1$ et $\omega_c' \approx 1/RC$. L'impédance de sortie du filtre est au plus R : la charge doit être grande devant elle.

VII Synthèse

★ À retenir

- Signal périodique = composante continue + fondamental + harmoniques ; $\langle y\rangle = Y_0$; $Y_{\text{eff}}^2 = Y_0^2 + \sum Y_n^2/2$.
- $\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}$ en sortie ouverte ; $G_{\text{dB}} = 20\log|\underline{H}|$; $\varphi = \arg\underline{H}$; coupure à -3 dB ; $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow \mathrm{d}/\mathrm{d}t$.
- Nature du filtre par les comportements limites de L et C ; ordre n : pentes asymptotiques au plus $\pm 20n$ dB/déc.
- Passe-bande d'ordre 2 : $\dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}Q(x-1/x)}$, $\Delta\omega = \omega_0/Q$; passe-bas d'ordre 2 : -40 dB/déc, résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$.
- Superposition : chaque harmonique est traitée séparément. Moyenneur ($f_c \ll f$), intégrateur (-20 dB/déc, $-\pi/2$), dérivateur ($+20$ dB/déc, $+\pi/2$).
- Cascade : $\underline{H} \approx \underline{H_1}\underline{H_2}$ si $|\underline{Z_{s1}}| \ll |\underline{Z_{e2}}|$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Erreurs classiques : utiliser une fonction de transfert établie en sortie ouverte pour un filtre chargé ; multiplier les fonctions de transfert de filtres passifs en cascade ; confondre pulsation propre et pulsation de coupure d'un passe-bas d'ordre 2 ; oublier la composante continue, transmise avec le gain $\underline{H}(0)$.

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 9 Deux cellules RC en cascade

Deux cellules passe-bas RC identiques sont placées en cascade, la sortie étant ouverte.

Q-1) Montrer que $\underline{H} = \dfrac{1}{1-x^2+3\mathrm{j}x}$ avec $x = RC\omega$. Comparer au produit $\underline{H}_1^2$ des fonctions de transfert de chaque cellule.

Q-2) Identifier ω_0 et Q. Le filtre présente-t-il une résonance ? Tracer le diagramme asymptotique.

Q-3) Calculer dans les deux cas (cascade directe, cascade idéale) la pulsation de coupure et le gain en $x = 1$.

Q-4) On intercale un suiveur entre les deux cellules. Que devient $\underline{H}$?

Correction

Q-1) Soit $\underline{V}$ la tension intermédiaire. Pour la seconde cellule, $\underline{V} = (1+\mathrm{j}x)\underline{S}$; loi des nœuds au point intermédiaire : $\dfrac{\underline{E}-\underline{V}}{R} = \mathrm{j}C\omega\underline{V} + \dfrac{\underline{V}-\underline{S}}{R}$. En éliminant $\underline{V}$: $\underline{E} = \underline{S}\big[(1+\mathrm{j}x)(2+\mathrm{j}x)-1\big] = \underline{S}(1-x^2+3\mathrm{j}x)$. Or $\underline{H}_1^2 = \dfrac{1}{1-x^2+2\mathrm{j}x}$: la seconde cellule charge la première.

Q-2) $\omega_0 = 1/RC$ et $1/Q = 3$: $Q = 1/3 < 1/\sqrt{2}$, pas de résonance. Asymptotes : 0 dB en BF, -40 dB/déc en HF ; comme $Q < 1$, une portion intermédiaire à -20 dB/déc apparaît entre $x \approx Q$ et $x \approx 1/Q$.

Q-3) Cascade directe : $(1-x^2)^2 + 9x^2 = 2$ donne $x_c \approx 0{,}37$; gain en $x = 1$: $1/3$ ($-9{,}5$ dB). Cascade idéale : $1 + x^2 = \sqrt{2}$, $x_c \approx 0{,}64$; gain $1/2$ (-6 dB).

Q-4) Le suiveur n'absorbe aucun courant et impose sa tension de sortie : $\underline{H} = \underline{H}_1^2 = \dfrac{1}{(1+\mathrm{j}x)^2}$, de facteur de qualité $1/2$.

EXERCICE 10 Extraire un harmonique

Un créneau de fréquence $f_1 = 1\,\mathrm{kHz}$ et d'amplitude $E = 1\,\mathrm{V}$ attaque un filtre passe-bande d'ordre 2 de gain maximal 1, centré sur $f_0 = 3\,\mathrm{kHz}$, de facteur de qualité $Q = 20$.

Q-1) Calculer le gain du filtre pour les harmoniques de rang 1, 3 et 5.

Q-2) En déduire l'allure du signal de sortie et son amplitude.

Correction

Q-1) $G = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}}$: pour $x = 1/3$, $G \approx 0{,}019$; pour $x = 1$, $G = 1$; pour $x = 5/3$, $G \approx 0{,}047$.

Q-2) Amplitudes en sortie : rang 1 : $\dfrac{4}{\pi} \times 0{,}019 \approx 0{,}024\,\mathrm{V}$; rang 3 : $\dfrac{4}{3\pi} \approx 0{,}42\,\mathrm{V}$; rang 5 : $\dfrac{4}{5\pi} \times 0{,}047 \approx 0{,}012\,\mathrm{V}$. La sortie est quasi sinusoïdale, de fréquence $3\,\mathrm{kHz}$ et d'amplitude $0{,}42\,\mathrm{V}$: le filtre sélectif extrait l'harmonique 3.

EXERCICE 11 Tracé asymptotique par factorisation

Un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{10\,(1+\mathrm{j}f/f_1)}{(1+\mathrm{j}f/f_2)(1+\mathrm{j}f/f_3)}$ avec $f_2 = 10\,\mathrm{Hz}$, $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_3 = 10\,\mathrm{kHz}$.

Q-1) Justifier que le gain en dB et la phase sont les sommes des contributions de chaque facteur.

Q-2) Tracer le diagramme asymptotique en gain en précisant les pentes sur chaque intervalle, et donner le gain dans la zone $[f_1, f_3]$.

Q-3) Donner l'allure asymptotique de la phase.

Correction

Q-1) Le module d'un produit est le produit des modules, le logarithme transforme le produit en somme ; les arguments d'un produit s'ajoutent.

Q-2) $f < f_2$: 20 dB, pente nulle ; $f_2 < f < f_1$: pente -20 dB/déc (de 20 dB à 0 dB) ; $f_1 < f < f_3$: pente nulle, gain $10 \times \dfrac{f/f_1}{f/f_2} = \dfrac{10 f_2}{f_1} = 1$, soit 0 dB ; $f > f_3$: -20 dB/déc.

Q-3) La phase asymptotique vaut 0 en BF, $-\pi/2$ entre f_2 et f_1, 0 entre f_1 et f_3, puis $-\pi/2$ en HF ; la courbe réelle lisse ces paliers.

IX Classiques des concours

EXERCICE 12 Le filtre de Wien

On considère le filtre de Wien ci-contre (sortie ouverte).

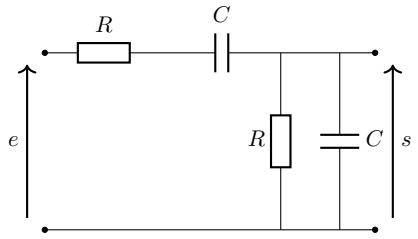
Q-1) Prévoir sa nature par une étude qualitative.

Q-2) Montrer que $\underline{H} = \dfrac{1}{3+\mathrm{j}\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ avec $x = RC\omega$.

Q-3) Mettre $\underline{H}$ sous forme canonique ; préciser H_0, ω_0, Q et la bande passante.

Q-4) On applique $e(t) = E_0 + E_1\cos(\omega_0 t) + E_2\cos(10\omega_0 t)$. Exprimer $s(t)$.

Q-5) Le filtre est placé dans la boucle de réaction d'un amplificateur non inverseur de gain K (**E6**). Quelle valeur de K permet d'entretenir des oscillations sinusoïdales ?



Correction

Q-1) BF : le condensateur série est ouvert, $s = 0$; HF : le condensateur parallèle court-circuite la sortie, $s = 0$: passe-bande.

Q-2) $\underline{Z_s} = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$ et $\underline{Y_p} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega$; $\underline{H} = \dfrac{1}{1+\underline{Z_s}\underline{Y_p}} = \dfrac{1}{1+\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}x}\right)(1+\mathrm{j}x)} = \dfrac{1}{3+\mathrm{j}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$.

Q-3) $\underline{H} = \dfrac{1/3}{1+\mathrm{j}\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)}$: $H_0 = \dfrac{1}{3}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, $Q = \dfrac{1}{3}$, $\Delta\omega = 3\omega_0$ (filtre très peu sélectif).

Q-4) $\underline{H}(0) = 0$, $\underline{H}(\omega_0) = \dfrac{1}{3}$, $\underline{H}(10\omega_0) = \dfrac{1}{3+9{,}9\mathrm{j}}$ de module 0,097 et d'argument $-1{,}28\,\mathrm{rad}$: $s = \dfrac{E_1}{3}\cos\omega_0 t + 0{,}097E_2\cos(10\omega_0 t - 1{,}28)$.

Q-5) Il faut $K\underline{H} = 1$: $\underline{H}$ réel impose $\omega = \omega_0$, et $K = 3$ (condition de Barkhausen).

EXERCICE 13 Suiveur et mise en cascade

On associe un filtre passe-bas RC (R, C) suivi d'un filtre passe-haut CR (C, R), avec les mêmes valeurs de R et C ; la sortie est ouverte.

Q-1) Exprimer l'impédance de sortie du passe-bas et l'impédance d'entrée du passe-haut.

Q-2) Montrer que la fonction de transfert globale est $\underline{H} = \dfrac{\mathrm{j}x}{1 - x^2 + 3\mathrm{j}x}$ avec $x = RC\omega$. Nature du filtre ? Facteur de qualité ?

Q-3) Que deviendrait $\underline{H}$ si l'on intercalait un suiveur entre les deux cellules ? Comparer les facteurs de qualité et les gains maximaux.

Correction

Q-1) $\underline{Z}_{s1} = \dfrac{R}{1+\mathrm{j}x}$ et $\underline{Z}_{e2} = R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} = R\,\dfrac{1+\mathrm{j}x}{\mathrm{j}x}$.

Q-2) $\underline{H} = \dfrac{\underline{H}_1\underline{H}_2}{1 + \underline{Z}_{s1}/\underline{Z}_{e2}}$ avec $\underline{H}_1 = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}x}$, $\underline{H}_2 = \dfrac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$ et $\dfrac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}} = \dfrac{\mathrm{j}x}{(1+\mathrm{j}x)^2}$, d'où $\underline{H} = \dfrac{\mathrm{j}x}{(1+\mathrm{j}x)^2 + \mathrm{j}x} = \dfrac{\mathrm{j}x}{1 - x^2 + 3\mathrm{j}x}$. C'est un passe-bande $\dfrac{\mathrm{j}x/Q \cdot H_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}x/Q}$ avec $Q = \dfrac{1}{3}$ et $H_0 = \dfrac{1}{3}$.

Q-3) Avec un suiveur, $\underline{H} = \underline{H}_1\underline{H}_2 = \dfrac{\mathrm{j}x}{1 - x^2 + 2\mathrm{j}x}$: $Q = \dfrac{1}{2}$ et gain maximal $\dfrac{1}{2}$ au lieu de $\dfrac{1}{3}$. Le suiveur supprime l'interaction entre les étages.

EXERCICE 14 Filtrage d'un signal de capteur

Un capteur délivre une tension utile lentement variable, de fréquence inférieure à $5\,\mathrm{Hz}$ et d'amplitude $50\,\mathrm{mV}$, à laquelle se superpose un parasite à $50\,\mathrm{Hz}$ de même amplitude. On souhaite atténuer le parasite d'au moins $20\,\mathrm{dB}$ sans déformer le signal utile de plus de $1\,\mathrm{dB}$.

Q-1) Montrer qu'un passe-bas du premier ordre ne peut pas convenir.

Q-2) On utilise un passe-bas du second ordre de type Butterworth ($Q = 1/\sqrt{2}$), de gain $|\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. Déterminer l'intervalle des fréquences propres f_0 qui conviennent.

Q-3) Que vaut alors l'amplitude du parasite en sortie ?

Correction

Q-1) Premier ordre : -1 dB au plus à $5\,\mathrm{Hz}$ impose $1 + (5/f_c)^2 \le 10^{0,1} = 1{,}26$, soit $f_c \ge 9{,}8\,\mathrm{Hz}$; -20 dB au moins à $50\,\mathrm{Hz}$ impose $1 + (50/f_c)^2 \ge 100$, soit $f_c \le 5{,}0\,\mathrm{Hz}$: incompatible.

Q-2) À $5\,\mathrm{Hz}$: $1 + (5/f_0)^4 \le 1{,}26$, soit $f_0 \ge 5/0{,}26^{1/4} \approx 7{,}0\,\mathrm{Hz}$. À $50\,\mathrm{Hz}$: $1 + (50/f_0)^4 \ge 100$, soit $f_0 \le 50/99^{1/4} \approx 15{,}9\,\mathrm{Hz}$. Tout f_0 entre 7 et $16\,\mathrm{Hz}$ convient, par exemple $10\,\mathrm{Hz}$.

Q-3) Pour $f_0 = 10\,\mathrm{Hz}$: $x = 5$, $|\underline{H}| = 1/\sqrt{626} \approx 0{,}040$ (-28 dB) : le parasite ne fait plus que $2\,\mathrm{mV}$.