LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

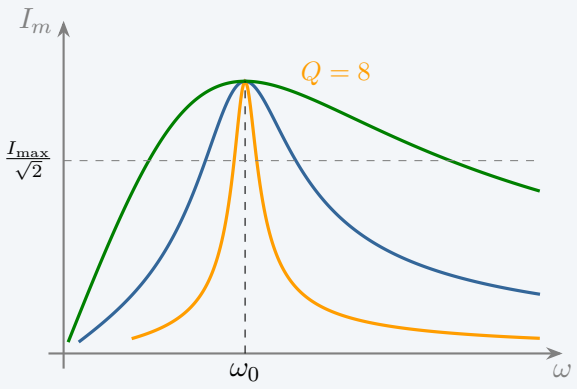
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

E4

ÉLECTRONIQUE

Régime sinusoïdal forcé

Grandeurs sinusoïdales — Représentation complexe — Impédances et Fresnel — Résonances en intensité et en tension — Puissance et facteur de puissance — Adaptation d'impédance



« *Diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.*

— René Descartes, *Discours de la méthode* (1637)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Résonance d'un oscillateur »

E4 — Régime sinusoïdal forcé

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Distinguer régime transitoire et régime sinusoïdal établi ; caractériser un signal sinusoïdal (amplitude, phase, valeur efficace) et mesurer un déphasage.
- Utiliser la représentation complexe : dérivation, impédances et admittances, lois des circuits en complexes, construction de Fresnel.
- Établir l'intensité et la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série forcé.
- Étudier la résonance en intensité (toujours en ω_0, bande passante ω_0/Q) et la résonance en tension (si $Q > 1/\sqrt{2}$).
- Exprimer la puissance moyenne et le facteur de puissance ; relever un facteur de puissance ; réaliser une adaptation d'impédance.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Résonance d'un oscillateur » permet de balayer la fréquence d'excitation d'un oscillateur RLC ou mécanique et d'observer en direct l'amplitude, la phase et la bande passante de la résonance pour différentes valeurs de Q.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

Introduction . . . 3
I Régime sinusoïdal forcé . . . 3
I.1 Régime transitoire et régime établi . . . 3
I.2 Grandeurs sinusoïdales . . . 3
I.3 Mesure d'un déphasage . . . 4
II Représentation complexe . . . 5
II.1 Amplitude complexe . . . 5
III Impédances complexes . . . 6
III.1 Impédance et admittance . . . 6
III.2 Représentation de Fresnel . . . 7
IV Résonance du circuit RLC série . . . 7
IV.1 Résonance en intensité . . . 8
IV.2 Résonance en tension aux bornes du condensateur . . . 8
IV.3 Le circuit LC idéal . . . 9
V Puissance en régime sinusoïdal forcé . . . 10
V.1 Puissance moyenne et facteur de puissance . . . 10
V.2 Adaptation d'impédance . . . 11
VI Synthèse . . . 11
VII Exercices d'approfondissement . . . 12
VIII Classiques des concours . . . 13

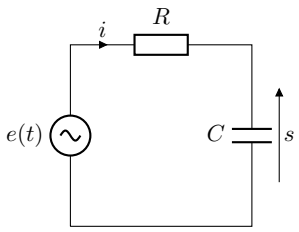
Introduction

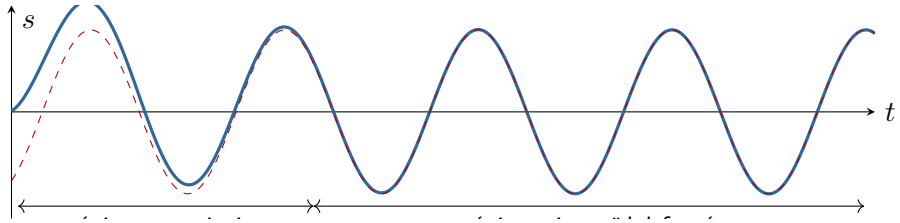
Un diapason qui se met à vibrer au son d'un autre, un verre brisé par une note chantée, un pont mis en oscillation par le pas cadencé de soldats, un quartz de montre, un récepteur radio qui sélectionne une station : tous ces phénomènes sont des **résonances**. Leurs ingrédients sont toujours les mêmes : un *oscillateur*, un *forçage* périodique, et une fréquence de forçage voisine de la fréquence propre de l'oscillateur. Pour les étudier, on se place en **régime sinusoïdal forcé** et on utilise un outil puissant, la **représentation complexe**, qui transforme les équations différentielles linéaires en équations algébriques. Les résultats obtenus pour le circuit RLC se transposent directement à l'oscillateur mécanique (**M5**).

I Régime sinusoïdal forcé

I.1 Régime transitoire et régime établi

Le circuit RC série est alimenté par $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. La tension $s = u_C$ vérifie $\tau \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = e(t)$, avec $\tau = RC$. Sa solution est la somme de la solution homogène $A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, qui disparaît au bout de quelques τ (**régime transitoire**), et d'une solution particulière de même pulsation que l'excitation, $s_p(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$: c'est le **régime sinusoïdal forcé** (ou établi).





Une résolution laborieuse. Cherchons $s_p = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ en reportant dans l'équation : on doit identifier les coefficients de $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$, ce qui donne $C_1 = \dfrac{E_m}{1+\omega^2\tau^2}$ et $C_2 = \dfrac{\omega\tau E_m}{1+\omega^2\tau^2}$, qu'il faut encore mettre sous la forme $S_m \cos(\omega t + \varphi)$. Pour un circuit plus complexe, ce calcul devient vite inextricable : la notation complexe permet de l'éviter.

> **Remarque**
>
> L'étude du régime sinusoïdal est **générale** : tout signal périodique est une somme de sinusoïdes (décomposition de Fourier, **E5**) et, le système étant linéaire, la réponse est la somme des réponses à chaque sinusoïde.

I.2 Grandeurs sinusoïdales

Définition — Signal sinusoïdal R

$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$: $X_m > 0$ est l'amplitude, ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$), $f = \omega/2\pi$ la fréquence, $T = 1/f$ la période, $\omega t + \varphi$ la phase instantanée et φ la phase à l'origine.

Définition — Déphasage R

Le **déphasage** de x_1 par rapport à x_2, de même pulsation, est $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, ramené dans $]-\pi, \pi]$. Si $\Delta\varphi > 0$, x_1 est **en avance** sur x_2 : il atteint son maximum le premier. Si $\Delta\varphi = 0$, les signaux sont en phase ; si $\Delta\varphi = \pm\pi/2$, en quadrature ; si $\Delta\varphi = \pi$, en opposition de phase.

Définition — Valeurs moyenne et efficace R

Pour un signal périodique de période T :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \qquad X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Pour un signal sinusoïdal, $\langle x \rangle = 0$ et $X_{\text{eff}} = \dfrac{X_m}{\sqrt{2}}$; pour un créneau symétrique $\pm E$, $\langle u \rangle = 0$ et $U_{\text{eff}} = E$.

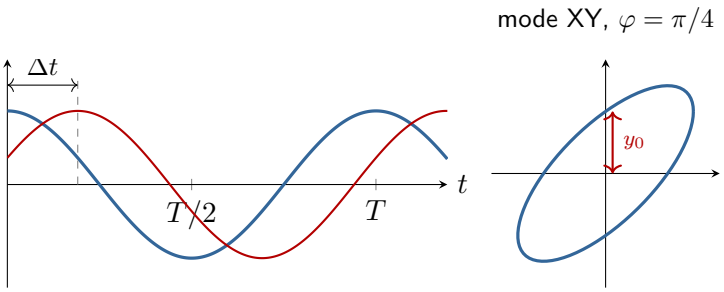
Ordres de grandeur

Le réseau électrique marocain fournit $230\,\mathrm{V}$ efficaces à $50\,\mathrm{Hz}$, soit une amplitude $230\sqrt{2} \approx 325\,\mathrm{V}$. Les voltmètres en mode AC affichent des valeurs efficaces.

I.3 Mesure d'un déphasage

☞ Méthode — Mesurer un déphasage à l'oscilloscope M

- **Mode bicourbe** : on mesure le décalage temporel Δt entre deux passages par zéro (en croissant) des deux signaux : $|\Delta\varphi| = 2\pi\dfrac{\Delta t}{T} = \omega\Delta t$. On détermine ensuite le signe en repérant le signal en avance (celui qui passe le premier).
- **Mode XY (courbe de Lissajous)** : pour $x = X_m\cos\omega t$ et $y = Y_m\cos(\omega t + \varphi)$, le spot décrit une ellipse qui coupe l'axe vertical en $y_0 = \pm Y_m \sin\varphi$, d'où $|\sin\varphi| = y_0/Y_m$. L'ellipse dégénère en segment si $\varphi = 0$ ou π.



La courbe rouge est en retard de $\omega\Delta t$ sur la bleue.

II Représentation complexe

II.1 Amplitude complexe

Définition — Grandeur complexe associée R

À $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe $\underline{x}(t) = X_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \underline{X}_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, où $\mathrm{j}^2 = -1$ et $\underline{X}_m = X_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ est l'**amplitude complexe**. On retrouve le signal réel par $x(t) = \mathrm{Re}\big(\underline{x}(t)\big)$, l'amplitude par $X_m = |\underline{X}_m|$ et la phase par $\varphi = \arg \underline{X}_m$.

Dérivation et intégration R D

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \longleftrightarrow \mathrm{j}\omega\,\underline{x} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \longleftrightarrow -\omega^2\,\underline{x} \qquad \int x\,\mathrm{d}t \longleftrightarrow \frac{\underline{x}}{\mathrm{j}\omega}$$

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants devient une **équation algébrique** pour les amplitudes complexes.

Démonstration D. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right) = \mathrm{j}\omega\, X_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$ et la partie réelle commute avec la dérivation : la grandeur complexe associée à $\dot{x}$ est $\mathrm{j}\omega\underline{x}$. Multiplier par $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$ revient à avancer la phase de $\pi/2$.

Retour sur le circuit RC. L'équation $\tau\dot{s} + s = e$ devient $(1 + \mathrm{j}\omega\tau)\underline{S}_m = E_m$, soit immédiatement $\underline{S}_m = \dfrac{E_m}{1+\mathrm{j}\omega\tau}$: $S_m = \dfrac{E_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ et $\varphi = -\arctan(\omega\tau)$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La notation complexe ne s'applique qu'aux grandeurs sinusoïdales de même pulsation et à des relations **linéaires** : on ne calcule jamais une puissance comme produit de deux grandeurs complexes.
- Pour calculer un argument, $\arg(a + \mathrm{j}b) = \arctan(b/a)$ **seulement si** $a > 0$; si $a < 0$, on factorise par -1 et on ajoute $\pm\pi$.
- On note j (et non i) l'unité imaginaire, pour éviter la confusion avec l'intensité.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Complexes et sinusoïdes ✦✧✧✧✧

Q-1) Donner le module et l'argument de $3 + 4\mathrm{j}$; $\dfrac{1}{1+\mathrm{j}}$; $\dfrac{\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$; $\dfrac{1}{1+\mathrm{j}x}$ et $\dfrac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$ pour $x > 0$.

Q-2) Pour $u(t) = 10\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (en volts) : amplitude, valeur efficace, fréquence, phase à l'origine, amplitude complexe.

Q-3) Écrire $u(t) = 3\cos\omega t - 4\sin\omega t$ sous la forme $U_m\cos(\omega t + \varphi)$.

Q-4) Deux signaux de $100\,\mathrm{Hz}$ sont décalés de $\Delta t = 1\,\mathrm{ms}$, le signal 2 étant en retard. Déphasage de 2 par rapport à 1 ?

III Impédances complexes

III.1 Impédance et admittance

Définition — Impédance et admittance R

Pour un dipôle linéaire passif en convention récepteur, en régime sinusoïdal forcé, $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$. $\underline{Z}$ est l'**impédance complexe** (en ohm) et $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ l'**admittance** (en siemens). $|\underline{Z}| = U_m/I_m$ et $\arg \underline{Z} = \varphi_u - \varphi_i$ est l'avance de phase de la tension sur l'intensité. On écrit $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$: R est la résistance, X la réactance.

★ À retenir

Dipôle	Relation	$\underline{Z}$	$\lvert\underline{Z}\rvert$	$\arg \underline{Z}$
Résistor	$u = Ri$	R	R	0 : u et i en phase
Bobine idéale	$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{j}L\omega$	$L\omega$	$+\frac{\pi}{2}$: u en avance sur i
Condensateur	$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$	$\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$: u en retard sur i

Comportements limites R

- Basse fréquence ($\omega \to 0$) : condensateur ≡ interrupteur ouvert ; bobine ≡ fil (on retrouve le régime continu).
- Haute fréquence ($\omega \to \infty$) : condensateur ≡ fil ; bobine ≡ interrupteur ouvert.

Lois des circuits en régime sinusoïdal forcé R

Toutes les lois des réseaux linéaires restent valables en remplaçant u, i par $\underline{u}$, $\underline{i}$, R par $\underline{Z}$ et G par $\underline{Y}$: associations ($\underline{Z}_{\text{éq}} = \sum \underline{Z}_k$ en série, $\underline{Y}_{\text{éq}} = \sum \underline{Y}_k$ en parallèle), lois des nœuds et des mailles, ponts diviseurs, loi des nœuds en potentiels, Thévenin-Norton. Un circuit en régime sinusoïdal se traite donc comme un circuit résistif.

☞ Méthode — Retrouver l'équation différentielle M

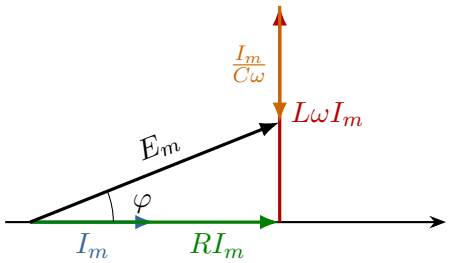
Une relation complexe entre amplitudes se traduit en équation différentielle en remplaçant $\mathrm{j}\omega$ par $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Par exemple, pour le circuit RLC série, le diviseur de tension donne

$$\underline{U_C} = \frac{\underline{Z_C}}{R + \mathrm{j}L\omega + \underline{Z_C}}\,\underline{E} = \frac{\underline{E}}{1 - LC\omega^2 + \mathrm{j}RC\omega} \quad \Longleftrightarrow \quad LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = e.$$

Les impédances fournissent aussi un contrôle d'homogénéité rapide : $L\omega$ et $1/(C\omega)$ sont des résistances, donc $LC\omega^2$ et $RC\omega$ sont sans dimension.

III.2 Représentation de Fresnel

On associe à $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ le vecteur de norme X_m faisant l'angle φ avec un axe origine : c'est l'image de $\underline{X}_m$ dans le plan complexe. Une somme de sinusoïdes de même pulsation correspond à une somme vectorielle. Pour le circuit RLC série, en prenant l'intensité comme origine des phases :



$$E_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \tfrac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ : avance de } e \text{ sur } i.$$

✗ Attention, erreurs fréquentes

Les tensions **efficaces** ne s'additionnent pas : dans un circuit RC série, si $U_R = 5\,\mathrm{V}$ et $U_C = 12\,\mathrm{V}$, la tension du générateur vaut $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,\mathrm{V}$ et non $17\,\mathrm{V}$, car u_R et u_C sont en quadrature.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 — **Impédances usuelles** ✦✧✧✧✧

À $f = 1\,\mathrm{kHz}$:

Q-1) calculer les impédances d'un résistor de $100\,\Omega$, d'une bobine de $10\,\mathrm{mH}$, d'un condensateur de $1\,\mu\mathrm{F}$;

Q-2) calculer le module et l'argument de l'impédance de $R = 100\,\Omega$ en série avec $L = 10\,\mathrm{mH}$;

Q-3) écrire l'impédance de R en parallèle avec C sous forme algébrique ;

Q-4) à quelle fréquence une bobine de $10\,\mathrm{mH}$ et un condensateur de $1\,\mu\mathrm{F}$ ont-ils des impédances de même module ?

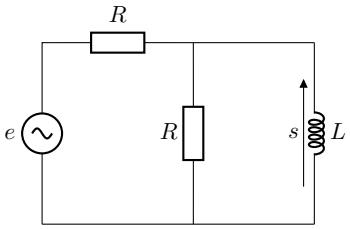
EXERCICE 3 — **Diviseur de tension complexe** ✦✦✧✧✧

Le générateur délivre $e(t) = E_m \cos\omega t$. La sortie s est prise aux bornes de l'association parallèle de R et L, placée en série avec un second résistor R.

Q-1) Exprimer $\underline{S}_m$ en fonction de $\underline{E}_m$.

Q-2) En déduire l'amplitude S_m et le déphasage de s sur e. Étudier les limites basse et haute fréquence.

Q-3) Retrouver l'équation différentielle reliant s et e.



IV Résonance du circuit RLC série

On alimente le circuit RLC série par $e(t) = E_m \cos\omega t$ et on note $x = \omega/\omega_0$ la **pulsation réduite**, avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$.

IV.1 Résonance en intensité

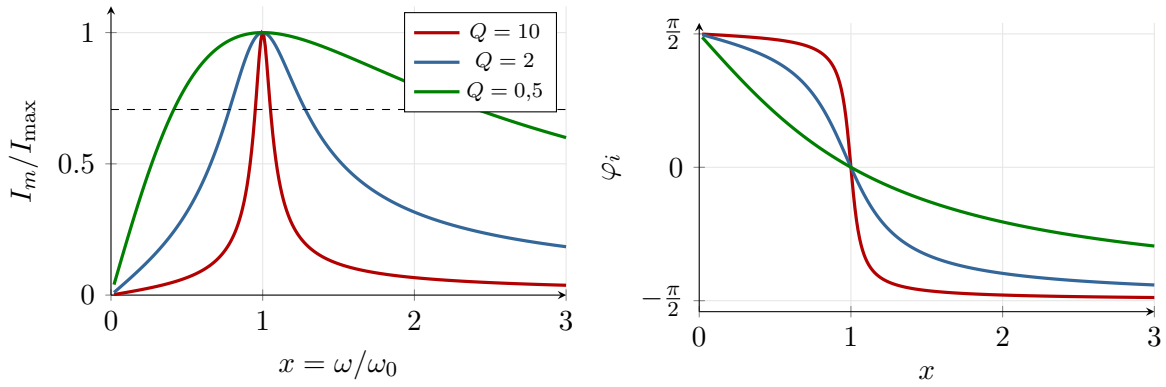
Résonance en intensité R D

$$\underline{I}_m = \frac{E_m/R}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)} \qquad I_m = \frac{E_m/R}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \qquad \varphi_i = -\arctan\left[Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]$$

Quel que soit Q, I_m est maximale pour $\omega=\omega_0$ et vaut $I_{\max}=E_m/R$: i et e sont alors **en phase** et l'impédance est réelle et minimale. La **bande passante** à -3 dB, définie par $I_m \geq I_{\max}/\sqrt{2}$, a pour largeur exacte

$$\Delta\omega = \omega_2-\omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \text{soit} \qquad Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Démonstration D. $\underline{Z} = R+\mathrm{j}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right) = R\left[1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]$ car $L\omega_0=\frac{1}{C\omega_0}=RQ$. Le module I_m est maximal quand le terme $Q^2(x-1/x)^2\geq 0$ est nul, soit $x=1$. Ensuite, $I_m = I_{\max}/\sqrt{2} \iff Q\left|x-\frac{1}{x}\right| = 1 \iff x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0$; les racines positives $x_{1,2} = \mp\frac{1}{2Q}+\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$ vérifient $x_2-x_1=1/Q$ (et $x_1x_2=1$). Aux deux pulsations de coupure, $Q(x-1/x)=\mp 1$: l'intensité est déphasée de $\pm\pi/4$ par rapport à e.



Remarque

Interprétation. À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert ; à haute fréquence, c'est la bobine. Dans les deux cas l'intensité est faible : elle n'est importante qu'au voisinage de ω_0, où les impédances de L et de C se compensent exactement.

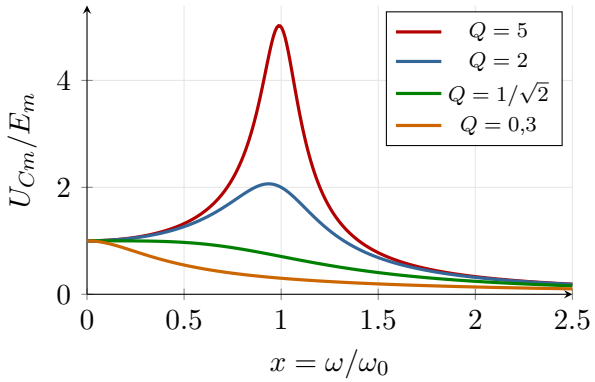
IV.2 Résonance en tension aux bornes du condensateur

Résonance en tension R D

$$\underline{U}_{Cm} = \frac{E_m}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}} \qquad U_{Cm} = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q^2}}}$$

U_{Cm} passe par un maximum si et seulement si $Q>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, à la pulsation $\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}<\omega_0$, où elle vaut $U_{Cm,\max}=\dfrac{2Q^2E_m}{\sqrt{4Q^2-1}}$. En $\omega=\omega_0$, $U_{Cm}=QE_m$ et u_C est en quadrature retard sur e. Pour $Q\gg 1$: $\omega_r\approx\omega_0$ et $U_{Cm,\max}\approx QE_m$: c'est une **surtension**.

Démonstration D. U_{Cm} est maximale quand $f(X) = (1-X)^2 + X/Q^2$, avec $X = x^2$, est minimale. $f'(X) = -2(1-X) + \frac{1}{Q^2}$ s'annule pour $X = 1 - \frac{1}{2Q^2}$, qui doit être positif : $Q > 1/\sqrt{2}$. Sinon, f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et U_{Cm} décroît dès $\omega = 0$.



✗ Attention, erreurs fréquentes

- Deux seuils différents à ne pas confondre : $Q = 1/2$ sépare les régimes transitoires apériodique et pseudo-périodique (**E3**) ; $Q = 1/\sqrt{2}$ conditionne l'existence de la résonance en tension.
- La résonance en intensité a toujours lieu en ω_0 et sa bande passante vaut *exactement* ω_0/Q ; pour la résonance en tension, $\Delta\omega \approx \omega_0/Q$ seulement si $Q \gg 1$. Pour mesurer Q, on exploite donc de préférence la résonance en intensité.
- À haute fréquence, la phase de u_C tend vers $-\pi$ et non vers $+\pi$: la partie imaginaire du dénominateur, x/Q, reste positive.

Remarque

Analogie mécanique (M5). Pour un oscillateur masse-ressort forcé, la résonance en **vitesse** correspond à la résonance en intensité (toujours en ω_0), la résonance en **élongation** à la résonance en tension u_C (donc en charge q), qui n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$.

IV.3 Le circuit LC idéal

Pour $R = 0$ ($Q \to \infty$), l'amplitude diverge en ω_0 : cette résonance infinie n'est pas physique, car la résistance des fils et de la bobine limite toujours l'amplitude. L'impédance $\mathrm{j}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ d'un LC série s'annule en ω_0 ; celle d'un LC parallèle devient au contraire infinie : c'est le circuit « bouchon ».

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 **Exploiter une courbe de résonance** ✦✦✧✧✧

Un circuit RLC série ($C = 0{,}47\,\mu\mathrm{F}$), alimenté sous $E_{\text{eff}} = 2{,}0\,\mathrm{V}$, présente une résonance en intensité à $f_0 = 2{,}32\,\mathrm{kHz}$ et une bande passante $\Delta f = 290\,\mathrm{Hz}$.

Q-1) Déterminer Q et L.

Q-2) En déduire la résistance totale R du circuit, l'intensité efficace à la résonance et la tension efficace aux bornes de C à f_0.

EXERCICE 5 **Résonance aux bornes de la bobine** ✦✦✦✧✧

On prend maintenant la tension de sortie u_L aux bornes de la bobine du circuit RLC série.

Q-1) Montrer que $\underline{U}_{Lm} = \dfrac{-x^2 E_m}{1 - x^2 + \mathrm{j}x/Q}$.

Q-2) Établir la condition d'existence d'une résonance et la pulsation de résonance. Comparer à la résonance aux bornes du condensateur.

Q-3) Pour quelle pulsation u_L et e sont-elles en quadrature ?

V Puissance en régime sinusoïdal forcé

V.1 Puissance moyenne et facteur de puissance

Définition — Puissances R

La puissance instantanée reçue par un dipôle est $p(t) = u(t)\,i(t)$; sa **puissance moyenne** (ou active) est $\mathcal{P} = \langle p \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p\,\mathrm{d}t$. La **puissance apparente** est $S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, en volt-ampère.

Puissance moyenne R D

Pour $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ et $i = I_m \cos \omega t$, avec $\varphi = \arg \underline{Z}$:

$$\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \tfrac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = \mathrm{Re}(\underline{Z})\, I_{\text{eff}}^2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\big(\underline{U}_m\, \underline{I}_m^*\big)$$

$\cos\varphi$ est le **facteur de puissance**. On définit aussi la **puissance réactive** $\mathcal{Q} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi$ (en var) ; la puissance apparente vérifie $S^2 = \mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2$.

Démonstration D. $p = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi)\cos\omega t = \dfrac{U_m I_m}{2}\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right]$, dont la moyenne vaut $\dfrac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$. Avec $U_m = |\underline{Z}| I_m$ et $|\underline{Z}|\cos\varphi = \mathrm{Re}(\underline{Z})$, on obtient la deuxième forme.

Bilan du circuit RLC R

Une bobine ou un condensateur idéal ($\varphi = \pm\pi/2$) reçoit une puissance moyenne **nulle** : il échange de l'énergie avec le reste du circuit sans en consommer. Toute la puissance moyenne fournie par le générateur est dissipée dans les résistances.

Pourquoi relever le facteur de puissance ? Un générateur alimente une installation (puissance utile $\mathcal{P}_u = UI\cos\varphi$) à travers une ligne de résistance R, qui dissipe $\mathcal{P}_J = RI^2$. Le rendement du transport vaut

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_J} = \frac{1}{1 + \dfrac{R\,\mathcal{P}_u}{U^2 \cos^2\varphi}}.$$

À puissance utile fixée, on l'améliore en diminuant R (câbles plus gros), en augmentant U (haute tension) ou en rapprochant $\cos\varphi$ de 1.

☞ **Méthode — Relever le facteur de puissance** M

Une installation inductive (moteurs, $\cos\varphi < 1$) appelle, pour une même puissance active, un courant

efficace $I_{\text{eff}} = \dfrac{\mathcal{P}}{U_{\text{eff}} \cos\varphi}$ plus grand, donc davantage de pertes Joule en ligne. On place un condensateur en parallèle sur l'installation pour ramener $\cos\varphi$ vers 1 ; c'est pourquoi le distributeur impose un facteur de puissance minimal aux gros consommateurs (de l'ordre de $0{,}9$).

V.2 Adaptation d'impédance

Charge adaptée R

Un générateur de f.é.m. efficace E et d'impédance interne $\underline{Z}_g = R_g + \mathrm{j}X_g$ transfère une puissance moyenne maximale à une charge $\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$ lorsque

$$\underline{Z} = \underline{Z}_g^* \qquad (R = R_g,\ X = -X_g)$$

La puissance transférée vaut alors $\mathcal{P}_{\max} = \dfrac{E^2}{4R_g}$, avec un rendement de $50\,\%$.

Démonstration D. $\mathcal{P} = RI_{\text{eff}}^2 = \dfrac{RE^2}{(R+R_g)^2 + (X+X_g)^2}$ est maximal par rapport à X pour $X = -X_g$; reste $\dfrac{RE^2}{(R+R_g)^2}$, maximal pour $R = R_g$ (**E2**).

☞ **Exercices d'application**

EXERCICE 6 **Facteur de puissance d'un moteur** ✦✦✧✧✧

Un moteur est modélisé par un résistor R en série avec une bobine L. Alimenté sous $U = 220\,\text{V}$ efficaces à $50\,\text{Hz}$, il consomme $\mathcal{P} = 4{,}4\,\text{kW}$ avec $\cos\varphi = 0{,}6$.

Q-1) Calculer l'intensité efficace I en ligne, puis R et L.

Q-2) On branche un condensateur C en parallèle. Quelle valeur de C rend le facteur de puissance égal à 1 ? Calculer la nouvelle intensité en ligne et commenter.

VI Synthèse

★ À retenir

- $X_{\text{eff}} = X_m/\sqrt{2}$; $|\Delta\varphi| = \omega\Delta t$; le signal en avance atteint son maximum le premier.
- $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \to \mathrm{j}\omega$; $\underline{Z}_R = R$, $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$, $\underline{Z}_C = 1/(\mathrm{j}C\omega)$; toutes les lois des circuits résistifs s'appliquent aux impédances.
- RLC série : $\underline{I}_m = \dfrac{E_m/R}{1 + \mathrm{j}Q(x - 1/x)}$; résonance en intensité en ω_0 pour tout Q, $\Delta\omega = \omega_0/Q$ exactement.
- $U_{Cm} = \dfrac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}$: résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$, en $\omega_r < \omega_0$; $U_{Cm}(\omega_0) = QE_m$.
- $\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \mathrm{Re}(\underline{Z}) I_{\text{eff}}^2$; L et C idéaux : puissance moyenne nulle ; charge adaptée $\underline{Z} = \underline{Z}_g^*$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Erreurs classiques : additionner des tensions efficaces ; calculer une puissance avec des grandeurs complexes sans conjugaison ; oublier le $\pm\pi$ dans un argument de partie réelle négative ; confondre les seuils $Q = 1/2$ et $Q = 1/\sqrt{2}$.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 7 Méthode des trois voltmètres

Pour caractériser une bobine réelle (r, L), on la place en série avec un résistor $R = 50\,\Omega$, sous une tension sinusoïdale de fréquence $50\,\text{Hz}$. On mesure les tensions efficaces $U_R = 6{,}0\,\text{V}$ aux bornes de R, $U_B = 9{,}0\,\text{V}$ aux bornes de la bobine et $U = 13{,}0\,\text{V}$ aux bornes de l'ensemble.

Q-1) Tracer le diagramme de Fresnel des tensions.

Q-2) En déduire le déphasage φ_B de la tension de la bobine sur le courant, puis r et L.

EXERCICE 8 Identifier un dipôle inconnu à l'oscilloscope

Un résistor $R = 100\,\Omega$ est placé en série avec un dipôle inconnu D d'impédance $\underline{Z} = X + \text{j}Y$, le tout alimenté par un GBF de fréquence $50\,\text{Hz}$. L'oscilloscope montre la tension u_R aux bornes de R (amplitude $2{,}0\,\text{V}$) et, grâce au mode soustraction, la tension v aux bornes de D (amplitude $3{,}0\,\text{V}$) ; v atteint son maximum $3{,}3\,\text{ms}$ avant u_R.

Q-1) Pourquoi faut-il utiliser le mode soustraction (« mode math ») pour visualiser v ?

Q-2) Déterminer l'amplitude du courant, le module de $\underline{Z}$ et son argument.

Q-3) Calculer X et Y et proposer un modèle pour D.

EXERCICE 9 Circuit RLC série alimenté en courant

Un générateur idéal de courant impose $i(t) = I_m \cos \omega t$ dans un circuit RLC série. On note u la tension aux bornes de l'ensemble.

Q-1) Montrer que $\underline{U}_m = R\left[1 + \text{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right] I_m$.

Q-2) Montrer que U_m ne présente pas de résonance mais une **anti-résonance** (minimum) dont on donnera la pulsation et le déphasage. Dépend-elle de Q ?

Q-3) Une mesure donne un minimum de $U_m/I_m = 1{,}0\,\text{k}\Omega$ à $2{,}0\,\text{kHz}$, et $U_m/I_m = 1{,}41\,\text{k}\Omega$ à $1{,}8\,\text{kHz}$ et $2{,}2\,\text{kHz}$. En déduire R et Q.

EXERCICE 10 Circuit RLC parallèle et surintensité

Un résistor R, une bobine idéale L et un condensateur C sont associés en parallèle et alimentés par une source de courant $i = I_m \cos \omega t$.

Q-1) Exprimer l'admittance $\underline{Y}$ et montrer que l'amplitude U_m de la tension commune est maximale pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Q-2) Mettre $\underline{Y}$ sous la forme $\dfrac{1}{R}\left[1 + \text{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$ et exprimer Q. Comparer au circuit série.

Q-3) Que valent les amplitudes des courants dans L et dans C à la résonance ? Commenter.

EXERCICE 11 Adaptation d'une antenne

Un émetteur fonctionnant à $f = 100\,\text{MHz}$ alimente une antenne modélisée par un résistor $R = 75\,\Omega$ en parallèle avec un condensateur $C = 50\,\text{pF}$. L'émetteur est assimilable à un générateur de f.é.m. efficace E et d'impédance interne $\underline{Z}_g$.

Q-1) Exprimer la puissance moyenne reçue par l'antenne en fonction de E et des parties réelles et imaginaires X, Y de $\underline{Z}$ et X_g, Y_g de $\underline{Z}_g$.

Q-2) En déduire la condition d'adaptation. Que vaudrait la puissance reçue si l'antenne était purement réactive ?

Q-3) Montrer que l'adaptation est réalisée si l'émetteur a pour impédance interne un résistor R en parallèle avec une bobine L dont on calculera la valeur.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 12 Caractérisation d'une bobine réelle

Une bobine réelle (L, r) est placée en série avec un résistor $R_0 = 100\,\Omega$; l'ensemble est alimenté par un GBF de fréquence $1\,\text{kHz}$ et de tension efficace $U = 10{,}0\,\text{V}$.

Q-1) **Trois voltmètres.** On mesure $U_R = 2{,}97\,\text{V}$ aux bornes de R_0 et $U_b = 9{,}36\,\text{V}$ aux bornes de la bobine. Calculer l'intensité efficace et le module de l'impédance de la bobine, puis $\cos\varphi_b$, r et L. Pourquoi la détermination de r est-elle peu précise ?

Q-2) **Résonance.** On ajoute en série un condensateur de capacité C réglable. Pour quelle valeur de C l'intensité est-elle maximale à $1\,\text{kHz}$? Que valent alors l'intensité et la tension aux bornes du condensateur ?

Q-3) Calculer le facteur de qualité et la bande passante. Proposer un protocole pour mesurer r plus précisément.

EXERCICE 13 Circuit bouchon d'un récepteur radio

Un récepteur radio comporte une bobine $L = 100\,\mu\text{H}$, un condensateur de capacité variable C et un résistor $R = 50\,\text{k}\Omega$, en parallèle, alimentés par l'antenne, modélisée par une source de courant sinusoïdal.

Q-1) Exprimer l'admittance $\underline{Y}$ et montrer que la tension aux bornes du circuit est maximale à $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Pourquoi parle-t-on de circuit bouchon ?

Q-2) Quelle valeur donner à C pour recevoir une station émettant à $1\,\text{MHz}$?

Q-3) Montrer que $\dfrac{U}{U_{\max}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}}$ avec $Q = R\sqrt{C/L}$. Calculer Q et la bande passante.

Q-4) Une station voisine émet à $1{,}009\,\text{MHz}$. De quel facteur son signal est-il atténué ? Conclure.

EXERCICE 14 Relèvement du facteur de puissance d'un atelier

Un atelier alimenté sous $U = 230\,\text{V}$ efficaces à $50\,\text{Hz}$ consomme $\mathcal{P} = 11{,}5\,\text{kW}$ avec $\cos\varphi = 0{,}70$ (inductif). La ligne d'alimentation a une résistance de $0{,}2\,\Omega$.

Q-1) Calculer le courant appelé et les pertes en ligne.

Q-2) Montrer qu'un condensateur C placé en parallèle sur l'atelier ne modifie pas la puissance active et que le nouveau facteur de puissance vérifie $C\omega U^2 = \mathcal{P}(\tan\varphi - \tan\varphi')$.

Q-3) Quelle capacité choisir pour obtenir $\cos\varphi' = 0{,}95$? Calculer le nouveau courant et les nouvelles pertes.