LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

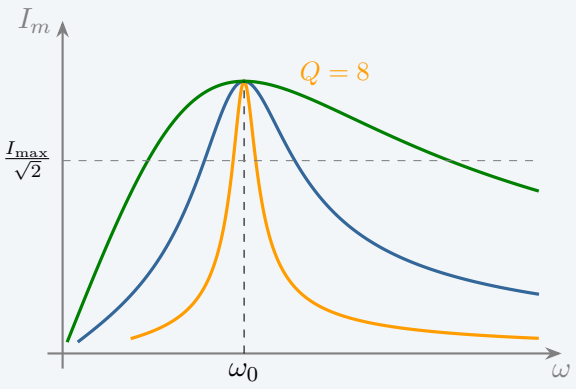
FICHE RÉSUMÉ

E4

ÉLECTRONIQUE

Régime sinusoïdal forcé

Grandeurs sinusoïdales — Représentation complexe — Impédances et Fresnel — Résonances en intensité et en tension — Puissance et facteur de puissance — Adaptation d'impédance



« *Diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.*

— René Descartes, *Discours de la méthode* (1637)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Résonance d'un oscillateur »

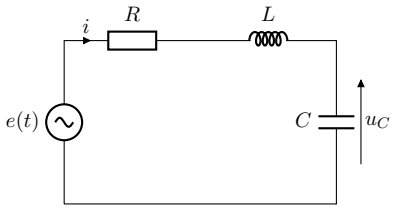
E4 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Excité par une source sinusoïdale, un circuit linéaire atteint, après le régime transitoire, un **régime sinusoïdal forcé** à la pulsation de l'excitation. La **notation complexe** ($\mathrm{d}/\mathrm{d}t \to \mathrm{j}\omega$) transforme les équations différentielles en équations algébriques : on traite le circuit comme un réseau résistif d'**impédances**. Le circuit RLC série présente une **résonance** en intensité (toujours en ω_0, largeur ω_0/Q) et, si $Q > 1/\sqrt{2}$, en tension aux bornes du condensateur ; seule la partie résistive consomme une puissance moyenne.

I Régime sinusoïdal forcé et grandeurs sinusoïdales

Pour $e(t) = E_m \cos \omega t$, l'équation $\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e$ a pour solution $u_C = u_{SH} + u_{SP}$: la solution homogène s'éteint en quelques $\tau = 2Q/\omega_0$ (**régime transitoire**) ; il reste la solution particulière, sinusoïdale **de même pulsation** ω (**régime forcé** ou établi).



Définition — Signal sinusoïdal, déphasage, valeur efficace R

- $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$: amplitude $X_m > 0$, valeur efficace X, pulsation ω ($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$), $f = \omega/2\pi$, $T = 1/f$, phase à l'origine φ.
- Déphasage de x_1 sur x_2 : $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in]-\pi, \pi]$; $\Delta\varphi > 0$: x_1 **en avance** (maximum atteint le premier). En phase, quadrature ($\pm\pi/2$), opposition (π).
- $\langle x \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x\,\mathrm{d}t$, $\quad X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$; sinusoïde : $\langle x \rangle = 0$ et $\boxed{X_{\text{eff}} = X_m/\sqrt{2}}$; créneau $\pm E$: $U_{\text{eff}} = E$.

☞ Méthode — Mesurer un déphasage à l'oscilloscope M

Bicourbe : décalage Δt entre deux passages par zéro en croissant, $|\Delta\varphi| = 2\pi\,\Delta t/T = \omega\Delta t$; le signal en avance passe le premier. **Mode XY** : ellipse de Lissajous ; intersection avec l'axe $x = 0$ en $y_0 = \pm Y_m \sin\varphi$, d'où $|\sin\varphi| = y_0/Y_m$ (segment si $\varphi = 0$ ou π, cercle si $\varphi = \pm\pi/2$ et $X_m = Y_m$).

II Représentation complexe et impédances

Grandeur complexe associée R

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{X}_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{X}_m = X_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \longleftrightarrow \mathrm{j}\omega\,\underline{x} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \longleftrightarrow -\omega^2\underline{x} \qquad \int x\,\mathrm{d}t \longleftrightarrow \frac{\underline{x}}{\mathrm{j}\omega}$$

$x = \mathrm{Re}(\underline{x})$, $X_m = |\underline{X}_m|$, $\varphi = \arg \underline{X}_m$. On peut aussi utiliser l'amplitude efficace complexe $\underline{X} = X\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

Définition — Impédance et admittance R

Dipôle linéaire passif en convention récepteur : $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$; $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$ (résistance R, réactance X), $|\underline{Z}| = U_m/I_m$, $\arg \underline{Z} = \varphi_u - \varphi_i$ (avance de u sur i). Admittance $\underline{Y} = 1/\underline{Z} = G + \mathrm{j}S$ (conductance, susceptance), $\underline{Y} = \underline{Z}^*/|\underline{Z}|^2$.

★ À retenir

Dipôle	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$	$\lvert\underline{Z}\rvert$	$\arg \underline{Z} = \varphi_{u/i}$	BF ($\omega \to 0$) / HF ($\omega \to \infty$)
Résistor	R	$G = 1/R$	R	0	u et i en phase
Bobine idéale	$\mathrm{j}L\omega$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}$	$L\omega$	$+\dfrac{\pi}{2}$	fil / interrupteur ouvert
Condensateur	$\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$	$\mathrm{j}C\omega$	$\dfrac{1}{C\omega}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	interrupteur ouvert / fil

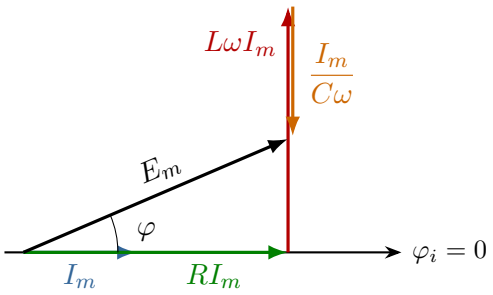
Toutes les lois des réseaux linéaires restent valables avec $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$: $\underline{Z}_{\text{éq}} = \sum \underline{Z}_k$ (série), $\underline{Y}_{\text{éq}} = \sum \underline{Y}_k$ (parallèle), lois de Kirchhoff, diviseurs, Millman, Thévenin-Norton.

Construction de Fresnel R

À $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe le vecteur de norme X_m faisant l'angle φ avec l'axe origine (image de $\underline{X}_m$). Une somme de sinusoïdes de même pulsation devient une somme vectorielle. RLC série (i origine des phases) :

$$E_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \tfrac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - 1/(C\omega)}{R} \quad \text{(avance de } e \text{ sur } i\text{)}.$$

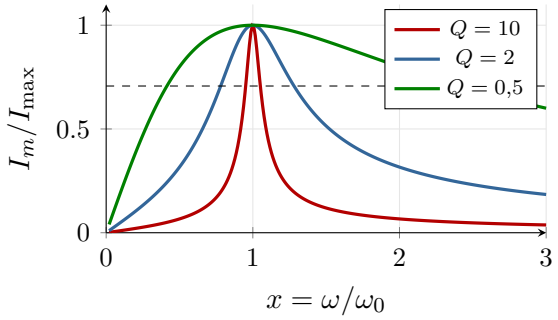


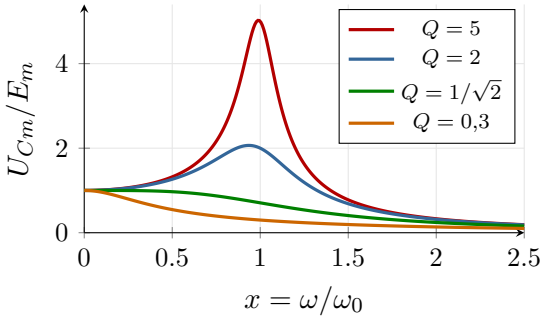
III Résonances du circuit RLC série

Avec $\underline{E}_m = E_m$, pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = L\omega_0/R$; diviseur de tension pour u_C :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)} \qquad \underline{U}_{Cm} = \frac{E_m}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$$

	Résonance en intensité ($\leftrightarrow$ vitesse)	Résonance en tension u_C ($\leftrightarrow$ élongation)
Amplitude	$I_m = \dfrac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}$	$U_{Cm} = \dfrac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}$
Existence	toujours, en $\omega = \omega_0$; $I_{\max} = E_m/R$	seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$, en $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$
À ω_0	$\underline{Z} = R$ réelle minimale ; i et e en phase	$U_{Cm}(\omega_0) = QE_m$: **surtension** si $Q > 1$
Phase	$\varphi_i = -\arctan\left[Q(x - 1/x)\right]$, de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$	φ_{u_C} de 0 à $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ en ω_0
Acuité	bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \dfrac{\omega_0}{Q}$ (exact)	pic d'autant plus aigu que Q est grand ; $\omega_r \approx \omega_0$ si $Q \gg 1$





Démonstrations clés D

- $I_m = I_{\max}/\sqrt{2} \iff Q|x - 1/x| = 1 \iff x^2 \mp x/Q - 1 = 0$; racines positives $x_{1,2} = \mp\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$, d'où $x_2 - x_1 = 1/Q$.
- U_{Cm} maximale quand $f(X) = (1-X)^2 + X/Q^2$ ($X = x^2$) est minimale : $f'(X) = 0 \Rightarrow X = 1 - \frac{1}{2Q^2}$, qui doit être > 0.
- Circuit LC idéal ($R = 0$) : résonance infinie en ω_0 (non physique) ; LC série : $\underline{Z} = 0$ en ω_0 ; LC parallèle : $\underline{Z} \to \infty$ (circuit « bouchon »).

IV Puissance en régime sinusoïdal forcé

Puissance active et facteur de puissance R D

Pour $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ et $i = I\sqrt{2}\cos\omega t$: $p(t) = ui = UI\cos\varphi + UI\cos(2\omega t + \varphi)$, d'où la moyenne

$$\mathcal{P} = \langle p \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \tfrac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = \mathrm{Re}(\underline{Z})\, I_{\text{eff}}^2 = \mathrm{Re}(\underline{Y})\, U_{\text{eff}}^2$$

$\cos\varphi$: **facteur de puissance** ($\varphi = \arg\underline{Z}$) ; puissance apparente UI (en $\mathrm{V\cdot A}$). Bobine et condensateur idéaux : $\mathcal{P} = 0$ (ils échangent de l'énergie sans en consommer) ; dans le RLC, toute la puissance moyenne est dissipée dans R.

Relèvement du facteur de puissance, charge adaptée R

- Pour une puissance utile $\mathcal{P}_c$ donnée, $I = \mathcal{P}_c/(U\cos\varphi)$: les pertes en ligne $R_{\text{ligne}} I^2$ croissent si $\cos\varphi$ diminue. Rendement du transport $\eta = \dfrac{1}{1 + R_{\text{ligne}}\mathcal{P}_c/(U^2\cos^2\varphi)}$: on transporte sous haute tension et on impose $\cos\varphi \gtrsim 0{,}9$.
- Installation inductive ($\varphi > 0$) : un condensateur en parallèle ramène φ à φ' avec $C\omega U^2 = \mathcal{P}(\tan\varphi - \tan\varphi')$.
- Générateur d'impédance $\underline{Z}_g = R_g + \mathrm{j}X_g$: puissance maximale transférée à la charge pour $\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_g^*}$ ($R = R_g$, $X = -X_g$), $\mathcal{P}_{\max} = E_{\text{eff}}^2/(4R_g)$.

Ordres de grandeur

Secteur : $230\,\mathrm{V}$ efficaces à $50\,\mathrm{Hz}$, soit $230\sqrt{2} \approx 325\,\mathrm{V}$ d'amplitude. $L = 10\,\mathrm{mH}$, $C = 0{,}47\,\mu\mathrm{F}$: $f_0 \approx 2{,}3\,\mathrm{kHz}$; avec $R = 18\,\Omega$, $Q \approx 8$, $\Delta f \approx 290\,\mathrm{Hz}$. Entrée d'oscilloscope : $1\,\mathrm{M\Omega} \parallel 20\,\mathrm{pF}$ ($8\,\mathrm{k\Omega}$ à $1\,\mathrm{MHz}$).

V Méthodes et pièges

☞ Méthode — Étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé M

1. Remplacer chaque dipôle par son impédance et chaque source par son amplitude complexe.
2. Résoudre comme un circuit résistif (diviseurs, Millman, Thévenin) ; mettre le résultat sous forme canonique avec $x = \omega/\omega_0$ et Q.
3. Amplitude réelle = module ; phase = argument (attention au quadrant) ; étudier les limites BF et HF.
4. Pour retrouver l'équation différentielle, remplacer $\mathrm{j}\omega$ par $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- On n'additionne pas des tensions efficaces (ni des amplitudes) : on additionne des complexes ou des vecteurs de Fresnel.
- Une puissance ne se calcule jamais comme le produit de deux grandeurs complexes ; utiliser $\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{U}_m \underline{I}_m^*)$.
- $\arg(a + \mathrm{j}b) = \arctan(b/a)$ seulement si $a > 0$; sinon ajouter $\pm\pi$.
- Ne pas confondre les seuils : $Q = 1/2$ (régime critique, E3) et $Q = 1/\sqrt{2}$ (existence de la résonance en tension).
- La résonance en intensité a lieu en ω_0 pour tout Q ; seule celle en tension se décale.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais distinguer régime transitoire et régime forcé et caractériser un signal sinusoïdal (X_{eff}, $\Delta\varphi$).
- ☐ Je sais mesurer un déphasage à l'oscilloscope (bicourbe et XY).
- ☐ Je connais les impédances de R, L, C et leurs comportements limites.
- ☐ Je sais appliquer les lois des circuits en complexes et faire une construction de Fresnel.
- ☐ Je sais établir $\underline{I}_m$ et $\underline{U}_{Cm}$ du RLC série, et étudier les deux résonances.
- ☐ Je sais démontrer $\Delta\omega = \omega_0/Q$ et la condition $Q > 1/\sqrt{2}$.
- ☐ Je sais calculer une puissance moyenne, relever un facteur de puissance et réaliser une adaptation d'impédance.