LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

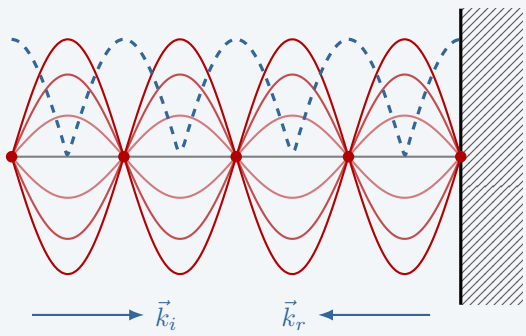
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

W2

PHYSIQUE DES ONDES

Réflexion sur un conducteur parfait, ondes stationnaires

Conducteur parfait — Relations de passage — Onde réfléchie — Onde stationnaire — Pression de radiation — Cavité et modes propres



> *La détermination des mouvements stables des électrons dans l'atome fait intervenir des nombres entiers ; or, jusqu'ici, les seuls phénomènes où intervenaient des nombres entiers en physique étaient ceux d'interférence et de modes propres de vibration.*
>
> — Louis de Broglie, conférence Nobel (1929)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Ondes stationnaires sur une corde »

W2 — Réflexion, ondes stationnaires

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Définir un conducteur parfait comme la limite $\delta \to 0$ d'un conducteur ohmique ; justifier $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$ à l'intérieur en régime variable.
- Exploiter les relations de passage à l'interface vide–conducteur parfait, rappelées par l'énoncé : $\vec{E}$ tangentiel et $\vec{B}$ normal nuls côté vide.
- Établir le champ réfléchi par un plan conducteur parfait sous incidence normale (onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement), puis la charge et le courant surfaciques.
- Reconnaître une onde stationnaire ; situer nœuds et ventres de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$; en faire le bilan énergétique ($\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$) ; calculer une pression de radiation.
- Déterminer par séparation des variables les modes propres d'une cavité à une dimension ; relier conditions aux limites et quantification des fréquences.
- Décomposer une onde stationnaire en deux ondes progressives et inversement.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Les relations de passage ne sont pas à retenir : un énoncé doit les rappeler. La simulation PhysioNova « Ondes stationnaires sur une corde » montre l'analogue mécanique de la cavité (corde de Melde) : on y voit les fuseaux, les nœuds immobiles et la quantification des fréquences de résonance.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Le conducteur parfait . . . 3
I.1 Du conducteur ohmique au conducteur parfait . . . 3
I.2 Relations de passage à la surface . . . 3
II Réflexion sous incidence normale . . . 5
II.1 Position du problème . . . 5
II.2 Nécessité et forme de l'onde réfléchie . . . 5
II.3 Charge et courant surfaciques . . . 6
III L'onde stationnaire . . . 8
III.1 Champ résultant . . . 8
III.2 Nœuds et ventres . . . 8
III.3 Aspects énergétiques . . . 9
III.4 Pression de radiation . . . 9
IV Cavité à une dimension : modes propres . . . 11
IV.1 Position du problème . . . 11
IV.2 Séparation des variables . . . 11
IV.3 Solution générale et analogies . . . 12
V Synthèse . . . 14
VI Exercices d'approfondissement . . . 14
VII Classiques des concours . . . 16

I Le conducteur parfait

I.1 Du conducteur ohmique au conducteur parfait

Au chapitre W1 et dans l'étude de l'effet de peau, on a vu qu'une onde de pulsation ω ne pénètre dans un métal de conductivité γ que sur l'**épaisseur de peau**

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Lorsque γ est très grande, δ devient négligeable devant toutes les longueurs du problème (longueur d'onde, épaisseur et dimensions du conducteur) : c'est le modèle du conducteur parfait.

Définition — Conducteur parfait R

Un **conducteur parfait** est un conducteur ohmique de conductivité infinie ($\gamma \to \infty$, donc $\delta \to 0$). En régime variable, on a **à l'intérieur** :

$$\vec{E} = \vec{0}, \qquad \vec{B} = \vec{0}, \qquad \rho = 0, \qquad \vec{j} = \vec{0}$$

Les charges et les courants ne peuvent exister qu'**en surface** : densité surfacique de charge σ et densité surfacique de courant $\vec{j}_s$.

Justification D**.** La densité de courant $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ reste finie ; si $\gamma \to \infty$, il faut $\vec{E} = \vec{0}$. L'équation de Maxwell-Faraday donne alors $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$: la partie variable de $\vec{B}$ est nulle (on ignore un éventuel champ statique, sans intérêt ici). Maxwell-Gauss donne $\rho = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \vec{E} = 0$ et Maxwell-Ampère $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. Physiquement, les charges libres se déplacent instantanément pour annuler tout champ électrique interne, et ces mouvements se font dans une couche d'épaisseur $\delta \to 0$, modélisée par une surface.

Ordres de grandeur

Épaisseur de peau du cuivre ($\gamma = 6{,}0 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$) : $\delta \approx 9\,\mathrm{mm}$ à $50\,\mathrm{Hz}$; $65\,\mu\mathrm{m}$ à $1\,\mathrm{MHz}$; $0{,}65\,\mu\mathrm{m}$ à $10\,\mathrm{GHz}$. Une paroi métallique de quelques millimètres est donc un excellent conducteur parfait pour les ondes radio et les micro-ondes (λ du centimètre au mètre), mais pas pour le courant du secteur.

I.2 Relations de passage à la surface

Relations de passage (à rappeler, non exigibles)

À la traversée d'une surface portant σ et $\vec{j}_s$, avec $\vec{n}_{1\to2}$ la normale orientée du milieu 1 vers le milieu 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to2}, \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to2}.$$

Pour un conducteur parfait (milieu 1, champs nuls) et le vide (milieu 2), en notant $\vec{n}$ la normale **sortant du conducteur** :

$$\vec{E}(\text{vide, au contact}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \qquad \vec{B}(\text{vide, au contact}) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

★ À retenir

Au contact d'un conducteur parfait, côté vide : la **composante tangentielle de $\vec{E}$ est nulle** ($\vec{E}$ est normal) et la **composante normale de $\vec{B}$ est nulle** ($\vec{B}$ est tangent). σ se lit sur $\vec{E}$ normal, $\vec{j}_s$ sur $\vec{B}$ tangent.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Le cuivre est-il un conducteur parfait ?

✦✧✧✧✧

On donne la conductivité du cuivre, $\gamma = 6{,}0 \times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$.

Q-1) Calculer l'épaisseur de peau à $50\,\mathrm{Hz}$, $1\,\mathrm{MHz}$ et $10\,\mathrm{GHz}$.

Q-2) Une plaque de cuivre d'épaisseur $1\,\mathrm{mm}$ peut-elle être modélisée par un conducteur parfait dans chacun de ces cas ?

Correction

Q-1) $\delta = \sqrt{2/(\mu_0\gamma\omega)}$: à $50\,\mathrm{Hz}$, $\mu_0\gamma\omega = 2{,}37\times10^4\,\mathrm{m^{-2}}$ et $\delta = 9{,}2\,\mathrm{mm}$; à $1\,\mathrm{MHz}$, $\delta = 65\,\mu\mathrm{m}$; à $10\,\mathrm{GHz}$, $\delta = 0{,}65\,\mu\mathrm{m}$ ($\delta \propto 1/\sqrt{f}$).
Q-2) À $50\,\mathrm{Hz}$, δ dépasse l'épaisseur : le champ traverse la plaque, le modèle est faux. À $1\,\mathrm{MHz}$ ($\delta \approx e/15$) le modèle est acceptable ; à $10\,\mathrm{GHz}$ il est excellent.

EXERCICE 2 — Lecture des relations de passage

✦✧✧✧✧

Un conducteur parfait occupe le demi-espace $z > 0$. Au voisinage immédiat de sa surface, côté vide, on mesure $\vec{E} = E_1\cos(\omega t)\,\vec{u}_z$ et $\vec{B} = B_1\cos(\omega t)\,\vec{u}_x$.

Q-1) Ces champs sont-ils compatibles avec les conditions aux limites ?

Q-2) En déduire $\sigma(t)$ et $\vec{j}_s(t)$.

Correction

Q-1) Oui : $\vec{E}$ est normal à la surface et $\vec{B}$ lui est tangent.
Q-2) La normale sortant du conducteur est $\vec{n} = -\vec{u}_z$. $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ donne $\sigma = -\varepsilon_0 E_1\cos\omega t$. Cherchons $\vec{j}_s = j\,\vec{u}_y$ (il doit être tangent et orthogonal à $\vec{B}$) : $\mu_0 j\,\vec{u}_y \wedge (-\vec{u}_z) = -\mu_0 j\,\vec{u}_x = B_1\cos(\omega t)\,\vec{u}_x$, d'où $\vec{j}_s = -\frac{B_1}{\mu_0}\cos(\omega t)\,\vec{u}_y$.

II Réflexion sous incidence normale

II.1 Position du problème

Le conducteur parfait occupe le demi-espace $z > 0$; le vide occupe $z < 0$. Une onde plane progressive monochromatique (OPPM) polarisée rectilignement, de vecteur d'onde $\vec{k}_i = k\,\vec{u}_z$ ($k = \omega/c$), arrive sous incidence normale :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x, \qquad \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_y.$$

En notation complexe : $\underline{\vec{E}}_i = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x$.

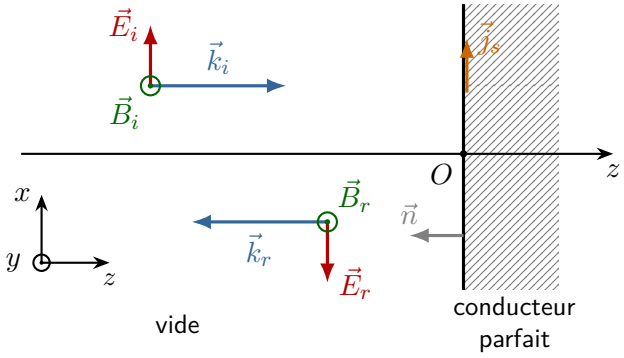


Fig. 1 : Réflexion sous incidence normale (situation à l'instant $t = 0$ en $z = 0$) : $\vec{E}_r = -\vec{E}_i$ et $\vec{B}_r = \vec{B}_i$ sur la paroi ; $\vec{n}$ est la normale sortant du conducteur.

II.2 Nécessité et forme de l'onde réfléchie

Existence d'une onde réfléchie D

L'onde incidente seule ne vérifie pas la condition aux limites : en $z = 0$, son champ $E_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_x$ est tangent et non nul. Le conducteur est donc le siège de courants surfaciques qui rayonnent une **onde réfléchie** ; aucune onde n'est transmise dans le conducteur.

Démonstration de la forme de l'onde réfléchie D. Cherchons-la sous la forme d'une OPPM $\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{0r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_r t - \vec{k}_r\cdot\overrightarrow{OM})}$. La composante tangentielle du champ total doit être nulle en $z = 0$ **pour tous** x, y **et** t :

$$E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\vec{u}_x + \left(\underline{\vec{E}}_{0r}\right)_{\text{tang}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_r t - k_{rx}x - k_{ry}y)} = \vec{0}.$$

Ceci n'est possible que si les deux exponentielles sont identiques : $\omega_r = \omega$ et $k_{rx} = k_{ry} = 0$. L'onde réfléchie a donc la **même pulsation** et se propage selon $-\vec{u}_z$; la relation de dispersion du vide impose $\vec{k}_r = -k\,\vec{u}_z$. Il reste $(\underline{\vec{E}}_{0r})_{\text{tang}} = -E_0\vec{u}_x$; l'onde réfléchie étant transverse ($\underline{\vec{E}}_{0r} \perp \vec{u}_z$), on obtient $\underline{\vec{E}}_{0r} = -E_0\vec{u}_x$.

Onde réfléchie R D

$$\vec{E}_r = -E_0\cos(\omega t + kz)\,\vec{u}_x \qquad \vec{B}_r = \frac{(-\vec{u}_z)\wedge\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + kz)\,\vec{u}_y$$

- Coefficient de réflexion en amplitude (pour $\vec{E}$, en $z = 0$) : $\underline{r} = \dfrac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}} = -1$; l'onde réfléchie a la même polarisation rectiligne.
- À la réflexion, $\vec{E}$ subit un déphasage de π ; $\vec{B}$ n'est pas déphasé.

▶ Coefficients en puissance : $R = \dfrac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = r^2 = 1$ et $T = 0$: **réflexion totale**.

II.3 Charge et courant surfaciques

Sources surfaciques sur la paroi D

En $z = 0^-$, le champ total vaut $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\,\vec{u}_y$. Avec $\vec{n} = -\vec{u}_z$:

$$\sigma = 0 \qquad \vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\,\vec{u}_x = \frac{2\,\vec{E}_i(0,t)}{\mu_0 c}$$

Démonstration. Le champ électrique total est nul en $z = 0$, en particulier sa composante normale : $\sigma = 0$. Pour $\vec{j}_s = j\,\vec{u}_x$: $\mu_0 j\,\vec{u}_x \wedge (-\vec{u}_z) = \mu_0 j\,\vec{u}_y$, d'où $j = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos\omega t$.

Remarque

Ces courants surfaciques, qui oscillent à la pulsation ω, sont la **source** de l'onde réfléchie : ce sont des dipôles oscillants (chapitre W3) dont les champs annulent l'onde incidente dans le conducteur et produisent l'onde réfléchie dans le vide. C'est pourquoi l'onde réfléchie a la même pulsation que l'onde incidente. Pour un conducteur réel, la conductivité est finie : une petite partie de la puissance est dissipée par effet Joule dans l'épaisseur de peau (R légèrement inférieur à 1, exercice d'approfondissement).

☞ Méthode — Trouver l'onde réfléchie M

1. Écrire une onde de même pulsation, se propageant en sens inverse, d'amplitude inconnue (une inconnue par composante transverse).
2. Imposer la nullité de $\vec{E}$ tangentiel sur le conducteur, à tout instant.
3. Obtenir $\vec{B}_r$ par la relation de structure $\vec{B}_r = \dfrac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}_r}{c}$, où $\vec{u}_r$ est la direction de propagation de l'onde réfléchie.
4. Lire σ et $\vec{j}_s$ sur le champ total au contact.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Réflexion d'une onde polarisée circulairement ✦✦✧✧✧

Une onde $\vec{E}_i = E_0\,[\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x + \sin(\omega t - kz)\,\vec{u}_y]$ se propage dans le vide ($z < 0$) vers un conducteur parfait occupant $z > 0$.

Q-1) Préciser l'état de polarisation de l'onde incidente pour un observateur qui la reçoit.

Q-2) Déterminer l'onde réfléchie et son état de polarisation.

Q-3) Exprimer le courant surfacique. Que décrit-il ?

Correction

Q-1) En $z = 0$, $\vec{E}_i = E_0(\cos\omega t\,\vec{u}_x + \sin\omega t\,\vec{u}_y)$ tourne à vitesse angulaire ω dans le sens direct autour de $\vec{u}_z$, avec une norme constante. Un observateur qui reçoit l'onde regarde vers $-\vec{u}_z$: il voit $\vec{E}$ tourner dans le sens trigonométrique, l'onde est polarisée **circulairement à gauche**.

Q-2) La condition aux limites s'applique composante par composante : $\vec{E}_r = -E_0\,[\cos(\omega t + kz)\,\vec{u}_x + \sin(\omega t + kz)\,\vec{u}_y]$. En $z = 0$, $\vec{E}_r$ tourne toujours dans le sens direct autour de $\vec{u}_z$, mais l'onde se propage maintenant selon $-\vec{u}_z$: l'observateur qui la reçoit regarde vers $+\vec{u}_z$ et voit une rotation dans le sens horaire. L'onde réfléchie est polarisée **circulairement à droite** : un miroir inverse le sens de la polarisation circulaire.
Q-3) Au contact, $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{2}{c}\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i(0,t)$ et $\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}(\cos\omega t\,\vec{u}_x + \sin\omega t\,\vec{u}_y)$: une nappe de courant de direction tournante, qui suit $\vec{E}_i$.

EXERCICE 4 Ordres de grandeur sur une plaque éclairée

✦✧✧✧✧

Une plaque métallique (conducteur parfait) reçoit sous incidence normale une onde d'amplitude $E_0 = 50\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

Q-1) Calculer la puissance surfacique moyenne incidente.

Q-2) Calculer l'amplitude de la densité de courant surfacique.

Correction

Q-1) $\langle \Pi_i \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{2500}{2\times 377} = 3{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.
Q-2) $j_{s,\max} = \frac{2E_0}{\mu_0 c} = \frac{100}{377} = 0{,}27\,\mathrm{A\cdot m^{-1}}$: 0,27 A circulent par mètre de largeur de plaque.

III L'onde stationnaire

III.1 Champ résultant

Dans le demi-espace $z < 0$, le champ total est la superposition des ondes incidente et réfléchie. En complexes, $\underline{\vec{E}} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right)\vec{u}_x = -2\mathrm{i}E_0 \sin(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{u}_x$, dont la partie réelle donne :

Onde stationnaire devant un conducteur parfait R D

$$\vec{E}(z,t) = 2E_0 \sin(kz)\,\sin(\omega t)\,\vec{u}_x \qquad \vec{B}(z,t) = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\,\cos(\omega t)\,\vec{u}_y$$

On le retrouve aussi en réels avec $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ et $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

Définition — Onde stationnaire R

Une onde est **stationnaire** lorsque ses variables d'espace et de temps sont **séparées** : $\psi(z,t) = f(z)\,g(t)$. Le profil spatial $f(z)$ ne se déplace pas ; tous les points vibrent en phase ou en opposition de phase, avec une amplitude $|f(z)|$ qui dépend de la position. Une onde progressive, au contraire, dépend de $t \mp z/c$.

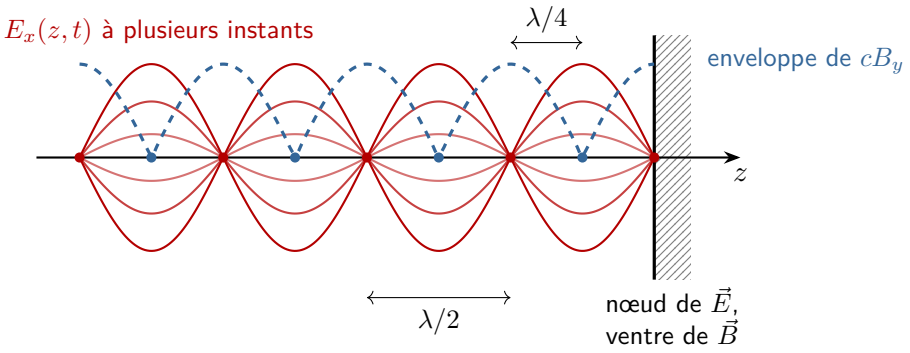


Fig. 2 : Onde stationnaire devant le miroir : $E_x(z,t)$ à plusieurs instants (traits rouges) et amplitude de cB_y (tirets bleus). Points rouges : nœuds de $\vec{E}$; points bleus : nœuds de $\vec{B}$.

III.2 Nœuds et ventres

Nœuds et ventres R

- **Nœuds de** $\vec{E}$ $(\sin kz = 0)$: $z = -p\dfrac{\lambda}{2}$, $p \in \mathbb{N}$; la paroi est un nœud de $\vec{E}$.
- **Ventres de** $\vec{E}$ $(|\sin kz| = 1)$: $z = -\dfrac{\lambda}{4} - p\dfrac{\lambda}{2}$.
- Deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs sont distants de $\dfrac{\lambda}{2}$; un nœud et le ventre voisin, de $\dfrac{\lambda}{4}$.
- Les nœuds de $\vec{B}$ coïncident avec les ventres de $\vec{E}$ et inversement : la paroi est un **ventre de** $\vec{B}$ (lié au courant surfacique).
- $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en **quadrature** dans le temps ($\sin\omega t$ et $\cos\omega t$) et dans l'espace.

Remarque

Mesure de λ (TP ondes centimétriques). Une antenne dipolaire reliée à un détecteur quadratique mesure un signal proportionnel à $\langle E^2\rangle \propto \sin^2 kz$. En la déplaçant le long de l'axe devant une plaque métallique, on repère les minima nuls, distants de $\lambda/2$: en mesurant la distance entre plusieurs nœuds, on obtient λ avec précision.

III.3 Aspects énergétiques

Énergie de l'onde stationnaire R D

- Densité volumique d'énergie : $u = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} = 2\varepsilon_0 E_0^2\left[\sin^2(kz)\sin^2(\omega t) + \cos^2(kz)\cos^2(\omega t)\right]$, de moyenne temporelle $\langle u\rangle = \varepsilon_0 E_0^2$, uniforme.
- Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 c E_0^2 \sin(2kz)\sin(2\omega t)\,\vec{u}_z$, de moyenne nulle :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}$$

Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie en moyenne : l'énergie oscille sur place, sur une distance $\lambda/4$, entre les ventres de $\vec{E}$ (forme électrique) et les ventres de $\vec{B}$ (forme magnétique).

Démonstration. On utilise $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$ et $\langle\sin^2\omega t\rangle = \langle\cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$ pour $\langle u\rangle$, puis $\vec{u}_x\wedge\vec{u}_y = \vec{u}_z$ et $2\sin a\cos a = \sin 2a$ pour $\vec{\Pi}$. En moyenne, le flux d'énergie incident $\langle\Pi_i\rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$ est exactement compensé par le flux réfléchi.

Remarque

Les grandeurs énergétiques étant quadratiques, $u \neq u_i + u_r$ en chaque point et à chaque instant (termes croisés). Mais en moyenne, $\langle u\rangle = \varepsilon_0 E_0^2 = \langle u_i\rangle + \langle u_r\rangle$: les termes croisés électrique et magnétique se compensent.

III.4 Pression de radiation

Le courant surfacique est plongé dans le champ magnétique : il subit des forces de Laplace. Le champ à prendre en compte pour une nappe est la **moyenne** des champs de part et d'autre, ici $\frac{1}{2}\vec{B}(0^-,t)$ (le champ est nul dans le conducteur).

Pression de radiation sur un miroir parfait D

La force surfacique est $\dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S} = \vec{j}_s\wedge\dfrac{\vec{B}(0^-,t)}{2} = \dfrac{2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t)\,\vec{u}_z$, dirigée vers le conducteur. En moyenne :

$$P_{\text{rad}} = \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{2\langle\Pi_i\rangle}{c}$$

Interprétation corpusculaire. Un photon d'énergie $h\nu$ porte la quantité de mouvement $h\nu/c$. Réfléchi, il cède $2h\nu/c$ au miroir. Le flux de photons étant $\langle\Pi_i\rangle/(h\nu)$ par unité de surface et de temps, la pression vaut $2\langle\Pi_i\rangle/c$. Pour une surface absorbante, elle ne vaut que $\langle\Pi_i\rangle/c$.

Ordres de grandeur

Rayonnement solaire au niveau de la Terre, $\langle \Pi \rangle \approx 1{,}4\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}}$: $P_{\text{rad}} \approx 9\,\mu\mathrm{Pa}$ sur un miroir. Laser de $1\,\mathrm{W}$ focalisé sur $1\,\mu\mathrm{m}^2$: $\langle \Pi \rangle = 10^{12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ et $P_{\text{rad}} \approx 7\,\mathrm{kPa}$ (pinces optiques).

☞ Méthode — Passer d'ondes progressives à une onde stationnaire M

- Deux OPPM de même amplitude et de sens opposés donnent une onde stationnaire : $\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz) = 2\cos(kz)\cos(\omega t)$.
- Réciproquement, une onde stationnaire est la somme de deux ondes progressives : $\sin(kz)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)\right]$.
- La relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$ ne s'applique **qu'à chaque onde progressive**, jamais à l'onde stationnaire : pour obtenir $\vec{B}$, on décompose, ou on utilise Maxwell-Faraday.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Imposer $\vec{B}_{\text{tangentiel}} = \vec{0}$ sur le conducteur : c'est faux, $\vec{B}$ tangentiel y est maximal (ventre) et donne le courant surfacique.
- Placer les nœuds tous les λ : ils sont distants de $\lambda/2$.
- Écrire les nœuds en $z = +p\lambda/2$ alors que l'onde existe pour $z < 0$.
- Appliquer $\vec{B} = \vec{u}\wedge\vec{E}/c$ au champ total (il donnerait un $\vec{B}$ en phase avec $\vec{E}$, ce qui est faux).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Mesure d'une longueur d'onde centimétrique ✦✧✧✧✧

Un émetteur éclaire une plaque métallique sous incidence normale. Une sonde dipolaire, parallèle à $\vec{E}$, est déplacée sur l'axe. On relève la position du premier minimum nul, puis du huitième : ils sont distants de $10{,}5\,\mathrm{cm}$.

Q-1) Expliquer l'origine des minima. Calculer λ et la fréquence de l'émetteur.

Q-2) Comment repérer les maxima du champ magnétique ? Où sont-ils ?

Correction

Q-1) L'onde incidente et l'onde réfléchie forment une onde stationnaire ; la sonde, sensible au champ électrique, s'annule aux nœuds de $\vec{E}$. Entre le premier et le huitième minimum, il y a 7 intervalles de $\lambda/2$: $\lambda = \frac{2\times 10{,}5}{7} = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ et $f = \frac{c}{\lambda} = 10\,\mathrm{GHz}$.

Q-2) On utilise une petite boucle dont le plan est orthogonal à $\vec{B}$: la f.é.m. induite est proportionnelle à $\frac{\partial B}{\partial t}$. Ses maxima sont aux nœuds de $\vec{E}$ (en particulier sur la plaque).

EXERCICE 6 Conservation locale de l'énergie dans l'onde stationnaire ✦✦✧✧✧

Q-1) Vérifier que u et $\vec{\Pi}$ obtenus ci-dessus satisfont l'équation locale de Poynting $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$.

Q-2) À l'instant $t = 0$, où l'énergie est-elle localisée ? Et à $t = T/4$? Dans quel sens circule-t-elle entre ces deux instants dans l'intervalle $-\lambda/4 < z < 0$?

Correction

Q-1) $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \omega \sin(2\omega t)\left[\sin^2 kz - \cos^2 kz\right] = -2\varepsilon_0 E_0^2 \omega \cos(2kz)\sin(2\omega t)$ et $\frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = 2k\varepsilon_0 c E_0^2 \cos(2kz)\sin(2\omega t) = 2\varepsilon_0 E_0^2 \omega \cos(2kz)\sin(2\omega t)$: la somme est nulle. Il n'y a pas de terme $\vec{j}\cdot\vec{E}$ dans le vide.

Q-2) À $t = 0$, $\vec{E} = \vec{0}$: l'énergie est magnétique, concentrée près des ventres de $\vec{B}$ ($z = 0$, $z = -\lambda/2$). À $t = T/4$, $\vec{B} = \vec{0}$: elle est électrique, aux ventres de $\vec{E}$ ($z = -\lambda/4$). Pour $0 < t < T/4$ et $-\lambda/4 < z < 0$, $\sin 2kz < 0$ et $\sin 2\omega t > 0$: $\Pi_z < 0$, l'énergie quitte la paroi vers le ventre de $\vec{E}$; elle revient pendant le quart de période suivant.

EXERCICE 7 Le four à micro-ondes

✦✦✧✧✧

Un four fonctionne à $f = 2{,}45\,\mathrm{GHz}$; ses parois métalliques forment une cavité d'une trentaine de centimètres.

Q-1) Calculer λ. Pourquoi existe-t-il des zones chaudes et des zones froides ? Quelle distance les sépare ? À quoi sert le plateau tournant ?

Q-2) La porte vitrée est doublée d'une grille métallique percée de trous de $2\,\mathrm{mm}$. Pourquoi les micro-ondes ne sortent-elles pas, alors que la lumière passe ?

Correction

Q-1) $\lambda = \frac{c}{f} = 12{,}2\,\mathrm{cm}$. Les ondes réfléchies par les parois forment des ondes stationnaires ; la puissance absorbée par l'eau des aliments est proportionnelle à $\langle E^2\rangle$, maximale aux ventres de $\vec{E}$ et nulle aux nœuds, distants de $\lambda/2 \approx 6\,\mathrm{cm}$. Le plateau fait passer chaque morceau d'aliment successivement dans les zones chaudes et froides.

Q-2) La grille se comporte comme une paroi conductrice pleine pour des ondes dont la longueur d'onde ($12\,\mathrm{cm}$) est très grande devant les trous : ceux-ci ne laissent pas passer l'onde (onde évanescente dans le trou). La lumière, de longueur d'onde $0{,}5\,\mu\mathrm{m} \ll 2\,\mathrm{mm}$, traverse les trous.

IV Cavité à une dimension : modes propres

IV.1 Position du problème

Deux plans conducteurs parfaits, $z = 0$ et $z = L$, délimitent une région vide. On cherche les champs électromagnétiques qui peuvent y exister, de la forme $\vec{E} = E(z,t)\,\vec{u}_x$ (onde plane polarisée rectilignement). Dans le vide, E vérifie l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \qquad E(0,t) = 0, \qquad E(L,t) = 0 \quad \forall t.$$

IV.2 Séparation des variables

Modes propres d'une cavité à une dimension R D

Les solutions non nulles de la forme $E(z,t) = f(z)\,g(t)$ sont les **modes propres** :

$$E_n(z,t) = E_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\cos(\omega_n t + \varphi_n) \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad f_n = n\,\frac{c}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La longueur de la cavité contient un nombre entier de demi-longueurs d'onde : $L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$. Les conditions aux limites **quantifient** les fréquences possibles.

Démonstration. En reportant $E = f(z)g(t)$ dans l'équation de d'Alembert et en divisant par fg :

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{1}{c^2}\frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Le membre de gauche ne dépend que de z, celui de droite que de t : ils sont égaux à une même constante K.

- Si $K = 0$: $f = Az + B$; $f(0) = f(L) = 0$ impose $A = B = 0$.
- Si $K = \kappa^2 > 0$: $f = A\,\mathrm{ch}(\kappa z) + B\,\mathrm{sh}(\kappa z)$; $f(0) = 0$ donne $A = 0$, puis $B\,\mathrm{sh}(\kappa L) = 0$ donne $B = 0$. De plus, g croîtrait exponentiellement.
- Si $K = -k^2 < 0$: $f = A\cos(kz) + B\sin(kz)$ et $g'' + k^2c^2 g = 0$, d'où $g = \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = kc$. $f(0) = 0$ donne $A = 0$ et $f(L) = 0$ impose $\sin(kL) = 0$ (avec $B \neq 0$), soit $kL = n\pi$; $n = 0$ donnerait la solution nulle, et $n < 0$ redonne les mêmes modes.

Champ magnétique d'un mode D

L'équation de Maxwell-Faraday, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}\,\vec{u}_y$, donne, en ignorant une constante sans intérêt :

$$\vec{B}_n = -\frac{E_n}{c}\cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin(\omega_n t + \varphi_n)\,\vec{u}_y.$$

Les parois sont des nœuds de $\vec{E}$ et des ventres de $\vec{B}$; $\vec{B}$ est tangent aux parois, comme il se doit.

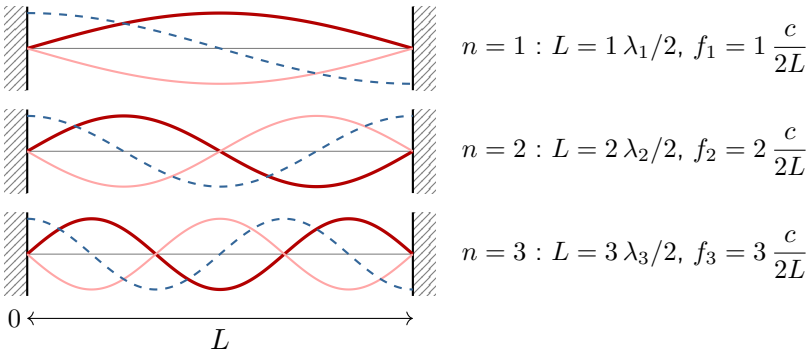


Fig. 3 : Les trois premiers modes propres : profil de E_x (rouge, à deux instants opposés) et de cB_y (tirets bleus, décalé d'un quart de période).

IV.3 Solution générale et analogies

L'équation de d'Alembert et les conditions aux limites sont **linéaires** : toute combinaison de modes propres est solution, et l'on montre que la solution générale s'écrit

$$E(z,t) = \sum_{n\geq 1} E_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Les amplitudes E_n et les phases φ_n sont fixées par les conditions initiales $E(z,0)$ et $\frac{\partial E}{\partial t}$ (décomposition en série de Fourier, comme au chapitre E1). Une superposition de plusieurs modes n'est plus stationnaire : son profil se déforme, mais le mouvement reste périodique de période $2L/c$.

★ À retenir

- **Conditions aux limites ⇒ quantification** : seules les fréquences $f_n = n\frac{c}{2L}$ peuvent exister durablement dans la cavité.
- Même physique pour la **corde vibrante** fixée à ses deux extrémités (corde de Melde, célérité $\sqrt{T/\mu}$),

le **tuyau sonore**, le **câble coaxial** court-circuité aux deux bouts, et la **particule quantique** dans un puits infini (chapitre Q3), où la même condition quantifie l'énergie.

Ordres de grandeur

Cavité laser He-Ne, $L = 30\,\text{cm}$ — écart entre modes $\frac{c}{2L} = 500\,\text{MHz}$; $n \approx 10^6$
Four à micro-ondes, $L \approx 30\,\text{cm}$ — mode fondamental à $0{,}5\,\text{GHz}$; à $2{,}45\,\text{GHz}$, $n \approx 5$
Corde de guitare, $L = 65\,\text{cm}$, $c \approx 430\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ — fondamental $\approx 330\,\text{Hz}$ (mi aigu)

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Modes longitudinaux d'un laser

Une cavité laser est formée de deux miroirs plans distants de $L = 25\,\text{cm}$, assimilés à des conducteurs parfaits. Le milieu amplificateur émet autour de $\lambda = 633\,\text{nm}$ et n'amplifie que dans une bande de fréquences de largeur $\Delta f = 1{,}5\,\text{GHz}$.

Q-1) Exprimer les fréquences propres et l'écart entre deux modes consécutifs.

Q-2) Combien de modes peuvent osciller simultanément ? Quel est l'ordre de grandeur de n ?

Correction

Q-1) $f_n = n\frac{c}{2L}$; $\delta f = \frac{c}{2L} = 600\,\text{MHz}$.
Q-2) $\frac{\Delta f}{\delta f} = 2{,}5$: deux ou trois modes, selon leur position dans la bande. $n = \frac{2L}{\lambda} = 7{,}9\times10^5$: les modes optiques sont d'ordre très élevé.

EXERCICE 9 Évolution libre d'un champ dans une cavité

Dans la cavité $0 < z < L$, le champ vaut à $t = 0$: $E(z,0) = E_1 \sin\frac{\pi z}{L} + E_2 \sin\frac{2\pi z}{L}$, avec $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$.

Q-1) Déterminer $E(z,t)$.

Q-2) L'onde est-elle stationnaire ? Est-elle périodique ?

Correction

Q-1) Chaque mode évolue indépendamment ; la condition $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ impose $\varphi_n = 0$: $E(z,t) = E_1 \sin\frac{\pi z}{L}\cos\frac{\pi ct}{L} + E_2 \sin\frac{2\pi z}{L}\cos\frac{2\pi ct}{L}$.
Q-2) Ce n'est pas un produit $f(z)g(t)$: l'onde n'est pas stationnaire, son profil se déforme. Elle est périodique de période $T_1 = \frac{2L}{c}$, période commune des deux modes ($T_2 = T_1/2$).

EXERCICE 10 Corde de Melde

Une corde de longueur $L = 1{,}20\,\text{m}$ et de masse linéique $\mu = 2{,}0\,\text{g}\cdot\text{m}^{-1}$ est fixée à un vibreur à $50\,\text{Hz}$ (point quasi fixe) et tendue par une masse m suspendue. On observe trois fuseaux. On rappelle que la célérité des ondes sur la corde vaut $\sqrt{T/\mu}$, avec T la tension.

Q-1) Calculer la longueur d'onde, la célérité, la tension et la masse m ($g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

Q-2) Quelle masse faut-il pour observer deux fuseaux ?

Correction

Q-1) Trois fuseaux : $L = 3\frac{\lambda}{2}$, $\lambda = 0{,}80\,\text{m}$; $c = \lambda f = 40\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $T = \mu c^2 = 3{,}2\,\text{N}$; $m = T/g = 0{,}33\,\text{kg}$.
Q-2) Pour n fuseaux, $c = \frac{2Lf}{n}$, donc $T \propto \frac{1}{n^2}$: $m' = m\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0{,}73\,\text{kg}$.

V Synthèse

★ À retenir

- Conducteur parfait : $\gamma \to \infty$, $\delta \to 0$; $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$ à l'intérieur ; charges et courants surfaciques. Côté vide : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$ (à rappeler).
- Incidence normale : onde réfléchie de même pulsation, $\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u}_x$, $r = -1$, $R = 1$; $\sigma = 0$, $\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\vec{u}_x$.
- Onde stationnaire : $\vec{E} = 2E_0 \sin(kz)\sin(\omega t)\vec{u}_x$, $\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\cos(\omega t)\vec{u}_y$; nœuds de $\vec{E}$ tous les $\lambda/2$, décalés de $\lambda/4$ de ceux de $\vec{B}$.
- $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$, $\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$; pression de radiation $2\langle \Pi_i \rangle / c$.
- Cavité : séparation des variables, $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $f_n = n\frac{c}{2L}$; conditions aux limites $\Rightarrow$ quantification ; solution générale = superposition de modes.

Pour aller plus loin

Chapitre suivant : W3, le rayonnement dipolaire, qui explique comment des charges oscillantes, comme les courants surfaciques de ce chapitre, émettent une onde électromagnétique.

VI Exercices d'approfondissement

EXERCICE 11 Réflexion sur un conducteur réel ✦✦✦✧✧

Un métal de conductivité γ finie occupe $z > 0$. L'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \gamma \omega)}$ est très petite devant λ. On admet que le champ magnétique au voisinage de la surface est pratiquement celui calculé pour le conducteur parfait, et que la puissance moyenne dissipée par effet Joule par unité de surface s'écrit $\frac{1}{2}R_s J_s^2$, où J_s est l'amplitude du courant total par unité de largeur et $R_s = \frac{1}{\gamma\delta}$ la « résistance de surface ».

Q-1) Exprimer J_s, puis la puissance surfacique dissipée.

Q-2) En déduire le coefficient de réflexion en puissance et montrer que $R \approx 1 - \dfrac{2\omega\delta}{c}$.

Q-3) Application au cuivre ($\gamma = 6{,}0 \times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$) à $10\,\mathrm{GHz}$. Le modèle du conducteur parfait est-il justifié ?

Correction

Q-1) Le courant total par unité de largeur est donné par la discontinuité de B : $J_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}$. Puissance dissipée : $\frac{1}{2\gamma\delta}\frac{4E_0^2}{\mu_0^2 c^2}$.

Q-2) La puissance incidente est $\frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$. Le rapport vaut $1 - R = \frac{4}{\gamma\delta\mu_0^2 c^3 \varepsilon_0} = \frac{4}{\mu_0 \gamma \delta c}$, et comme $\mu_0\gamma = \frac{2}{\omega\delta^2}$: $1 - R = \frac{2\omega\delta}{c}$.

Q-3) $\delta = 0{,}65\,\mu\mathrm{m}$, $\frac{2\omega\delta}{c} = \frac{2\times 6{,}28\times 10^{10}\times 6{,}5\times 10^{-7}}{3{,}0\times 10^8} = 2{,}7\times 10^{-4}$: $R = 99{,}97\,\%$. Le modèle du conducteur parfait est excellent pour les micro-ondes (guides et cavités métalliques).

EXERCICE 12 Énergie et pression dans une cavité ; invariant adiabatique

★★★☆☆

La cavité $0 < z < L$ (section S) contient le mode $\vec{E} = E_0 \sin(k_n z)\cos(\omega_n t)\,\vec{u}_x$.

Q-1) Calculer l'énergie électromagnétique W contenue dans la cavité. Commenter.

Q-2) Calculer la force moyenne exercée sur le miroir $z = L$. Montrer qu'elle vaut W/L.

Q-3) On écarte très lentement le miroir de $\mathrm{d}L$. En admettant que le travail des forces sur le miroir est prélevé sur l'énergie du mode, montrer que W/ω_n reste constant. Interprétation quantique ?

Correction

Q-1) Avec $\vec{B} = -\frac{E_0}{c}\cos(k_n z)\sin(\omega_n t)\vec{u}_y$:

$$W = S\int_0^L \left[\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\sin^2(k_n z)\cos^2(\omega_n t) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(k_n z)\sin^2(\omega_n t)\right]\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 S L}{4},$$

indépendante du temps : l'énergie passe d'une forme électrique ($t = 0$) à une forme magnétique ($t = T/4$).

Q-2) En $z = L$, $|B| = \frac{E_0}{c}|\sin\omega_n t|$; la pression vaut $\frac{B^2}{2\mu_0}$ (même calcul qu'en III.4), de moyenne $\frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$. Force moyenne : $F = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 S}{4} = \frac{W}{L}$, vers l'extérieur.

Q-3) $\mathrm{d}W = -F\,\mathrm{d}L = -W\frac{\mathrm{d}L}{L}$, donc WL est constant ; comme $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ (le mode n est conservé), $\frac{W}{\omega_n}$ est constant. Avec $W = N\hbar\omega_n$, le nombre N de photons du mode ne change pas lors d'une transformation lente ; chaque photon perd de l'énergie par effet Doppler sur le miroir qui recule.

EXERCICE 13 Réflexion partielle : taux d'onde stationnaire

★★★☆☆

Une ligne ou un guide est le siège d'une onde incidente $E_0\cos(\omega t - kz)$ et d'une onde réfléchie $rE_0\cos(\omega t + kz)$, avec r réel, $0 < r < 1$ (même direction de polarisation).

Q-1) Montrer que l'amplitude du champ total en z vaut $E_m(z) = E_0\sqrt{1 + r^2 + 2r\cos(2kz)}$. Préciser ses valeurs extrêmes.

Q-2) On définit le taux d'onde stationnaire $s = \frac{E_{m,\max}}{E_{m,\min}}$. Exprimer r en fonction de s. Cas $s = 3$? Cas limites ?

Q-3) Décomposer le champ en une onde progressive et une onde stationnaire. Que vaut la puissance surfacique moyenne transportée ?

Correction

Q-1) En complexes, $\underline{E} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right)$ et $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}|^2 = 1 + r^2 + 2r\cos 2kz$. Maximum $E_0(1+r)$, minimum $E_0(1-r)$, alternant tous les $\lambda/4$.

Q-2) $s = \frac{1+r}{1-r}$, $r = \frac{s-1}{s+1}$; $s = 3$ donne $r = 0,5$ et $R = r^2 = 25\,\%$. $s = 1$: pas de réflexion (onde progressive) ; $s \to \infty$: réflexion totale (onde stationnaire pure).

Q-3) $E = (1-r)E_0\cos(\omega t - kz) + 2rE_0\cos(kz)\cos(\omega t)$: la partie stationnaire ne transporte rien en moyenne, et $\langle\Pi\rangle = (1-r^2)\frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$, différence des flux incident et réfléchi.

EXERCICE 14 Incidence oblique : vers le guide d'ondes

Une onde $\underline{\vec{E}_i} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx\sin\alpha - kz\cos\alpha)}\vec{u}_y$ arrive sur le plan conducteur parfait $z=0$ ($z>0$ métallique) avec l'angle d'incidence α.

Q-1) Montrer que l'onde réfléchie est $\underline{\vec{E}_r} = -E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx\sin\alpha + kz\cos\alpha)}\vec{u}_y$. Quelle loi retrouve-t-on ?

Q-2) Exprimer le champ total. Décrire sa structure selon x et selon z.

Q-3) On place un second plan conducteur en $z=-a$. À quelle condition le champ précédent convient-il ? En déduire la relation de dispersion $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$ et la vitesse de phase selon x.

Correction

Q-1) La condition $E_y(z=0)=0$ pour tous x et t impose même pulsation et même composante $k\sin\alpha$ selon x ; la relation de dispersion fixe la composante selon z à $-k\cos\alpha$ (onde qui repart) : angle de réflexion égal à l'angle d'incidence (loi de Descartes) et amplitude $-E_0$.
Q-2) $\underline{\vec{E}} = -2\mathrm{i}E_0\sin(kz\cos\alpha)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx\sin\alpha)}\vec{u}_y$: onde **progressive selon** x et **stationnaire selon** z.
Q-3) Il faut $\sin(ka\cos\alpha)=0$, soit $k\cos\alpha = \frac{n\pi}{a}$. Avec $k_x = k\sin\alpha$: $k_x^2 = k^2 - k^2\cos^2\alpha = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$. La propagation exige $\omega > \frac{n\pi c}{a}$ (fréquence de coupure, comme pour le plasma) et $v_\varphi = \frac{\omega}{k_x} = \frac{c}{\sin\alpha} > c$.

VII Classiques des concours

EXERCICE 15 Guide d'ondes rectangulaire, mode TE_{10}

Un guide est un tuyau métallique (conducteur parfait) rempli d'air, de section rectangulaire $0<x<a$, $0<y<b$, d'axe Oz, avec $a = 22{,}9\,\mathrm{mm}$ et $b = 10{,}2\,\mathrm{mm}$. On étudie l'onde $\vec{E} = E_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_g z)\,\vec{u}_y$.

Q-1) Vérifier que $\mathrm{div}\,\vec{E}=0$ et que les conditions aux limites sont satisfaites sur les quatre parois.

Q-2) Établir la relation de dispersion. Montrer l'existence d'une fréquence de coupure f_c et la calculer.

Q-3) À $f = 10\,\mathrm{GHz}$, calculer v_φ, v_g et la longueur d'onde guidée.

Q-4) Déterminer $\vec{B}$. L'onde est-elle transverse électrique ? transverse magnétique ?

Q-5) Calculer la puissance moyenne transportée. Quelle amplitude E_0 faut-il pour transporter $1\,\mathrm{kW}$? Comparer au champ disruptif de l'air, $3\times10^6\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

Q-6) Le mode TE_{20} ($\sin\frac{2\pi x}{a}$) et le mode TE_{01} (variation selon y) ont pour fréquences de coupure $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{2b}$. Dans quelle bande de fréquences le guide est-il monomode ?

Correction

Q-1) $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$. Sur les parois $x=0$ et $x=a$, E_y est tangent et s'annule grâce au sinus ; sur les parois $y=0$ et $y=b$, $\vec{E}$ est normal, sa composante tangentielle est nulle.
Q-2) $\Delta E_y = \left(-\frac{\pi^2}{a^2} - k_g^2\right)E_y = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}E_y$: $k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$. Propagation si $f > f_c = \frac{c}{2a} = 6{,}55\,\mathrm{GHz}$; en dessous, l'onde est évanescente.
Q-3) $\frac{f_c}{f} = 0{,}655$ et $\sqrt{1-0{,}655^2} = 0{,}755$; $v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{0{,}755} = 3{,}97\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = 0{,}755\,c = 2{,}27\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (et $v_\varphi v_g = c^2$) ; $\lambda_g = \frac{3{,}0\,\mathrm{cm}}{0{,}755} = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.
Q-4) $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{u}_x - \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{u}_z$ donne $B_x = -\frac{k_g E_0}{\omega}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - k_g z)$ et $B_z = -\frac{\pi E_0}{a\omega}\cos\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t - k_g z)$. $E_z = 0$: onde transverse électrique ; $B_z \neq 0$: elle n'est pas transverse magnétique.

Q-5) $\Pi_z = -\frac{E_y B_x}{\mu_0}$, de moyenne $\frac{k_g E_0^2}{2\mu_0\omega}\sin^2\frac{\pi x}{a}$; en intégrant sur la section $(\frac{ab}{2})$: $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{k_g E_0^2 ab}{4\mu_0\omega} = \frac{E_0^2 ab}{4\mu_0 c}\times 0,755$. Pour 1 kW : $E_0 = \sqrt{\frac{4\times377\times1000}{0,755\times2,34\times10^{-4}}} = 9,2\times10^4\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$, trente fois moins que le champ disruptif : un tel guide peut transporter des puissances de l'ordre de la centaine de kilowatts.
Q-6) $\frac{c}{a} = 13,1\,\mathrm{GHz}$ et $\frac{c}{2b} = 14,7\,\mathrm{GHz}$. Ici $a > 2b$, donc la coupure la plus basse après celle du TE_{10} est celle du TE_{20} : le guide est monomode entre 6,55 GHz et 13,1 GHz, ce qui couvre la bande X (8–12 GHz) sans dispersion entre modes.

EXERCICE 16 Pression de radiation et voile solaire

Une OPPM se propage dans le vide selon $\vec{u}_z$: $\underline{\vec{E}} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-z/c)}\vec{u}_x$.

Q-1) Déterminer $\vec{B}$, $\vec{\Pi}$, $\langle\vec{\Pi}\rangle$ et la densité moyenne d'énergie $\langle u\rangle$. Relier $\langle\Pi\rangle$ et $\langle u\rangle$.

Q-2) On décrit la lumière comme un flux de photons d'énergie $h\nu$. Rappeler leur quantité de mouvement. Quelle quantité de mouvement traverse une surface S normale à $\vec{u}_z$ pendant $\mathrm{d}t$?

Q-3) En déduire la pression exercée sur un écran absorbant, puis sur un miroir parfait sous incidence normale. Retrouver ce dernier résultat par l'électromagnétisme.

Q-4) Une voile solaire parfaitement réfléchissante, d'aire $A = 1,0\times10^4\,\mathrm{m^2}$, de masse totale (avec la sonde) $m = 100\,\mathrm{kg}$, est orientée face au Soleil à la distance $d = 1\,\mathrm{ua}$, où $\langle\Pi\rangle = 1361\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Calculer la force et l'accélération dues au rayonnement. Comparer à l'attraction solaire ($GM_S = 1,33\times10^{20}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$, $1\,\mathrm{ua} = 1,50\times10^{11}\,\mathrm{m}$).

Q-5) Montrer que le rapport de ces deux forces ne dépend pas de d. Quelle masse surfacique maximale doit avoir la voile pour que le rayonnement l'emporte sur la gravitation ?

Correction

Q-1) $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z\wedge\vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\cos\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\vec{u}_y$; $\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\cdots)\vec{u}_z$, $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\vec{u}_z$; $\langle u\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ (moitié électrique, moitié magnétique) ; $\langle\Pi\rangle = c\langle u\rangle$: l'énergie se déplace à la vitesse c.
Q-2) $p = \frac{h\nu}{c}$ (relations de Planck-Einstein et de de Broglie). Les photons qui traversent S pendant $\mathrm{d}t$ transportent l'énergie $\langle\Pi\rangle S\,\mathrm{d}t$, donc la quantité de mouvement $\frac{\langle\Pi\rangle S\,\mathrm{d}t}{c}$.
Q-3) Absorbant : $P = \frac{\langle\Pi\rangle}{c}$. Miroir : la quantité de mouvement s'inverse, $P = \frac{2\langle\Pi\rangle}{c}$; le calcul de III.4 (force de Laplace sur le courant surfacique) donne bien $\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{2\langle\Pi\rangle}{c}$.
Q-4) $P = \frac{2\times1361}{3,0\times10^8} = 9,1\times10^{-6}\,\mathrm{Pa}$, $F = PA = 9,1\times10^{-2}\,\mathrm{N}$ et $a = 9,1\times10^{-4}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Gravitation : $g_S = \frac{GM_S}{d^2} = 5,9\times10^{-3}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$: le rayonnement compense 15 % de l'attraction.
Q-5) $\langle\Pi\rangle \propto \frac{1}{d^2}$ (conservation de la puissance solaire sur une sphère) comme la gravitation : le rapport est constant. Il faut $\frac{2\langle\Pi\rangle A}{c} > \frac{GM_S m}{d^2}$, soit $\frac{m}{A} < \frac{2\langle\Pi\rangle d^2}{cGM_S} = 1,5\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-2}}$: une voile (et sa charge) de moins de 1,5 g par mètre carré, ce qui impose des films de quelques micromètres.