LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

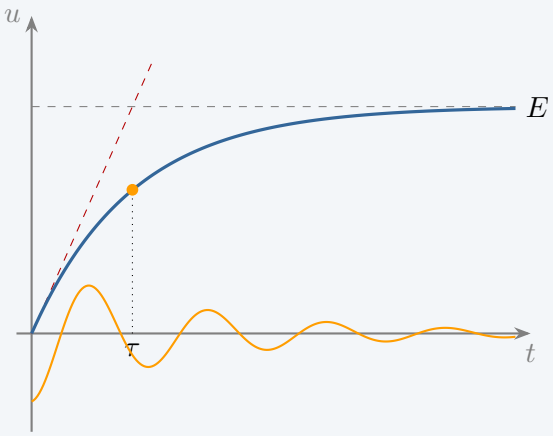
Classes préparatoires aux grandes écoles
MPSI — Physique-chimie
Année 2026-2027

E3

ÉLECTRONIQUE

Régime transitoire des circuits du premier et du second ordre

Échelon et conditions initiales — Circuits RC et RL — Méthode d'Euler — Oscillateur harmonique LC — Circuit RLC et facteur de qualité — Portrait de phase



« *Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit.*

— Gaston Bachelard, *La Formation de l'esprit scientifique* (1938)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Circuit RC ou RL : premier ordre »

E3 — Régime transitoire

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Déterminer les conditions initiales d'un circuit grâce à la continuité de u_C et de i_L, et son régime permanent continu.
- Établir et résoudre l'équation différentielle d'un circuit RC ou RL soumis à un échelon ; écrire directement la solution $x_\infty + (x(0^+) - x_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau}$.
- Lire une constante de temps sur un relevé ; connaître les temps de réponse et réaliser un bilan énergétique.
- Mettre en œuvre la méthode d'Euler pour résoudre numériquement une équation du premier ordre.
- Établir l'équation canonique de l'oscillateur harmonique et du circuit RLC ; définir ω_0 et Q.
- Reconnaître les régimes apériodique, critique et pseudo-périodique ; exploiter pseudo-période et décrément logarithmique.
- Utiliser l'analogie électromécanique et interpréter un portrait de phase.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Circuit RC ou RL : premier ordre » permet de faire varier R, C ou L et d'observer en direct la réponse d'un circuit du premier ordre à un échelon, la constante de temps et la tangente à l'origine.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

Introduction . . . 4
I Échelon de tension et conditions initiales . . . 4
I.1 Échelon, régimes transitoire et permanent . . . 4
I.2 Conditions initiales . . . 4
II Circuit RC série : charge et décharge d'un condensateur . . . 5
II.1 Analyse qualitative et dimensionnelle . . . 5
II.2 Équation différentielle et résolution . . . 5
II.3 Solution générale d'un circuit du premier ordre . . . 6
II.4 Bilan énergétique de la charge . . . 6
II.5 Décharge d'un condensateur (régime libre) . . . 7
III Circuit RL série . . . 8
IV Résolution numérique : méthode d'Euler . . . 9
V L'oscillateur harmonique : circuit LC . . . 10
VI Circuit RLC série : oscillateur amorti . . . 11
VI.1 Équation canonique . . . 11
VI.2 Régime libre : trois régimes . . . 11
VI.3 Caractéristiques du régime pseudo-périodique . . . 12
VI.4 Bilan énergétique et facteur de qualité . . . 13
VII Analogie électromécanique et portrait de phase . . . 14
VII.1 Analogie électromécanique . . . 14
VII.2 Portrait de phase . . . 15
VIII Synthèse . . . 15
IX Exercices d'approfondissement . . . 16

X Classiques des concours 18

Introduction

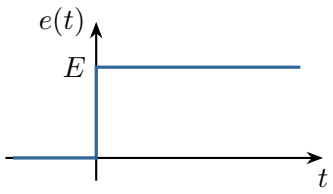
Lorsqu'on ferme un interrupteur, un circuit qui contient un condensateur ou une bobine ne change pas d'état en un instant. Il traverse d'abord un **régime transitoire**, dont la durée est fixée par ses composants, puis atteint un nouveau **régime permanent**. L'étude de ces transitoires, qui conduit à des équations différentielles linéaires du premier ou du second ordre, est l'occasion de dégager des notions qui dépassent largement l'électronique : temps caractéristique, oscillateur harmonique, amortissement et facteur de qualité. Les mêmes équations décrivent la chute d'un objet freiné, la décharge d'un nuage orageux ou les oscillations d'une suspension de voiture (**M5**).

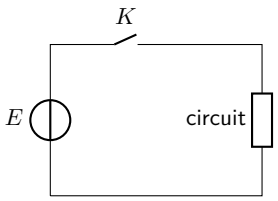
I Échelon de tension et conditions initiales

I.1 Échelon, régimes transitoire et permanent

Définition — Échelon de tension R

Un **échelon de tension** d'amplitude E est une tension $e(t)$ nulle pour $t < 0$ et égale à E pour $t > 0$. En pratique, il suffit que la durée du basculement soit très courte devant les autres durées du problème ; on le réalise en fermant un interrupteur à $t = 0$, ou avec un générateur de signaux créneaux de période grande devant le temps caractéristique du circuit.





Définition — Régime transitoire, régime permanent R

Après l'échelon, le circuit évolue pendant un **régime transitoire** vers un **régime permanent** (ou établi), dans lequel les grandeurs électriques ont la même forme que l'excitation : constantes pour un échelon. Un régime sans source est dit **libre**.

Régime permanent continu R

Toutes les dérivées temporelles sont nulles : le **condensateur** se comporte comme un **interrupteur ouvert** ($i_C = C\,\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t = 0$) et la **bobine idéale** comme un **fil** ($u_L = L\,\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t = 0$).

I.2 Conditions initiales

On rappelle (**E2**) que l'énergie stockée $\frac{1}{2}Cu_C^2$ ou $\frac{1}{2}Li_L^2$ est une fonction continue du temps.

☞ Méthode — Déterminer les conditions initiales M

1. Étudier le circuit pour $t < 0$, le plus souvent en régime permanent continu (condensateur = interrupteur ouvert, bobine = fil) : on obtient $u_C(0^-)$ et $i_L(0^-)$.
2. Utiliser la **continuité** : $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ et $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
3. En déduire les autres grandeurs en $t = 0^+$ (qui, elles, peuvent être discontinues) en appliquant les lois de Kirchhoff au circuit à l'instant 0^+.

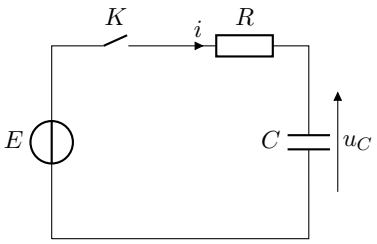
✗ Attention, erreurs fréquentes

On n'écrit jamais la continuité de l'intensité dans un condensateur ni de la tension aux bornes d'une bobine : ce sont précisément ces grandeurs qui peuvent sauter. Passer toujours par la grandeur continue (u_C ou i_L), puis par les lois de Kirchhoff.

II Circuit RC série : charge et décharge d'un condensateur

II.1 Analyse qualitative et dimensionnelle

Le condensateur est initialement déchargé ; à $t = 0$, on ferme K. Juste après la fermeture, $u_C(0^+) = 0$: le condensateur se comporte comme un fil et l'intensité vaut E/R. Au bout d'un temps long, le régime permanent est atteint : $i = 0$ et $u_C = E$. Entre les deux, le condensateur se charge.



Analyse dimensionnelle. La seule durée que l'on puisse former avec R (en $\mathrm{V\cdot A^{-1}}$), C (en $\mathrm{C\cdot V^{-1}} = \mathrm{A\cdot s\cdot V^{-1}}$) et E est RC, qui ne dépend pas de E : le temps caractéristique du transitoire est donc proportionnel à RC et indépendant de l'amplitude de l'échelon. C'est une propriété générale des systèmes linéaires. L'analyse dimensionnelle ne donne cependant ni le facteur numérique, ni la forme de l'évolution.

II.2 Équation différentielle et résolution

Charge d'un condensateur R D

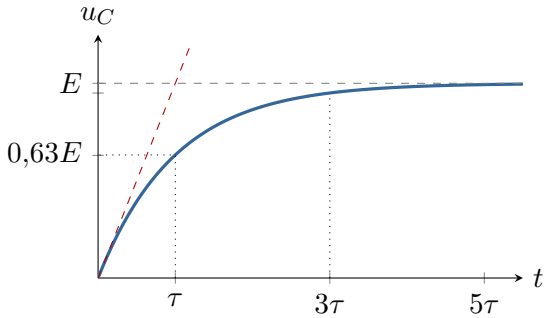
La loi des mailles $u_C + Ri = E$ et la relation $i = C\,\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$ conduisent à l'équation canonique

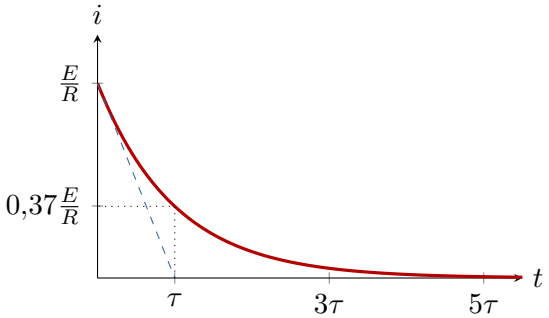
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC$$

Avec la condition initiale $u_C(0^+) = 0$, la solution est

$$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Démonstration D. L'équation est linéaire, du premier ordre, à coefficients constants. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène, $A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et d'une solution particulière, cherchée de la forme du second membre : la constante E. Ainsi $u_C(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$. La condition initiale s'applique à cette **solution complète** : $u_C(0^+) = A + E = 0$, d'où $A = -E$.





Lecture de la constante de temps R

- À $t = \tau$, $u_C = E(1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 0{,}63\,E$: le condensateur est chargé à $63\,\%$.
- La tangente à l'origine coupe l'asymptote $u_C = E$ à l'instant $t = \tau$.
- Temps de montée (de $10\,\%$ à $90\,\%$ de la valeur finale) : $t_m = \tau \ln 9 \approx 2{,}2\,\tau$, facile à mesurer à l'oscilloscope.
- Temps de réponse à $5\,\%$: $t_{95} = \tau \ln 20 \approx 3\tau$; à $1\,\%$: $t_{99} = \tau \ln 100 \approx 4{,}6\tau$. On retient : **la durée du régime transitoire est de quelques τ.**

Remarque

Sur un relevé expérimental, la méthode des $63\,\%$ est plus fiable que celle de la tangente, dont le tracé est imprécis. Remarquer aussi que l'intensité est **discontinue** en $t = 0$ (0 puis E/R), alors que u_C est continue. Pour $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$, $\tau = 0{,}1\,\mathrm{ms}$: le transitoire est terminé en moins d'une milliseconde.

II.3 Solution générale d'un circuit du premier ordre

☞ Méthode — Écrire directement la solution M

Toute grandeur $x(t)$ d'un circuit du premier ordre soumis à une excitation constante pour $t > 0$ s'écrit

$$\boxed{x(t) = x_\infty + \big(x(0^+) - x_\infty\big)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

- x_∞ : valeur en régime permanent (condensateur = interrupteur ouvert, bobine = fil) ;
- $x(0^+)$: valeur initiale, obtenue par continuité de u_C ou i_L ;
- $\tau = R_{\mathrm{Th}}C$ ou L/R_{Th}, où R_{Th} est la résistance vue par le condensateur ou la bobine, sources éteintes.

La constante de temps est une propriété du **circuit** : elle est la même pour toutes les grandeurs (tension, intensité, charge).

II.4 Bilan énergétique de la charge

Bilan de la charge R D

En multipliant la loi des mailles par i : $E\,i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}Cu_C^2\right) + Ri^2$. En intégrant de 0 à $+\infty$:

$$\underbrace{\int_0^\infty Ei\,\mathrm{d}t}_{W_g = CE^2} = \underbrace{\tfrac{1}{2}CE^2}_{\text{stockée dans } C} + \underbrace{\int_0^\infty Ri^2\,\mathrm{d}t}_{W_J = \frac{1}{2}CE^2}$$

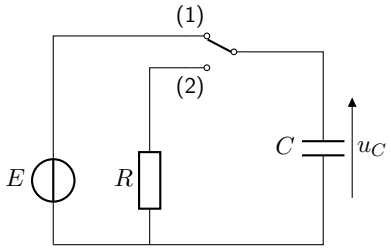
Le générateur fournit CE^2 (il débite la charge $q = CE$ sous la tension constante E) : **la moitié** est stockée dans le condensateur, **l'autre moitié** est dissipée par effet Joule, **quelle que soit** la valeur de R. Le rendement de la charge par un échelon vaut toujours $1/2$.

II.5 Décharge d'un condensateur (régime libre)

Le condensateur est chargé ($u_C(0^-) = E$) ; à $t = 0$, on bascule K en position (2). L'équation devient $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{\tau} = 0$, d'où

$$u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad i(t) = -\frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Toute l'énergie $\frac{1}{2}CE^2$ initialement stockée est dissipée par effet Joule dans R.



Remarque

Portrait de phase du circuit RC. En éliminant le temps entre $u_C(t)$ et $i(t)$ lors de la charge, on obtient $i = \dfrac{E - u_C}{R}$: dans le plan (u_C, i), la trajectoire est un segment de droite de pente $-1/R$ parcouru de $(0, E/R)$ vers $(E, 0)$. Une trajectoire ouverte qui aboutit à un point fixe traduit un retour à l'équilibre sans oscillation. De même, pour le circuit RL, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{L} - \dfrac{i}{\tau}$: dans le plan $(i, \mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$, les trajectoires sont des droites parallèles de pente $-1/\tau$, quelle que soit la valeur de E.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Lire une constante de temps

✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer τ pour un circuit RC ($R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 100\,\mathrm{nF}$). Vérifier que RC est homogène à un temps.

Q-2) Un condensateur se décharge de $10\,\mathrm{V}$ à $5\,\mathrm{V}$ en $3{,}5\,\mathrm{ms}$. Que vaut τ ?

Q-3) On enregistre la charge d'un condensateur à travers $R = 2{,}2\,\mathrm{k\Omega}$ sous $E = 5\,\mathrm{V}$: u_C atteint $3{,}16\,\mathrm{V}$ à $t = 2{,}2\,\mathrm{ms}$ et la tangente à l'origine a pour pente $2{,}27 \times 10^3\,\mathrm{V\cdot s^{-1}}$. Déterminer τ de deux façons et en déduire C.

Correction

Q-1) $\tau = RC = 1\,\mathrm{ms}$; $[R][C] = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot \dfrac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V}} = \mathrm{s}$.

Q-2) $E\mathrm{e}^{-t_{1/2}/\tau} = E/2$ donne $t_{1/2} = \tau \ln 2$, d'où $\tau = 5{,}0\,\mathrm{ms}$.

Q-3) $3{,}16 = 0{,}63\,E$: $\tau = 2{,}2\,\mathrm{ms}$; pente à l'origine E/τ : $\tau = 5/2270 = 2{,}2\,\mathrm{ms}$. Donc $C = \tau/R = 1{,}0\,\mathrm{\mu F}$.

EXERCICE 2 — Circuit RC alimenté par un générateur réel

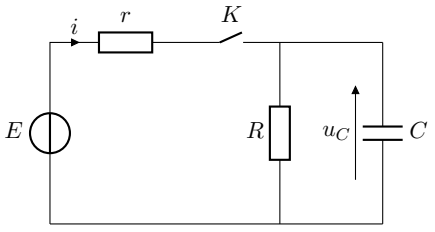
✦✦✧✧✧

Un générateur de Thévenin (E, r) est relié à $t = 0$ à l'association parallèle d'un résistor R et d'un condensateur C initialement déchargé.

Q-1) Déterminer $i(0^+)$ et $i(\infty)$, l'intensité débitée par le générateur.

Q-2) Déterminer la constante de temps du circuit.

Q-3) En déduire $i(t)$ et $u_C(t)$ sans résoudre d'équation différentielle.



Correction

Q-1) $u_C(0^+) = 0$: le condensateur court-circuite R, donc $i(0^+) = E/r$. En régime permanent, le condensateur est ouvert : $i(\infty) = \dfrac{E}{r+R}$.

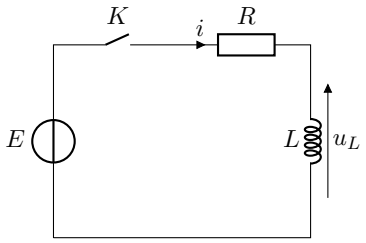
Q-2) Vu du condensateur, sources éteintes : $R_{\text{Th}} = r \parallel R$, donc $\tau = \dfrac{rR}{r+R}\,C$.

Q-3) $i(t) = \dfrac{E}{r+R} + \left(\dfrac{E}{r} - \dfrac{E}{r+R}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et $u_C(t) = \dfrac{R}{r+R}E\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

III Circuit RL série

À $t = 0$, on ferme K ; $i(0^-) = 0$. La loi des mailles $Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$



La continuité de l'intensité dans la bobine donne $i(0^+) = 0$, d'où

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right), \qquad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Remarque

La bobine s'oppose aux variations de l'intensité (loi de modération de Lenz) : c'est i_L qui est continue, tandis que u_L saute de 0 à E. En régime permanent, l'énergie stockée vaut $\frac{1}{2}LI^2$ avec $I = E/R$. Pour $L = 50\,\text{mH}$ et $R = 100\,\Omega$, $\tau = 0{,}5\,\text{ms}$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Lors de l'**ouverture** brutale d'un circuit inductif, l'intensité ne peut pas s'annuler instantanément : $u_L = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ devient très grande et une étincelle jaillit entre les contacts. On protège le circuit par une **diode de roue libre** placée en parallèle sur la bobine, qui offre un chemin au courant (voir les classiques des concours).

☞ Exercices d'application

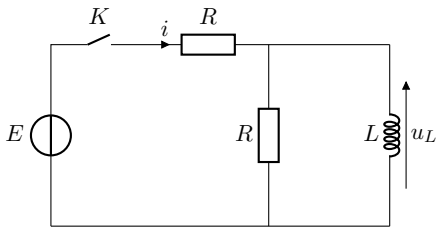
EXERCICE 3 Circuit RL parallèle ✦✦✧✧✧

L'interrupteur est ouvert depuis longtemps ; à $t = 0$, on ferme K.

Q-1) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_L(t)$ pour $t > 0$.

Q-2) Déterminer $u_L(0^+)$, puis $u_L(t)$.

Q-3) u_L vaut un dixième de sa valeur initiale au bout de $t_0 = 3{,}0\,\mu\text{s}$, avec $R = 1{,}0\,\text{k}\Omega$. En déduire L.



Correction

Q-1) Loi des nœuds : $i = \dfrac{u_L}{R} + i_L$; maille : $E = Ri + u_L = 2u_L + Ri_L$. En dérivant, avec $\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u_L}{L}$: $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_L}{\tau} = 0$ avec $\tau = \dfrac{2L}{R}$. On retrouve $\tau = L/R_{\text{Th}}$ avec $R_{\text{Th}} = R \parallel R = R/2$.

Q-2) $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$, donc $E = 2u_L(0^+)$ et $u_L(t) = \dfrac{E}{2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Q-3) $t_0 = \tau \ln 10 = \dfrac{2L}{R}\ln 10$, d'où $L = \dfrac{Rt_0}{2\ln 10} \approx 0{,}65\,\text{mH}$.

EXERCICE 4 Échelon de courant

Une source idéale de courant délivre, à partir de $t = 0$, l'intensité constante I_0 dans l'association parallèle d'un résistor R et d'un condensateur C initialement déchargé.

Q-1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u commune.

Q-2) La résoudre et tracer l'allure de $u(t)$. Que devient la solution si $R \to \infty$?

Correction

Q-1) Loi des nœuds : $I_0 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{R}$, soit $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{RC} = \dfrac{I_0}{C}$.

Q-2) $u(t) = RI_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}\right)$: même allure que la charge sous échelon de tension, avec $u_\infty = RI_0$. Si $R \to \infty$, $u \approx \dfrac{I_0}{C}t$ (développement de l'exponentielle) : la tension croît linéairement, c'est le principe des générateurs de rampe.

IV Résolution numérique : méthode d'Euler

Lorsque l'excitation n'est pas un simple échelon (rampe, signal quelconque), on peut résoudre l'équation $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{e(t) - u}{\tau}$ numériquement. On discrétise le temps avec un pas h : $t_k = kh$, et on approche la dérivée par un taux d'accroissement :

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} \approx \frac{e(t_k) - u_k}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad u_{k+1} = u_k + \frac{h}{\tau}\big(e(t_k) - u_k\big)$$

C'est le schéma d'**Euler explicite** : connaissant u_0, on calcule de proche en proche toutes les valeurs.

Programme Python (réponse d'un circuit RC à une rampe puis un palier)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

R, C = 1e3, 1e-6              # ohm, farad
tau = R*C
E, T = 2.0, 1e-3              # palier atteint au bout de T

def e(t):                     # rampe de 0 a E entre 0 et T, puis palier
    return E*t/T if t < T else E

h = tau/50                    # pas petit devant tau
t = np.arange(0, 6*tau, h)
u = np.zeros(len(t))          # u(0) = 0 : condensateur decharge
```

```
for k in range(len(t)-1):
    u[k+1] = u[k] + h*(e(t[k]) - u[k])/tau

plt.plot(t*1e3, [e(x) for x in t], label="e(t)")
plt.plot(t*1e3, u, label="u_C(t)")
plt.xlabel("t (ms)"); plt.legend(); plt.grid(); plt.show()
```

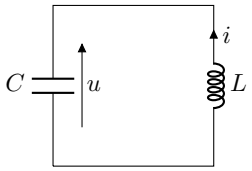
Remarque

La précision dépend du pas : il faut $h \ll \tau$. Si $h > 2\tau$, le schéma devient même instable (les valeurs calculées divergent en oscillant). On valide toujours un programme en comparant sa sortie à une solution exacte connue, par exemple la réponse à un échelon.

V L'oscillateur harmonique : circuit LC

Un condensateur chargé sous E est relié à $t = 0$ à une bobine idéale. Avec $i = -C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ (décharge) et $u = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,u = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Oscillateur harmonique R D

L'équation $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ caractérise un **oscillateur harmonique** de pulsation propre ω_0 (en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$). Sa solution générale s'écrit

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = U_m\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

les constantes étant fixées par $u(0)$ et $\dot{u}(0)$. La période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ne dépend pas des conditions initiales : c'est l'**isochronisme** des oscillations.

Démonstration D. L'équation caractéristique $r^2 + \omega_0^2 = 0$ a pour racines $\pm\mathrm{j}\omega_0$; les solutions réelles sont les combinaisons de $\cos\omega_0 t$ et $\sin\omega_0 t$. Ici $u(0) = E$ et $\dot{u}(0) = -i(0)/C = 0$ (continuité de i dans la bobine) : $u(t) = E\cos(\omega_0 t)$ et $i(t) = E\sqrt{C/L}\,\sin(\omega_0 t)$.

Conservation de l'énergie D

En multipliant $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = u$ par i et en utilisant $i = -C\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}Cu^2 + \tfrac{1}{2}Li^2\right) = 0$. L'énergie totale se conserve ; elle oscille entre le condensateur (forme électrique) et la bobine (forme magnétique), à la pulsation $2\omega_0$.

Remarque

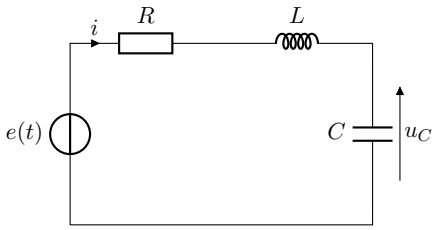
On écrit l'unité de ω_0 en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ plutôt qu'en s^{-1} pour rappeler que $\omega_0 t$ est un angle. Pour $L = 10\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mu\mathrm{F}$: $\omega_0 = 1\times10^4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $f_0 = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$.

VI Circuit RLC série : oscillateur amorti

VI.1 Équation canonique

La loi des mailles $u_C + Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = e(t)$, avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, donne

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e(t).$$



Définition — Forme canonique d'un oscillateur amorti R

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e(t) \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ω_0 est la **pulsation propre** et Q, sans dimension, le **facteur de qualité**. On rencontre aussi le coefficient d'amortissement réduit $\xi = 1/(2Q)$, ou le coefficient $\alpha = \dfrac{\omega_0}{2Q} = \dfrac{R}{2L}$ (en s^{-1}), avec lequel l'équation s'écrit $\ddot{u} + 2\alpha\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 e$.

Remarque

L'analyse dimensionnelle ne suffit plus ici : avec R, L et C, on peut former deux durées, $\sqrt{LC}$ et L/R (ou RC), dont le rapport est un nombre sans dimension, Q. Le comportement dépend de ce nombre.

VI.2 Régime libre : trois régimes

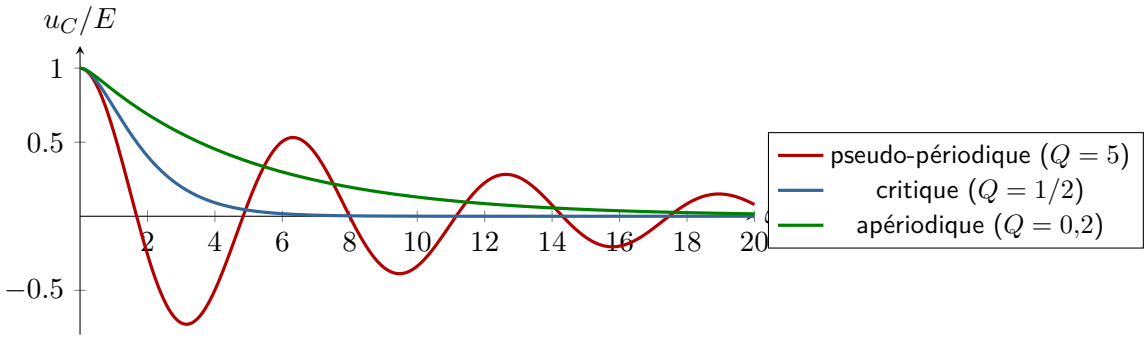
En régime libre ($e = 0$), on cherche des solutions en e^{rt} : l'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$.

Régimes du circuit RLC libre R

- $Q < \frac{1}{2}$ ($\Delta > 0$) : **régime apériodique**. Deux racines réelles négatives $r_\pm = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$; $u_C = A\,\mathrm{e}^{r_+ t} + B\,\mathrm{e}^{r_- t}$.
- $Q = \frac{1}{2}$ ($\Delta = 0$) : **régime critique**. $u_C = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$.
- $Q > \frac{1}{2}$ ($\Delta < 0$) : **régime pseudo-périodique**.

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\big(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\big), \qquad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}, \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Les constantes se déterminent par $u_C(0^+)$ et $\dot{u}_C(0^+) = i(0^+)/C$ (continuités de u_C et de i_L). En régime forcé par un échelon E, on ajoute la solution particulière $u_C = E$.



Régime libre du circuit RLC série : $u_C(0) = E$, $i(0) = 0$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

« Apériodique » signifie sans oscillation, mais pas forcément monotone : selon les conditions initiales, u_C peut dépasser une fois sa valeur finale avant d'y revenir. Par ailleurs, en régime apériodique, la constante de temps la plus longue ne se lit ni par la tangente à l'origine ni par la méthode des $63\,\%$, qui ne valent que pour une exponentielle unique.

VI.3 Caractéristiques du régime pseudo-périodique

Pseudo-période et décrément logarithmique R

- **Pseudo-période** : $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} > T_0$; dès que Q dépasse quelques unités, $T \approx T_0$ (pour $Q = 2$, $\Omega \approx 0{,}97\,\omega_0$).
- **Décrément logarithmique** : $\delta = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{u(t)}{u(t+nT)} = \dfrac{T}{\tau} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \approx \dfrac{\pi}{Q}$ si $Q \gg 1$.
- **Nombre d'oscillations visibles** : de l'ordre de Q ; l'amplitude est divisée par $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23$ au bout de Q pseudo-périodes.
- **Durée du transitoire** : l'enveloppe $\mathrm{e}^{-t/\tau}$, avec $\tau = 1/\alpha = 2Q/\omega_0$ (temps de relaxation), est divisée par e à chaque durée τ ; le transitoire a disparu au bout de quelques τ. On a aussi $\delta = \alpha T$.

☞ Méthode — Exploiter un oscillogramme M

Mesurer T entre deux maxima, puis le rapport de deux maxima séparés de n pseudo-périodes : $\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u(t)}{u(t+nT)}$. En déduire $Q \approx \pi/\delta$ et $\omega_0 \approx 2\pi/T$ (si $Q \gg 1$), puis L, C ou la résistance totale du circuit.

Quel régime choisir ? À ω_0 fixée, le régime critique est celui qui ramène le système à l'équilibre le plus vite **sans le dépasser** : on le recherche pour les appareils à aiguille ou les suspensions. Si l'on tolère un léger dépassement, on atteint plus vite la bande des $\pm 5\,\%$ autour de la valeur finale avec Q légèrement supérieur à $1/2$ (de l'ordre de $0{,}7$). Un « mauvais » oscillateur (faible Q) n'est pas un mauvais système : un amortisseur de voiture doit justement ne pas osciller.

VI.4 Bilan énergétique et facteur de qualité

Bilan d'énergie D

En multipliant la loi des mailles (avec $e = 0$) par i :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}Cu_C^2 + \tfrac{1}{2}Li^2\right) = -Ri^2 \leq 0$$

L'énergie électromagnétique totale décroît : elle est dissipée par effet Joule, tandis que condensateur et bobine échangent de l'énergie. Pour $Q \gg 1$, l'énergie perdue par pseudo-période est une fraction $2\pi/Q$ de l'énergie stockée : $Q = 2\pi \dfrac{\text{énergie stockée}}{\text{énergie dissipée par période}}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Les trois régimes ✦✧✧✧✧

On donne $L = 10\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mu\mathrm{F}$.

Q-1) Calculer ω_0, f_0 et la résistance critique R_c (pour laquelle $Q = 1/2$).

Q-2) Quel est le régime pour $R = 50\,\Omega$, $200\,\Omega$, $1\,\mathrm{k}\Omega$?

Q-3) Pour $R = 50\,\Omega$: calculer Q, la pseudo-pulsation, la pseudo-période, le décrément logarithmique, et estimer le nombre d'oscillations visibles.

Correction

Q-1) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}0 \times 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $f_0 = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$, $R_c = 2\sqrt{L/C} = 200\,\Omega$.

Q-2) Pseudo-périodique ($R < R_c$) ; critique ; apériodique.

Q-3) $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2$; $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/16} = 9{,}7 \times 10^3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; $T = 0{,}65\,\mathrm{ms}$; $\delta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{15}} = 1{,}6$; environ deux oscillations visibles.

EXERCICE 6 Identification d'un circuit RLC ✦✦✧✧✧

On observe à l'oscilloscope la décharge d'un condensateur $C = 220\,\mathrm{nF}$ dans une bobine (L, r). La pseudo-période vaut $T = 2{,}0\,\mathrm{ms}$ et deux maxima successifs valent $5{,}0\,\mathrm{V}$ et $3{,}9\,\mathrm{V}$.

Q-1) Déterminer le décrément logarithmique et le facteur de qualité (on supposera $Q \gg 1$ et on vérifiera).

Q-2) En déduire L et r.

Correction

Q-1) $\delta = \ln\dfrac{5{,}0}{3{,}9} = 0{,}25$ et $Q \approx \pi/\delta \approx 13 \gg 1$: hypothèse vérifiée.

Q-2) $\omega_0 \approx 2\pi/T = 3{,}1 \times 10^3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; $L = \dfrac{1}{C\omega_0^2} \approx 0{,}46\,\mathrm{H}$; $r = \dfrac{L\omega_0}{Q} \approx 1{,}1 \times 10^2\,\Omega$ (cette valeur inclut toutes les résistances du circuit).

EXERCICE 7 Réponse d'un RLC à un échelon ✦✦✧✧✧

Le circuit RLC série ($R = 100\,\Omega$, $L = 10\,\text{mH}$, $C = 1\,\mu\text{F}$), initialement au repos, est soumis à un échelon E.

Q-1) Calculer ω_0 et Q. Quel est le régime ?

Q-2) Donner les conditions initiales $u_C(0^+)$ et $\dot{u}_C(0^+)$.

Q-3) Établir $u_C(t)$.

Correction

Q-1) $\omega_0 = 1 \times 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $Q = 1$: régime pseudo-périodique, avec $\tau = 2Q/\omega_0 = 0{,}2\,\text{ms}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{3}/2$.

Q-2) Continuité de u_C et de i : $u_C(0^+) = 0$ et $\dot{u}_C(0^+) = i(0^+)/C = 0$.

Q-3) $u_C = E + \text{e}^{-t/\tau}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$; $u_C(0) = 0$ donne $A = -E$; $\dot{u}_C(0) = -A/\tau + B\Omega = 0$ donne $B = -\dfrac{E}{\Omega\tau} = -\dfrac{E}{\sqrt{3}}$. Ainsi $u_C(t) = E\left[1 - \text{e}^{-t/\tau}\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\Omega t\right)\right]$.

VII Analogie électromécanique et portrait de phase

VII.1 Analogie électromécanique

L'équation du circuit RLC série est formellement identique à celle d'une masse m reliée à un ressort de raideur k et soumise à un frottement fluide $-\lambda\dot{x}$ (**M5**) : $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$.

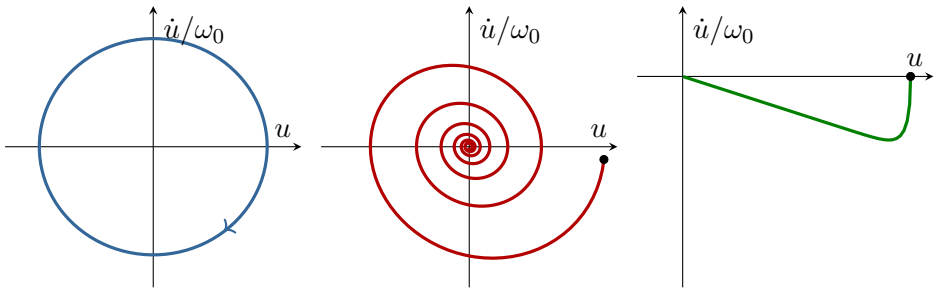
Électrique		**Mécanique**	
charge	q	élongation	x
intensité	$i = \dot{q}$	vitesse	$v = \dot{x}$
inductance	L	masse	m
inverse de la capacité	$1/C$	raideur	k
résistance	R	coefficient de frottement	λ
f.é.m.	$e(t)$	force	$F(t)$
énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2$		énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$	
énergie électrique $\frac{q^2}{2C}$		énergie potentielle élastique $\frac{1}{2}kx^2$	
$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $Q = L\omega_0/R$		$\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $Q = m\omega_0/\lambda$	

VII.2 Portrait de phase

Définition — Portrait de phase

Le **portrait de phase** d'un système décrit par $x(t)$ est l'ensemble des courbes paramétrées par t représentant $\dot{x}$ (ou $\dot{x}/\omega_0$) en fonction de x, chacune correspondant à une condition initiale (**trajectoire de phase**).

LC ($Q \to \infty$) : cercle | pseudo-périodique : spirale | apériodique



Lecture d'un portrait de phase M

- Trajectoire **fermée** ⇔ évolution **périodique** (pas de dissipation).
- Spirale convergeant vers un point ⇔ régime pseudo-périodique ; le point d'arrivée est une position d'équilibre stable, le nombre de tours est de l'ordre de Q.
- Convergence sans enroulement ⇔ régime apériodique ou critique.
- Les trajectoires sont parcourues dans le sens horaire : si $\dot{x} > 0$, x augmente.

VIII Synthèse

★ À retenir

- Régime permanent continu : condensateur = interrupteur ouvert, bobine = fil ; u_C et i_L continus.
- Premier ordre : $\dot{x} + x/\tau = x_\infty/\tau$, $\tau = RC$ ou L/R ; $x(t) = x_\infty + (x(0^+) - x_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau}$; $63\,\%$ à τ, $95\,\%$ à 3τ.
- Charge sous échelon : $W_g = CE^2$, moitié stockée, moitié dissipée, quel que soit R.
- Oscillateur harmonique : $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$, $u = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, énergie conservée.
- Second ordre : $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 e$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
- $Q < \frac{1}{2}$ apériodique, $Q = \frac{1}{2}$ critique, $Q > \frac{1}{2}$ pseudo-périodique ; $\tau = 2Q/\omega_0$, $\delta \approx \pi/Q$, environ Q oscillations visibles.
- Portrait de phase fermé ⇔ périodique ; spirale ⇔ amorti.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Erreurs classiques : appliquer la condition initiale à la seule solution homogène ; écrire la continuité de i_C ou de u_L ; confondre ω_0 et la pseudo-pulsation Ω lorsque Q est voisin de $1/2$; lire une constante de temps à $63\,\%$ sur une somme d'exponentielles.

IX Exercices d'approfondissement

EXERCICE 8 Transfert de charge entre deux condensateurs

✦✦✧✧✧

Un condensateur $C_1 = C$ chargé sous U_0 est relié à $t = 0$, à travers un résistor R, à un condensateur identique $C_2 = C$ initialement déchargé.

Q-1) Montrer que $u_1 + u_2$ reste constant et égal à U_0 (conservation de la charge). En déduire la tension finale commune.

Q-2) Établir l'équation vérifiée par $u_1 - u_2$ et donner la constante de temps. En déduire $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

Q-3) Faire le bilan énergétique. Calculer l'énergie dissipée ; dépend-elle de R ?

Correction

Q-1) La charge qui quitte l'armature de C_1 arrive sur celle de C_2 : $Cu_1 + Cu_2 = CU_0$. À la fin, $u_1 = u_2 = U_0/2$.

Q-2) $i = -C\dot{u}_1 = C\dot{u}_2$ et $u_1 - u_2 = Ri$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}(u_1-u_2)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{RC}(u_1-u_2)$: $\tau = RC/2$ et $u_1 - u_2 = U_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Ainsi $u_1 = \dfrac{U_0}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ et $u_2 = \dfrac{U_0}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

Q-3) $\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}CU_0^2$ et $\mathcal{E}_f = 2\times\frac{1}{2}C\frac{U_0^2}{4} = \frac{1}{4}CU_0^2$: la moitié est dissipée, $W_J = \frac{1}{4}CU_0^2$, **indépendamment de** R (même pour $R \to 0$: l'énergie est alors rayonnée dans une étincelle).

EXERCICE 9 Charger un condensateur par paliers

✦✦✧✧✧

On charge un condensateur C jusqu'à la tension E à travers un résistor R, en N paliers : la f.é.m. du générateur passe successivement de 0 à E/N, $2E/N$, …, E, chaque palier durant assez longtemps pour que la charge soit complète.

Q-1) Calculer l'énergie fournie par le générateur pendant le k^{e} palier, puis l'énergie totale fournie.

Q-2) En déduire le rendement $\rho = \dfrac{\text{énergie stockée}}{\text{énergie fournie}}$ en fonction de N. Combien de paliers faut-il pour que $\rho > 90\,\%$?

Q-3) Que se passe-t-il quand $N \to \infty$? Interpréter.

Correction

Q-1) Pendant le palier k, le générateur, de f.é.m. kE/N, débite la charge $\Delta q = CE/N$: $W_k = \dfrac{kE}{N}\cdot\dfrac{CE}{N} = \dfrac{CE^2k}{N^2}$. Au total, $W_g = \dfrac{CE^2}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k = \dfrac{CE^2(N+1)}{2N}$.

Q-2) $\rho = \dfrac{\frac{1}{2}CE^2}{W_g} = \dfrac{N}{N+1}$; $\rho > 0{,}9$ pour $N \geq 10$.

Q-3) $\rho \to 1$: une charge très progressive (« quasi statique ») se fait sans pertes. La charge brutale par un échelon est donc le pire procédé du point de vue énergétique.

EXERCICE 10 Antiparasitage d'un interrupteur

★★★☆☆

Un moteur est modélisé par une bobine $L = 10\,\text{mH}$ en série avec $R = 10\,\Omega$, alimentée sous $e = 12\,\text{V}$ à travers un interrupteur. Un condensateur C est placé aux bornes de l'interrupteur. À $t = 0$, l'interrupteur, fermé depuis longtemps, s'ouvre.

Q-1) Préciser les conditions initiales et établir l'équation vérifiée par la tension u aux bornes de l'interrupteur.

Q-2) En négligeant l'amortissement, montrer que $u_{\max} \approx e + I_0\sqrt{L/C}$ avec $I_0 = e/R$, lorsque le second terme domine.

Q-3) Sans condensateur, la capacité parasite de l'interrupteur vaut environ $10\,\text{pF}$. Calculer $u_{\max}$. Quelle capacité choisir pour limiter $u_{\max}$ à $500\,\text{V}$?

Correction

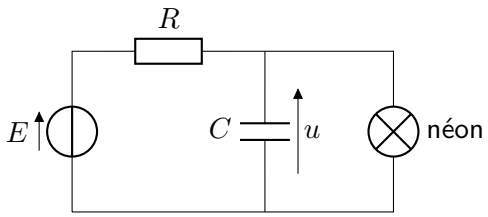
Q-1) $i(0^+) = I_0 = 1{,}2\,\text{A}$ (continuité dans la bobine), $u(0^+) = 0$ (continuité aux bornes de C). Maille : $e = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u$ avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, soit $LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u = e$.

Q-2) Sans amortissement : $u = e(1 - \cos\omega_0 t) + \dfrac{I_0}{C\omega_0}\sin\omega_0 t$, oscillation d'amplitude $\sqrt{e^2 + I_0^2 L/C}$ autour de e. Si $I_0\sqrt{L/C} \gg e$, $u_{\max} \approx e + I_0\sqrt{L/C}$: l'énergie magnétique $\frac{1}{2}LI_0^2$ est transférée au condensateur.

Q-3) $I_0\sqrt{L/C} = 1{,}2 \times \sqrt{10^9} \approx 38\,\text{kV}$: un arc électrique est inévitable. Pour $u_{\max} = 500\,\text{V}$: $C = L\left(\dfrac{I_0}{488}\right)^2 \approx 60\,\text{nF}$.

EXERCICE 11 Oscillateur de relaxation à lampe au néon

★★☆☆☆



Une lampe au néon se comporte comme un interrupteur ouvert tant qu'elle est éteinte ; elle s'allume lorsque la tension à ses bornes atteint U_a et décharge alors quasi instantanément le condensateur jusqu'à $U_e < U_a$, où elle s'éteint.

Q-1) Le condensateur étant chargé sous U_e à $t = 0$ (lampe éteinte), établir $u(t)$.

Q-2) À quelle condition sur E le montage oscille-t-il ? Calculer la période T.

Q-3) Application : $E = 100\,\text{V}$, $U_a = 80\,\text{V}$, $U_e = 60\,\text{V}$, $R = 1\,\text{M}\Omega$, $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$. Tracer $u(t)$.

Correction

Q-1) Lampe éteinte : charge à travers R, $u = E + (U_e - E)\mathrm{e}^{-t/RC}$.

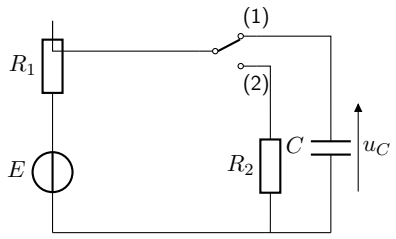
Q-2) Il faut que u atteigne U_a, donc $E > U_a$. La durée de charge de U_e à U_a est $T = RC\ln\dfrac{E - U_e}{E - U_a}$.

Q-3) $T = 0{,}1 \times \ln 2 \approx 69\,\text{ms}$ ($f \approx 14\,\text{Hz}$) : la tension évolue en dents de scie entre 60 et $80\,\text{V}$, avec des montées exponentielles et des chutes quasi verticales.

X Classiques des concours

EXERCICE 12 Flash électronique

Le condensateur ($C = 100\,\mu\text{F}$) d'un flash est chargé par une source ($E = 300\,\text{V}$, résistance $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$), puis déchargé dans la lampe, modélisée par un résistor $R_2 = 2\,\Omega$, en basculant l'interrupteur de (1) en (2).



Q-1) Exprimer $u_C(t)$ pendant la charge ; au bout de combien de temps le flash est-il prêt ($u_C \geq 0{,}99E$) ?

Q-2) Calculer l'énergie stockée et l'énergie fournie par la source pendant la charge.

Q-3) Établir $u_C(t)$ pendant la décharge. Quelle est la durée caractéristique de l'éclair ? Estimer la puissance moyenne reçue par la lampe.

Q-4) Pourquoi ne pas brancher directement la lampe sur la source ?

Correction

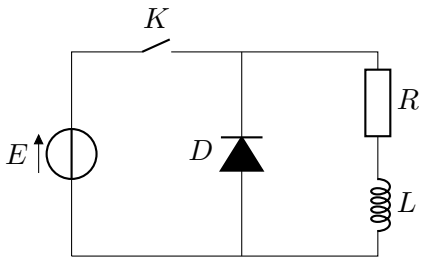
Q-1) $u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right)$ avec $\tau_1 = R_1 C = 1\,\text{s}$; $u_C \geq 0{,}99E$ pour $t \geq \tau_1 \ln 100 \approx 4{,}6\,\text{s}$.

Q-2) $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 = 4{,}5\,\text{J}$; la source fournit $CE^2 = 9\,\text{J}$ (la moitié est perdue dans R_1).

Q-3) $u_C = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_2 = R_2 C = 0{,}2\,\text{ms}$; l'énergie est libérée en quelques τ_2 : $\mathcal{P}_{\text{moy}} \sim \dfrac{4{,}5}{5 \times 0{,}2 \times 10^{-3}} \approx 4{,}5\,\text{kW}$.

Q-4) La source ne pourrait débiter que $E/R_1 = 30\,\text{mA}$, soit quelques watts : le condensateur sert de **réservoir d'énergie**, accumulée lentement et restituée très vite.

EXERCICE 13 Rupture du courant et diode de roue libre



Une bobine (L, R) est alimentée depuis longtemps par la source E, l'interrupteur K étant fermé. À $t = 0$, on ouvre K. Données : $E = 12\,\text{V}$, $R = 6\,\Omega$, $L = 0{,}5\,\text{H}$.

Q-1) En l'absence de la diode, évaluer l'ordre de grandeur de la tension aux bornes de la bobine si le courant s'annule en $\Delta t = 1\,\mu\text{s}$. Conséquence ?

Q-2) La diode, supposée idéale, est en place. Justifier qu'elle est bloquée pour $t < 0$ et passante après l'ouverture. Établir $i(t)$ pour $t > 0$.

Q-3) Quelle énergie est dissipée dans R après l'ouverture ?

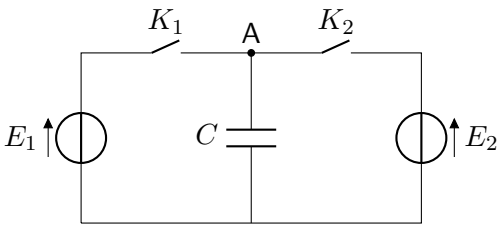
Correction

Q-1) Avant l'ouverture, $I_0 = E/R = 2\,\text{A}$. L'annulation forcée de i en Δt donne $|u_L| \approx LI_0/\Delta t = 1\times10^6\,\text{V}$: une étincelle jaillit entre les contacts (principe de l'allumage des moteurs à essence).

Q-2) Pour $t<0$, la diode est soumise à la tension $-E$: bloquée. Après l'ouverture, le courant de la bobine, qui ne peut pas s'annuler instantanément, se referme à travers la diode, qui devient passante : $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0$ avec $i(0^+)=I_0$, d'où $i=I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et $\tau=L/R\approx83\,\text{ms}$.

Q-3) Toute l'énergie magnétique initiale : $\frac12 LI_0^2 = 1\,\text{J}$.

EXERCICE 14 Résistance simulée par capacité commutée



Les interrupteurs, de résistance r lorsqu'ils sont fermés, sont commandés périodiquement (période T) : pour $nT<t<(n+\frac12)T$, K_1 est fermé et K_2 ouvert ; pour $(n+\frac12)T<t<(n+1)T$, c'est l'inverse. Le régime est périodique ; on note Q_0 la charge de l'armature reliée à A à $t=0^+$. Données : $T=10\,\mu\text{s}$, $r=100\,\Omega$, $C=10\,\text{nF}$, $E_1=5\,\text{V}$, $E_2=1\,\text{V}$.

Q-1) Établir et résoudre l'équation vérifiée par $q(t)$ pour $0<t<T/2$.

Q-2) Calculer $a=T/(2rC)$ et montrer qu'à $t=T/2$ la charge vaut CE_1 à moins de $1\,\%$ près.

Q-3) De même, montrer que $Q_0\approx CE_2$. Tracer l'allure de $q(t)$.

Q-4) Calculer la charge transférée de la source 1 à la source 2 à chaque période, puis l'intensité moyenne débitée par la source 1.

Q-5) Quelle résistance $R_{\text{éq}}$ placée entre les deux sources donnerait le même courant moyen ? Commenter.

Correction

Q-1) $E_1=ri+q/C$ avec $i=\dot q$: $rC\dot q+q=CE_1$, d'où $q(t)=CE_1+(Q_0-CE_1)\mathrm{e}^{-t/rC}$.

Q-2) $rC=1\,\mu\text{s}$, $a=5$ et $\mathrm{e}^{-5}\approx6{,}7\times10^{-3}$: l'écart relatif à CE_1 est inférieur à $1\,\%$.

Q-3) Sur la seconde demi-période, q tend de même vers CE_2 avec la constante de temps $rC=T/10$: $Q_0\approx CE_2$. La courbe est formée d'arcs exponentiels rapides montant de CE_2 à CE_1 puis redescendant (quasiment un créneau).

Q-4) $\Delta Q=C(E_1-E_2)=40\,\text{nC}$ par période, soit $\langle i_1\rangle=\dfrac{C(E_1-E_2)}{T}=4\,\text{mA}$.

Q-5) $R_{\text{éq}}=\dfrac{E_1-E_2}{\langle i_1\rangle}=\dfrac{T}{C}=1\,\text{k}\Omega$, indépendante de r. La résistance simulée se règle par la fréquence de commutation : c'est le principe des filtres à capacités commutées, faciles à intégrer sur une puce, où les résistances précises sont difficiles à réaliser.