LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

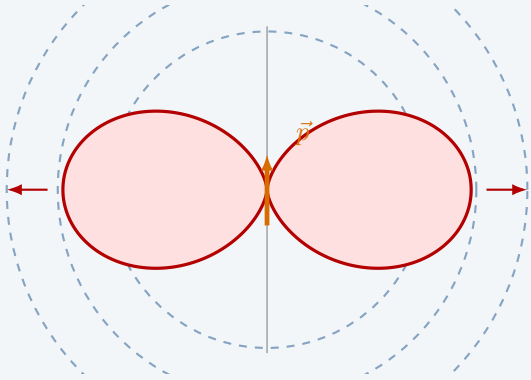
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

W3

PHYSIQUE DES ONDES

Rayonnement dipolaire

Dipôle oscillant — Trois échelles $a \ll \lambda \ll r$ — Champ rayonné — Puissance et indicatrice — Diffusion Rayleigh — Couleur et polarisation du ciel



« *La lumière est un phénomène électrique : la lumière en soi, toute lumière, celle du Soleil, celle d'une bougie, celle d'un ver luisant.*

— Heinrich Hertz, conférence *Sur les relations entre la lumière et l'électricité*, Heidelberg (1889)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Rayonnement dipolaire »

W3 — Rayonnement dipolaire

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Justifier le modèle du dipôle électrique oscillant et en citer des exemples dans différents domaines (antennes, atomes, molécules).
- Formuler et commenter les approximations reliant les trois longueurs du problème : taille a de la source, longueur d'onde λ, distance d'observation r ($a \ll \lambda \ll r$).
- Connaître les étapes qui conduisent au champ rayonné ; analyser la structure de ce champ (expressions fournies) : onde sphérique, structure locale d'onde plane, amplitude en $1/r$, anisotropie, polarisation.
- Calculer la puissance rayonnée par intégration du vecteur de Poynting ; tracer et interpréter l'indicatrice de rayonnement ; connaître la dépendance en ω^4.
- Modéliser la diffusion d'une onde par une molécule (charge élastiquement liée) : dipôle induit, puissance diffusée, résonance, domaine de Rayleigh.
- Expliquer la couleur du ciel, celle du Soleil couchant et la polarisation de la lumière diffusée.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Le programme précise que **les expressions des champs rayonnés sont admises et que leur mémorisation n'est pas exigible** : elles sont fournies par les énoncés. On doit en revanche savoir les analyser, justifier les approximations et en déduire la puissance rayonnée. La simulation PhysioNova « Rayonnement dipolaire » montre les fronts d'onde sphériques émis par le dipôle et l'indicatrice en $\sin^2\theta$.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Le dipôle électrique oscillant . . . 3
I.1 Les sources du rayonnement . . . 3
I.2 Les trois longueurs du problème . . . 3
II Champ rayonné dans la zone de rayonnement . . . 4
II.1 Étapes du calcul . . . 4
II.2 Structure du champ rayonné . . . 5
III Puissance rayonnée . . . 6
III.1 Vecteur de Poynting et indicatrice . . . 6
III.2 Puissance totale rayonnée . . . 7
IV Diffusion d'une onde par une molécule . . . 9
IV.1 Modèle de l'électron élastiquement lié . . . 9
IV.2 Puissance diffusée ; section efficace . . . 10
IV.3 Conséquences : couleur et polarisation du ciel . . . 11
V Synthèse . . . 11
VI Exercices d'approfondissement . . . 12
VII Classiques des concours . . . 13

I Le dipôle électrique oscillant

I.1 Les sources du rayonnement

Une charge immobile crée un champ électrostatique ; une charge en mouvement uniforme crée aussi un champ magnétique, mais ces champs l'accompagnent sans emporter d'énergie vers l'infini. Ce sont les **charges accélérées** qui rayonnent : les électrons d'une antenne parcourue par un courant alternatif, les électrons d'un atome ou d'une molécule soumis à une onde lumineuse, les électrons d'un synchrotron. La source la plus simple est le dipôle oscillant.

Définition — Moment dipolaire R

Pour une distribution de charges q_i placées en P_i, globalement neutre ($\sum q_i = 0$), le **moment dipolaire** $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$ ne dépend pas de l'origine O. Si $Q = \sum_{q_i>0} q_i$ et si G_- et G_+ sont les barycentres des charges négatives et positives, $\vec{p} = Q\,\overrightarrow{G_-G_+}$. Il s'exprime en $\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}$.

Définition — Dipôle oscillant de Hertz R

Une charge $-q$ est fixe en O ; une charge $+q$, en P, oscille sur l'axe Oz : $\overrightarrow{OP} = a\cos(\omega t)\,\vec{u}_z$. Le moment dipolaire vaut

$$\vec{p}(t) = p_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_z \qquad p_0 = qa \qquad \left(\underline{\vec{p}} = p_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{u}_z\right)$$

Tout système neutre dont les barycentres des charges positives et négatives oscillent l'un par rapport à l'autre se comporte, vu de loin, comme un tel dipôle.

Remarque

Antenne courte. Un brin conducteur de longueur ℓ, alimenté en son milieu par un courant $i(t) = I_0\cos\omega t$ supposé uniforme, accumule des charges $\pm q(t)$ à ses extrémités, avec $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Son moment dipolaire est $p = q\ell$, donc $\dot{p} = \ell\, i$: l'antenne est un dipôle oscillant d'amplitude $p_0 = \frac{\ell I_0}{\omega}$.

I.2 Les trois longueurs du problème

Approximations du rayonnement dipolaire R

On note a la taille de la source, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ la longueur d'onde et $r = OM$ la distance d'observation. On se place dans le cas

$$a \ll \lambda \ll r$$

Approximation	Condition	Justification
dipolaire	$a \ll r$	la source est vue de loin, comme ponctuelle : seul son moment dipolaire compte
non relativiste	$a \ll \lambda$	les charges ont une vitesse $v \sim a\omega \ll c$; la durée de propagation a/c d'un bout à l'autre de la source est négligeable devant la période
zone de rayonnement	$\lambda \ll r$	on ne garde que les termes en $1/r$ du champ, qui transportent l'énergie à l'infini

Justification de l'équivalence $v \ll c \iff a \ll \lambda$ D. La vitesse de la charge mobile est d'amplitude $v_{\max} = a\omega = 2\pi a\frac{c}{\lambda}$; donc $v_{\max} \ll c$ équivaut à $a \ll \frac{\lambda}{2\pi}$.

> **Remarque**
>
> Pour $r \ll \lambda$ (**zone proche** ou quasi statique), le retard r/c est négligeable devant la période : on retrouve à chaque instant le champ du dipôle électrostatique, en $1/r^3$ (chapitre EM2 de MPSI), qui ne transporte pas d'énergie en moyenne. La zone intermédiaire $r \sim \lambda$ n'est pas au programme.

Ordres de grandeur

Source	a	λ	distance usuelle r
Atome ou molécule (lumière)	$0{,}1\,\mathrm{nm}$	$0{,}5\,\mu\mathrm{m}$	$\gtrsim 1\,\mathrm{cm}$
Antenne radio AM ($1\,\mathrm{MHz}$)	dizaines de m	$300\,\mathrm{m}$	quelques km
Antenne Wi-Fi ($2{,}4\,\mathrm{GHz}$)	$3\,\mathrm{cm}$	$12{,}5\,\mathrm{cm}$	quelques m

Pour les antennes réelles, a est souvent de l'ordre de $\lambda/4$ ou $\lambda/2$: le modèle dipolaire reste qualitativement correct (forme de l'indicatrice).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Les trois échelles de longueur ✦✧✧✧✧

Les résultats de la zone de rayonnement (avec le modèle dipolaire) s'appliquent-ils dans les situations suivantes ?

Q-1) Une antenne de $2\,\mathrm{m}$ émettant à $1\,\mathrm{MHz}$, observée à $20\,\mathrm{km}$.

Q-2) Une molécule de diazote ($a \approx 0{,}1\,\mathrm{nm}$) diffusant la lumière solaire, observée depuis le sol.

Q-3) Un téléphone émettant à $1{,}8\,\mathrm{GHz}$ (antenne de $4\,\mathrm{cm}$), à $2\,\mathrm{cm}$ de la tête de l'utilisateur.

Q-4) Une antenne FM de $75\,\mathrm{cm}$ émettant à $100\,\mathrm{MHz}$, captée à $20\,\mathrm{km}$.

EXERCICE 2 — Dipôle équivalent à une antenne courte ✦✧✧✧✧

Une antenne courte de longueur $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ est parcourue par un courant d'amplitude $I_0 = 1{,}0\,\mathrm{A}$ à $f = 100\,\mathrm{MHz}$.

Q-1) Calculer l'amplitude p_0 du moment dipolaire et l'amplitude de la charge accumulée à chaque extrémité.

Q-2) Les conditions $a \ll \lambda$ et $v \ll c$ sont-elles vérifiées pour les électrons de conduction ? (Densité de courant dans le fil de cuivre de section $1\,\mathrm{mm}^2$: $j = 10^6\,\mathrm{A\cdot m^{-2}}$, $n^* = 8{,}5\times10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$.)

II Champ rayonné dans la zone de rayonnement

II.1 Étapes du calcul

Le calcul complet n'est pas exigible ; il faut en connaître les étapes.

1. Les équations de Maxwell sont **linéaires** : le champ de la distribution est la somme des champs créés par chaque élément de courant.
2. L'information se propage à la vitesse c : le champ en M à l'instant t dépend de l'état de la source à l'instant **retardé** $t - \frac{r}{c}$. On admet que le potentiel vecteur d'un dipôle vaut, pour $a \ll r$ et $a \ll \lambda$ (aucun retard entre les différents points de la source) :

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

En régime stationnaire, on reconnaîtrait le potentiel d'un élément de courant $I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$, puisque $\dot{\vec{p}} = \ell\, i\, \vec{u}_z$.

3. On calcule $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$, puis $\vec{E}$, et on ne garde que les termes dominants pour $r \gg \lambda$.

Calcul de $\vec{B}$ D. $\vec{A} = A(r,t)\vec{u}_z$ avec $A = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}$. On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(A\vec{u}_z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}A \wedge \vec{u}_z$ (car $\vec{u}_z$ est uniforme) et

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc} - \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2}\right].$$

Pour un signal sinusoïdal, $|\ddot{p}| = \omega|\dot{p}|$: le rapport du premier terme au second vaut $\frac{\omega r}{c} = 2\pi\frac{r}{\lambda} \gg 1$. On garde donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}A \approx -\frac{\mu_0\ddot{p}}{4\pi rc}\vec{u}_r$. Avec $\vec{u}_z = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$, on a $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$, d'où l'expression ci-dessous. Le champ $\vec{E}$ s'obtient de même (par Maxwell-Ampère) ; on admet le résultat, qui donne localement la structure d'une onde plane.

Champ rayonné par un dipôle oscillant (expressions admises, non exigibles)

En coordonnées sphériques d'axe Oz (axe du dipôle), dans la zone de rayonnement :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\,\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{u}_\theta \qquad \vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi rc}\,\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{u}_\varphi$$

Pour $p = p_0\cos\omega t$, avec $k = \frac{\omega}{c}$:

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{u}_\theta, \qquad \vec{B} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi rc}\cos(\omega t - kr)\,\vec{u}_\varphi.$$

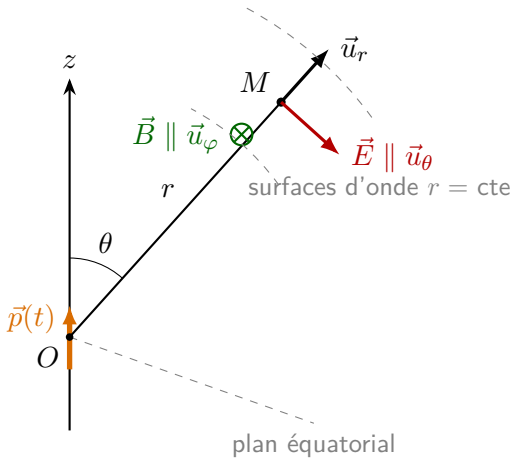


Fig. 1 : Champ rayonné en M : $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_r)$ forment un trièdre direct ; $\vec{E}$ est dans le plan méridien (contenant $\vec{p}$ et M), $\vec{B}$ lui est orthogonal.

II.2 Structure du champ rayonné

Propriétés du champ rayonné R

- **Onde sphérique** : le champ dépend de $t - \frac{r}{c}$; il se propage radialement depuis le dipôle à la vitesse c. Les surfaces d'onde sont des sphères centrées sur O.
- **Structure locale d'onde plane** : $\vec{E} \perp \vec{u}_r$, $\vec{B} \perp \vec{u}_r$, $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$, $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$. Loin de la source, sur une région petite devant r, l'onde ressemble à une OPP de direction $\vec{u}_r$.
- **Amplitude en $1/r$** (et non en $1/r^3$ comme en statique) : c'est ce qui permet de transporter de l'énergie à grande distance.

- **Anisotropie** en $\sin\theta$: champ nul sur l'axe du dipôle, maximal dans le plan équatorial.
- **Polarisation rectiligne**, $\vec{E}$ étant dans le plan méridien : dans une direction donnée, le champ oscille selon la projection de $\vec{p}$ sur le plan d'onde.
- Le champ est proportionnel à $\ddot{p}$: il est créé par l'**accélération** des charges.

Remarque

Symétries. Tout plan contenant l'axe Oz et le point M est un plan de symétrie de la distribution : $\vec{E}$ (vecteur polaire) y est contenu et $\vec{B}$ (vecteur axial) lui est perpendiculaire, ce qui est bien le cas. L'invariance par rotation autour de Oz explique que les champs ne dépendent pas de φ.

☞ Méthode — Analyser des expressions de champ fournies M

1. Repérer la dépendance en $t - r/c$: onde sphérique sortante, célérité c.
2. Vérifier la structure : $\vec{E} \perp \vec{u}_r$, $\vec{B} = \vec{u}_r \wedge \vec{E}/c$ (trièdre direct $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$).
3. Lire l'anisotropie (facteur angulaire), la décroissance en $1/r$, la polarisation.
4. Vérifier l'homogénéité : $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}}{r}$ est en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ (avec $\ddot{p} = qa$, $\mu_0 qa/r$ s'exprime comme E).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Structure du champ ✦✧✧✧✧

On part des expressions du cours pour $p = p_0 \cos\omega t$.

Q-1) Vérifier que $\vec{E} = c\,\vec{B} \wedge \vec{u}_r$ et que $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

Q-2) Que valent les champs en un point de l'axe Oz ? Justifier par un argument physique simple.

Q-3) Quel est l'état de polarisation de l'onde reçue en un point du plan équatorial ? en un point à $\theta = 45°$?

EXERCICE 4 Champ d'une antenne à grande distance ✦✦✧✧✧

L'antenne de l'exercice « Dipôle équivalent à une antenne courte » ($p_0 = 1{,}6 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}$, $f = 100\,\mathrm{MHz}$) est verticale.

Q-1) Calculer l'amplitude de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ à $1\,\mathrm{km}$, dans le plan horizontal de l'antenne.

Q-2) Même question à la même distance, mais dans une direction faisant $30°$ avec la verticale.

Q-3) Pourquoi capte-t-on mal une station avec une antenne de réception horizontale, alors que l'antenne d'émission est verticale ?

III Puissance rayonnée

III.1 Vecteur de Poynting et indicatrice

Vecteur de Poynting du champ rayonné D

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \sin^2\theta}{16\pi^2 r^2 c}\,\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{u}_r \qquad \langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\,\frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\vec{u}_r$$

L'énergie est rayonnée radialement, vers l'extérieur. Sa puissance surfacique décroît en $1/r^2$.

Démonstration. $\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{u}_r$ et $\|\vec{\Pi}\| = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}$; pour $p = p_0 \cos\omega t$, $\langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{2}$.

Définition — Indicatrice de rayonnement R

L'**indicatrice de rayonnement** est la courbe représentant, en coordonnées polaires, la puissance surfacique moyenne rayonnée dans la direction θ, à distance r fixée, rapportée à sa valeur maximale :

$$\mathcal{R}(\theta) = \frac{\langle \Pi \rangle(r,\theta)}{\langle \Pi \rangle_{\max}(r)} = \sin^2\theta.$$

Dans un plan méridien, elle est formée de deux lobes tangents en O à l'axe du dipôle ; dans l'espace, c'est une surface de révolution en forme de « tore plein ».

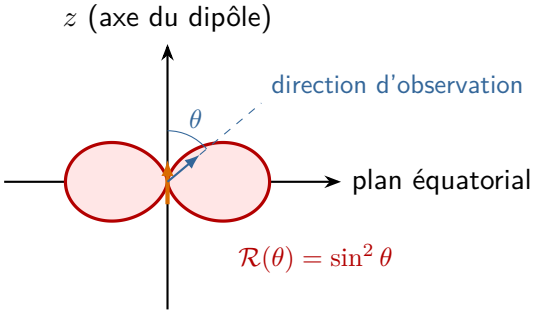


Fig. 2 : Indicatrice de rayonnement du dipôle oscillant dans un plan méridien : la longueur du segment issu de O jusqu'à la courbe, dans la direction θ, est proportionnelle à la puissance rayonnée dans cette direction.

III.2 Puissance totale rayonnée

Puissance rayonnée par un dipôle oscillant R D

La puissance moyenne qui traverse une sphère de rayon r centrée sur le dipôle est

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0\, p_0^2\, \omega^4}{12\pi c}$$

Elle ne dépend pas de r et varie comme ω^4, c'est-à-dire comme $1/\lambda^4$. À chaque instant, $\mathcal{P}(t) = \frac{\mu_0\, \ddot{p}^2(t - r/c)}{6\pi c}$.

Démonstration. L'élément de surface de la sphère est $\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \oiint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \times 2\pi \times \frac{4}{3},$$

avec $\int_0^\pi \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, \mathrm{d}u = \frac{4}{3}$ (changement de variable $u = \cos\theta$).

★ À retenir

- L'indépendance vis-à-vis de r traduit la **conservation de l'énergie** dans le vide, non absorbant : toute l'énergie qui traverse une sphère traverse la suivante, avec un retard. C'est possible parce que $\Pi \propto 1/r^2$ et que l'aire de la sphère croît en r^2 ; l'amplitude du champ décroît en $1/r$ **par dilution géométrique**, pas par absorption.

▶ **Formule de Larmor** : une charge ponctuelle q d'accélération $\vec{a}$ non relativiste rayonne $\mathcal{P} = \dfrac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$ (car $\ddot{p} = qa$). Toute charge accélérée perd de l'énergie par rayonnement.

☞ Méthode — Résistance de rayonnement d'une antenne courte M

Pour une antenne de longueur ℓ parcourue par $I_0 \cos \omega t$, $\ddot{p}$ a pour amplitude $\ell\omega I_0$. En posant $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} R_{\text{ray}} I_0^2$ (comme pour une résistance) :

$$R_{\text{ray}} = \frac{\mu_0 \ell^2 \omega^2}{6\pi c} = \frac{2\pi}{3}\,\mu_0 c \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \approx 790\,\Omega \times \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

Vue du générateur, l'antenne se comporte comme une résistance : la puissance qu'elle consomme part dans l'espace sous forme de rayonnement.

Ordres de grandeur

Antenne courte de $10\,\text{cm}$ parcourue par $1\,\text{A}$ à $100\,\text{MHz}$: $\langle \mathcal{P} \rangle \approx 0{,}4\,\text{W}$. Atome émettant dans le visible ($p_0 \sim e \times 0{,}05\,\text{nm}$) : $\langle \mathcal{P} \rangle \sim 10^{-12}\,\text{W}$. Émetteur de radiodiffusion FM : quelques dizaines de kilowatts.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Croire qu'un dipôle rayonne dans la direction de son axe : c'est la direction où il ne rayonne pas.
- Utiliser les expressions de la zone de rayonnement près de la source ($r \lesssim \lambda$).
- Oublier le facteur ω^4 (ou le confondre avec ω^2) : doubler la fréquence à amplitude p_0 fixée multiplie la puissance par 16.
- Interpréter la décroissance en $1/r$ comme une absorption : la puissance totale se conserve.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Rendement d'une antenne ✦✦✧✧✧

Une antenne courte de longueur ℓ possède une résistance ohmique $r_\Omega = 2{,}0\,\Omega$ (fils et connexions).

Q-1) Définir son rendement η en fonction de R_{ray} et r_Ω.

Q-2) Calculer η pour $\ell = 1{,}0\,\text{m}$ à $1\,\text{MHz}$, puis pour $\ell = \lambda/10$. Conclure.

EXERCICE 6 Durée de vie radiative d'un atome ✦✦✧✧✧

On modélise un atome excité par un dipôle d'amplitude $p_0 = e r_0$, avec $r_0 = 0{,}05\,\text{nm}$, oscillant à la pulsation qui correspond à $\lambda = 500\,\text{nm}$.

Q-1) Calculer la puissance moyenne rayonnée.

Q-2) En admettant que l'atome rayonne l'énergie $h\nu$ d'un photon, estimer la durée τ de l'émission. Combien de périodes contient le train d'onde ? Quelle largeur spectrale en résulte ?

IV Diffusion d'une onde par une molécule

IV.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

Une onde $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_z$ éclaire une molécule. Ses électrons, légers, sont mis en mouvement ; les noyaux, beaucoup plus lourds, restent quasi immobiles. On modélise un électron (masse m, charge $-e$) par un oscillateur (**modèle de Thomson**) :

- force de rappel vers le noyau $-m\omega_0^2\vec{r}$, où $\vec{r}$ est le déplacement de l'électron et ω_0 une pulsation propre, dans l'ultraviolet pour les molécules de l'air ;
- force d'amortissement $-\frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}}$, qui rend compte des pertes d'énergie (dont le rayonnement), avec $\omega_0\tau \gg 1$;
- force de Lorentz de l'onde, dont on ne garde que la partie électrique, prise en O.

Dipôle induit D

En régime sinusoïdal établi, la molécule acquiert un moment dipolaire oscillant à la pulsation de l'onde :

$$\underline{\vec{p}} = -e\,\underline{\vec{r}} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\,\omega/\tau}\,\underline{\vec{E}}(O,t)$$

Démonstration. *Justification des approximations.* La force magnétique $e\|\vec{v}\wedge\vec{B}\| \leq evE/c$ est négligeable devant eE car $v \ll c$. La molécule étant petite devant λ, le champ y est uniforme et vaut $\vec{E}(O,t) = E_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$. Le principe fondamental de la dynamique, $m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - \frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}} - e\vec{E}(O,t)$, devient en complexes $(-\omega^2 + \mathrm{i}\omega/\tau + \omega_0^2)\underline{\vec{r}} = -\frac{e}{m}\underline{\vec{E}}$; on multiplie par $-e$.

IV.2 Puissance diffusée ; section efficace

Le dipôle induit rayonne à la pulsation ω dans toutes les directions (sauf selon son axe) : il prélève de l'énergie à l'onde incidente et la redistribue. C'est la **diffusion**.

Puissance diffusée R D

$$\langle \mathcal{P}_d \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |\underline{p}|^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 e^4 E_0^2}{12\pi c m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

Rapportée à la puissance surfacique incidente $\langle \Pi_i \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$, elle définit la **section efficace de diffusion** (surface « vue » par l'onde) :

$$\sigma_d(\omega) = \frac{\langle \mathcal{P}_d \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \qquad r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2} = 2{,}82 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

Démonstration. $\frac{\mu_0 e^4}{12\pi c m^2} \times \frac{2}{\varepsilon_0 c} = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4 m^2}$ (car $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$) $= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}\right)^2$. La longueur r_e est le « rayon classique de l'électron ».

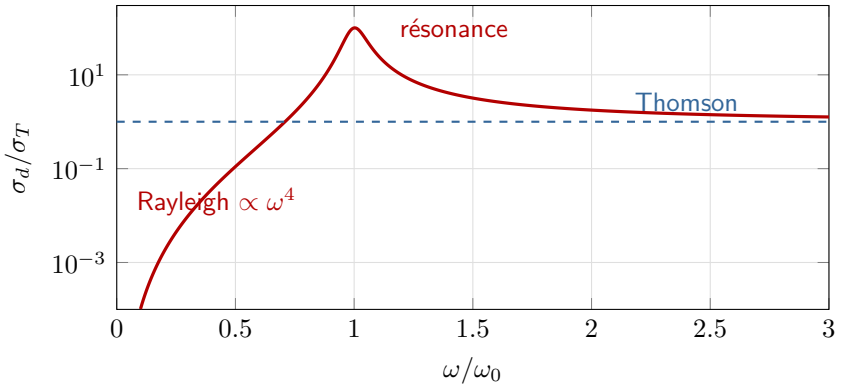


Fig. 3 : Section efficace de diffusion de l'électron élastiquement lié pour $\omega_0\tau = 10$ (échelle logarithmique ; $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$).

Trois régimes de diffusion R

- **Domaine de Rayleigh** ($\omega \ll \omega_0$) : $\sigma_d \approx \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$. Le dipôle induit, $\underline{p} \approx \frac{e^2}{m\omega_0^2}\underline{E}$, est en phase avec le champ et d'amplitude indépendante de ω : seule compte la dépendance en ω^4 de la puissance rayonnée.
- **Résonance** ($\omega \approx \omega_0$) : $\sigma_d \approx \sigma_T(\omega_0\tau)^2$, très grande. Pic de largeur $\Delta\omega \approx 1/\tau$: forte absorption et réémission (raies spectrales).
- **Domaine de Thomson** ($\omega \gg \omega_0$) : $\sigma_d \to \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6{,}65 \times 10^{-29}\,\mathrm{m}^2$, indépendante de ω : l'électron se comporte comme une charge libre (diffusion des rayons X).

IV.3 Conséquences : couleur et polarisation du ciel

Pour les molécules de l'air (diazote, dioxygène), ω_0 correspond à $\lambda_0 \approx 100\,\text{nm}$: tout le visible est dans le domaine de Rayleigh.

- **Ciel bleu.** Le bleu $(450\,\text{nm})$ est diffusé $\left(\frac{700}{450}\right)^4 \approx 6$ fois plus que le rouge $(700\,\text{nm})$. La lumière qui nous parvient du ciel, hors de la direction du Soleil, est de la lumière diffusée, enrichie en bleu. Le violet, encore plus diffusé, est moins présent dans le spectre solaire et l'œil y est peu sensible.
- **Soleil couchant rouge.** La lumière directe du Soleil bas sur l'horizon traverse une grande épaisseur d'air ; elle perd par diffusion une bonne part de son bleu et paraît rouge-orangé.
- **Polarisation.** La lumière diffusée à $90°$ du rayon solaire est polarisée rectilignement (figure ci-dessous).
- **Nuages blancs.** Les gouttelettes, plus grandes que λ, ne sont pas des dipôles : leur diffusion (de Mie, hors programme) dépend peu de la longueur d'onde.

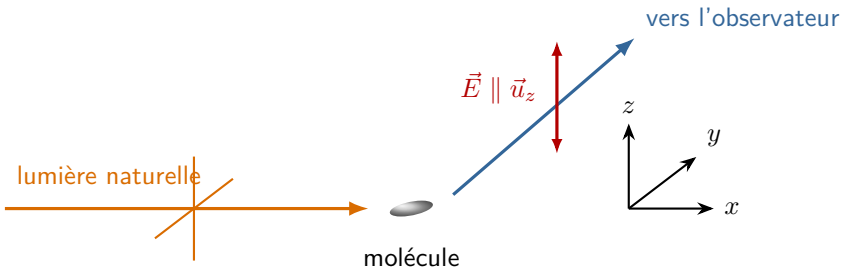


Fig. 4 : Diffusion à angle droit : la composante du champ incident selon $\vec{u}_y$ crée un dipôle qui ne rayonne pas selon son axe $\vec{u}_y$; seule la composante selon $\vec{u}_z$ rayonne vers l'observateur.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 Pourquoi le ciel n'est-il pas violet ?

✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer le rapport des puissances diffusées par une molécule d'air pour $\lambda = 400\,\text{nm}$ et $\lambda = 700\,\text{nm}$, à même éclairement incident.

Q-2) Pourquoi le ciel paraît-il bleu et non violet ?

EXERCICE 8 Polarisation de la lumière du ciel

✦✦✧✧✧

Le Soleil est sur l'horizon, à l'est. Un observateur au sol regarde successivement le zénith, puis l'horizon au nord.

Q-1) Dans quel plan oscille le champ électrique de la lumière solaire qui arrive au-dessus de l'observateur ?

Q-2) Quelle est la polarisation de la lumière diffusée reçue du zénith ? de l'horizon nord ?

Q-3) Comment le vérifier ? Citer une application.

V Synthèse

★ À retenir

- Dipôle oscillant $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$; trois échelles $a \ll \lambda \ll r$ (dipolaire, non relativiste, zone de rayonnement).
- Champ rayonné (admis) : $\vec{E} = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r}\ddot{p}(t - \frac{r}{c})\vec{u}_\theta$, $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$: onde sphérique, structure locale d'OPP, amplitude en $1/r$, nulle sur l'axe, polarisation rectiligne dans le plan méridien.

- $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 c r^2}\vec{u}_r$; indicatrice $\sin^2\theta$; $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$, indépendante de r, en ω^4 ; Larmor $\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$.
- Charge élastiquement liée : $\underline{p} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\omega/\tau}\underline{E}$; $\sigma_d = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$: Rayleigh (ω^4), résonance, Thomson.
- Ciel bleu, Soleil couchant rouge, lumière diffusée à $90°$ polarisée rectilignement.

VI Exercices d'approfondissement

EXERCICE 9 Instabilité de l'atome classique

Dans le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, l'électron décrit un cercle de rayon r autour du proton immobile.

Q-1) Exprimer son accélération et son énergie mécanique $\mathcal{E}(r)$ en fonction de r et de $r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}$.

Q-2) À l'aide de la formule de Larmor, et en supposant le mouvement circulaire à chaque instant, établir $r^2\dot{r} = -\frac{4}{3}r_e^2 c$.

Q-3) En déduire la durée de chute sur le noyau à partir de $r_0 = 53\,\mathrm{pm}$. Conclure.

EXERCICE 10 Amortissement radiatif et largeur naturelle d'une raie

Un électron élastiquement lié (pulsation ω_0), sans autre perte que le rayonnement, oscille librement : $z = A(t)\cos(\omega_0 t)$, l'amplitude A variant lentement.

Q-1) Exprimer son énergie mécanique $\mathcal{E}$ et la puissance moyenne rayonnée en fonction de A.

Q-2) Montrer que $\mathcal{E}$ décroît exponentiellement avec la constante de temps $\tau_{\text{rad}} = \frac{3c}{2r_e\omega_0^2}$. Application à $\lambda_0 = 500\,\mathrm{nm}$.

Q-3) La raie émise a une largeur $\Delta\omega \approx 1/\tau_{\text{rad}}$. Montrer que la largeur en longueur d'onde $\Delta\lambda$ ne dépend pas de λ_0 et la calculer.

EXERCICE 11 Dipôle tournant

Un dipôle de norme constante tourne dans le plan (xOy) : $\vec{p} = p_0\left[\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y\right]$ (molécule polaire en rotation, électron sur une orbite circulaire).

Q-1) Montrer qu'il équivaut à deux dipôles rectilignes en quadrature. Quelle est la puissance totale rayonnée ?

Q-2) Quelle est la polarisation de l'onde rayonnée selon l'axe Oz ? selon Ox ?

Q-3) Comparer les puissances surfaciques rayonnées selon Oz et selon Ox, à même distance.

EXERCICE 12 Résonance de diffusion

On reprend $\sigma_d(\omega)$ avec $\omega_0\tau \gg 1$.

Q-1) En posant $u = \omega^2$, montrer que σ_d est maximale pour $\omega_r = \omega_0\dfrac{\omega_0\tau\sqrt{2}}{\sqrt{2\omega_0^2\tau^2 - 1}}$. Commenter.

Q-2) Au voisinage de ω_0, montrer que $\sigma_d \approx \sigma_T \dfrac{(\omega_0\tau)^2}{1 + 4\tau^2(\omega - \omega_0)^2}$. En déduire la largeur à mi-hauteur du pic.

VII Classiques des concours

EXERCICE 13 Réseau de deux antennes

★★★★☆

Deux antennes identiques, verticales (selon Oz), sont placées en $A_1(-\frac{d}{2},0,0)$ et $A_2(\frac{d}{2},0,0)$. Elles se comportent comme des dipôles $p_1 = p_0\cos(\omega t)$ et $p_2 = p_0\cos(\omega t-\phi)$. On observe en un point M très lointain du plan horizontal (xOy), dans la direction $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y$, à la distance $r \gg d$. On note E_1 l'amplitude du champ d'une antenne seule en M.

Q-1) Justifier que les champs des deux antennes en M sont parallèles et de même amplitude. Exprimer les distances A_1M et A_2M au premier ordre en d/r.

Q-2) Montrer que l'amplitude du champ total vaut $2E_1\left|\cos\frac{kd\cos\alpha-\phi}{2}\right|$.

Q-3) Cas $d=\frac{\lambda}{2}$, $\phi=0$: tracer l'allure du diagramme de rayonnement horizontal. Dans quelles directions l'émission est-elle maximale ? nulle ?

Q-4) Cas $d=\frac{\lambda}{4}$, $\phi=\frac{\pi}{2}$: même question. Quel est l'intérêt pour une station de radio côtière ?

Q-5) Pour $\phi=0$ et $d=\frac{\lambda}{2}$, comparer la puissance surfacique dans la direction du maximum à celle d'une antenne seule. Y a-t-il contradiction avec la conservation de l'énergie ?

EXERCICE 14 Diffusion Rayleigh et transparence de l'atmosphère

★★★★☆

On adopte pour une molécule d'air le modèle de l'électron élastiquement lié, avec un seul électron par molécule, $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 100\,\text{nm}$ et un amortissement négligeable. La densité moléculaire de l'air au sol est $n = 2{,}5\times10^{25}\,\text{m}^{-3}$.

Q-1) Montrer que, dans le visible, $\sigma_d \approx \sigma_T\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4$. Calculer σ_d à $500\,\text{nm}$.

Q-2) Un faisceau parallèle de puissance surfacique $\Pi(x)$ traverse l'air. En faisant un bilan sur un cylindre de section S et de longueur $\mathrm{d}x$, montrer que $\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}x} = -n\sigma_d\Pi$. Définir et calculer la longueur d'atténuation L à $500\,\text{nm}$.

Q-3) L'atmosphère équivaut, à la verticale, à une couche homogène d'épaisseur $H = 8\,\text{km}$. Quelle fraction de la lumière à $500\,\text{nm}$ parvient au sol quand le Soleil est au zénith ?

Q-4) Au coucher du Soleil, l'épaisseur traversée vaut environ $300\,\text{km}$. Calculer les fractions transmises à $450\,\text{nm}$ et à $700\,\text{nm}$. Conclure.

Q-5) Le modèle sous-estime σ_d d'un facteur voisin de 5 (plusieurs électrons par molécule, ω_0 réel plus bas). Les conclusions qualitatives changent-elles ?