LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

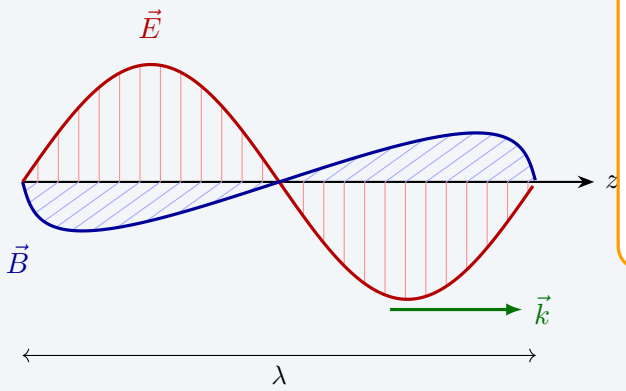
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

W1

PHYSIQUE DES ONDES

Propagation du champ électromagnétique dans le vide

Équation de d'Alembert — Onde plane progressive — OPPM et notation complexe — Polarisation — Plasma dilué et fréquence de coupure — Vitesses de phase et de groupe — Effet de peau



« *Nous pouvons difficilement éviter la conclusion que la lumière consiste en ondulations transversales du même milieu qui est la cause des phénomènes électriques et magnétiques.*

— James Clerk Maxwell, *On Physical Lines of Force*, partie III (1862)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Onde plane et polarisation »

W1 — Ondes dans le vide

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Établir l'équation de d'Alembert dans le vide, la résoudre à une dimension ; établir la structure et l'énergie de l'onde plane progressive (modèle idéal).
- Utiliser la notation complexe pour une OPPM (vecteur d'onde, dispersion, double périodicité) ; citer des applications de chaque domaine spectral.
- Reconnaître un état de polarisation ; utiliser la loi de Malus et les lames à retard.
- Plasma dilué : conductivité complexe, relation de dispersion, coupure, onde évanescente ; vitesses de phase et de groupe d'un paquet d'ondes.
- Établir l'épaisseur de peau d'un conducteur ohmique et en donner des ordres de grandeur.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Ce chapitre couvre la partie 4.1 du programme : le vide, le plasma et le métal. La simulation PhysioNova « Onde plane et polarisation » anime une OPPM et l'extrémité de son champ électrique pour chaque état de polarisation.
Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Équations de propagation dans le vide . . . 3
II Ondes planes progressives . . . 3
II.1 Solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension . . . 3
II.2 Structure de l'onde plane progressive . . . 4
II.3 Aspects énergétiques . . . 5
III Onde plane progressive monochromatique . . . 6
III.1 Définition, double périodicité, relation de dispersion . . . 6
III.2 Notation complexe . . . 6
III.3 Domaines spectraux . . . 7
IV Polarisation d'une OPPM . . . 8
IV.1 États de polarisation . . . 8
IV.2 Lumière naturelle, polariseurs et lames . . . 9
V Propagation dans un plasma dilué . . . 10
V.1 Modèle et conductivité complexe . . . 10
V.2 Relation de dispersion . . . 11
VI Vitesse de phase et vitesse de groupe . . . 13
VI.1 Dispersion et vitesse de phase . . . 13
VI.2 Paquet d'ondes et vitesse de groupe . . . 13
VII Conducteur ohmique : effet de peau . . . 14
VII.1 Équation de propagation dans un métal . . . 14
VII.2 Épaisseur de peau . . . 15
VIII Synthèse . . . 17
IX Exercices d'approfondissement . . . 17
X Classiques des concours . . . 19

I Équations de propagation dans le vide

On étudie une région de l'espace **vide de charges et de courants** ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$), loin des sources qui ont créé le champ. Les équations de Maxwell s'y écrivent

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Équations de d'Alembert R D

Chaque composante de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ vérifie l'**équation de d'Alembert** à trois dimensions :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Démonstration. On prend le rotationnel de MF et on utilise $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{X}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(\operatorname{div}\vec{X}) - \vec{\Delta}\vec{X}$:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{0}) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

De même, le rotationnel de MA donne $-\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$, avec $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

Remarque

- Numériquement $c = \frac{1}{\sqrt{4\pi\times10^{-7}\times 8{,}854\times10^{-12}}} = 2{,}998\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: c'est la vitesse de la lumière. Maxwell en conclut en 1864 que la lumière est une onde électromagnétique ; Hertz produisit et détecta des ondes radio en 1888.
- L'équation est **linéaire** : toute combinaison linéaire de solutions est solution (principe de superposition).
- Elle est invariante par le changement $t \to -t$: la propagation dans le vide est un phénomène **réversible**, sans atténuation.
- Les équations de d'Alembert sont nécessaires mais pas suffisantes : une solution doit aussi vérifier les quatre équations de Maxwell (structure de l'onde, partie II).

II Ondes planes progressives

II.1 Solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension

Définition — Onde plane R

Une onde est **plane** si, à chaque instant, le champ est le même en tout point d'un plan orthogonal à une direction fixe $\vec{u}$: il ne dépend que de t et de la coordonnée $x = \vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}$. Ces plans sont les **plans d'onde**.

Solution générale à une dimension cartésienne R D

Toute solution de $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ s'écrit

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

f est une **onde progressive** se propageant sans déformation vers les x croissants à la célérité c ; g se propage vers les x décroissants (onde « régressive »).

Démonstration. On pose $p = t - \frac{x}{c}$ et $q = t + \frac{x}{c}$. Alors $\dfrac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(-\dfrac{\partial s}{\partial p} + \dfrac{\partial s}{\partial q}\right)$ et $\dfrac{\partial s}{\partial t} = \dfrac{\partial s}{\partial p} + \dfrac{\partial s}{\partial q}$, d'où

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)^2\right] s = -\frac{4}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial p\,\partial q} = 0.$$

$\dfrac{\partial s}{\partial q}$ ne dépend donc que de q : en intégrant, $s = f(p) + g(q)$.

Interprétation. $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ prend en $x + \Delta x$ à l'instant $t + \frac{\Delta x}{c}$ la valeur qu'elle avait en x à l'instant t : le signal se décale en bloc à la vitesse c.

Remarque

Onde sphérique. Pour une source ponctuelle, la symétrie sphérique donne $\Delta s = \frac{1}{r}\dfrac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2}$; rs vérifie alors l'équation à une dimension et $s = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)$: onde divergente et onde convergente, dont l'amplitude décroît en $\frac{1}{r}$. Loin de la source, sur une région petite devant r, l'onde sphérique est **localement plane**.

II.2 Structure de l'onde plane progressive

Structure de l'OPP dans le vide R D

Pour une onde plane progressive de direction $\vec{u}$ (champs fonctions de $t - \frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{OM}}{c}$, sans composante statique) :

- l'onde est **transverse** : $\vec{E}\cdot\vec{u} = 0$ et $\vec{B}\cdot\vec{u} = 0$;
- $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$: $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase et $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$.

Démonstration. Prenons $\vec{u} = \vec{u}_x$ et $\vec{E} = \vec{F}(\tau)$, $\vec{B} = \vec{G}(\tau)$ avec $\tau = t - \frac{x}{c}$. Pour un tel champ, $\dfrac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z} = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$: l'opérateur nabla s'écrit $-\frac{\vec{u}_x}{c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$. MG donne $-\frac{1}{c}\dfrac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}\tau} = 0$: F_x est constant, nul en l'absence de composante statique. MF donne $-\frac{1}{c}\vec{u}_x \wedge \dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\tau} = -\dfrac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}\tau}$, d'où, en intégrant sans constante, $\vec{G} = \frac{\vec{u}_x\wedge\vec{F}}{c}$, qui est orthogonal à $\vec{u}_x$.

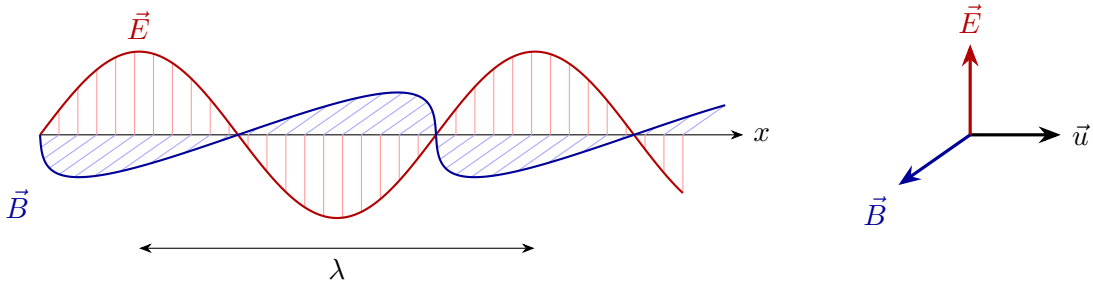


Fig. 1 : Instantané d'une onde plane progressive polarisée rectilignement : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses et en phase, $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct (sur le trièdre de droite, $\vec{B}$ pointe vers l'avant quand $\vec{E}$ pointe vers le haut).

II.3 Aspects énergétiques

Énergie transportée par une OPP R D

Comme $B = \frac{E}{c}$, les densités d'énergie électrique et magnétique sont égales : $\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$. Donc

$$u_{em} = \varepsilon_0 E^2 \qquad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u} = c\, u_{em}\, \vec{u}$$

L'énergie se propage dans la direction de l'onde, à la célérité c ; l'**intensité** de l'onde est $I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle$.

Remarque

Caractère idéal de l'onde plane. Une onde plane a la même amplitude sur des plans infinis : elle transporterait une puissance infinie. C'est un modèle **local**, valable sur une région de dimensions petites devant la distance à la source (onde sphérique lointaine) ou devant la largeur d'un faisceau (laser).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Une impulsion plane ✦✧✧✧✧

Dans le vide, une impulsion lumineuse plane se propage selon $\vec{u}_z$: $\vec{E} = E_0 \exp\left(-\frac{(t-z/c)^2}{\tau^2}\right)\vec{u}_y$.

Q-1) Justifier que c'est une OPP. Exprimer $\vec{B}$.

Q-2) Exprimer l'énergie transportée par unité de surface d'onde par toute l'impulsion (on donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2s^2}\mathrm{d}s = \sqrt{\pi/2}$).

Q-3) Application : $E_0 = 10^7\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$, $\tau = 50\,\mathrm{fs}$.

Correction

Q-1) Le champ ne dépend que de $t - \frac{z}{c}$: OPP de direction $\vec{u}_z$, transverse. $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c}\exp\left(-\frac{(t-z/c)^2}{\tau^2}\right)\vec{u}_x$.

Q-2) $\Pi = \frac{E^2}{\mu_0 c}$; en un point fixe, $\int \Pi\,\mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\int \mathrm{e}^{-2t^2/\tau^2}\mathrm{d}t = \frac{E_0^2 \tau}{\mu_0 c}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Q-3) $\frac{10^{14}\times 5\times 10^{-14}\times 1{,}25}{377} = 1{,}7\times 10^{-2}\,\mathrm{J\cdot m^{-2}}$; sur une tache de $1\,\mathrm{mm^2}$, $17\,\mathrm{nJ}$ délivrés en $50\,\mathrm{fs}$, soit une puissance crête de $0{,}3\,\mathrm{MW}$.

III Onde plane progressive monochromatique

III.1 Définition, double périodicité, relation de dispersion

Définition — OPPM R

Une **onde plane progressive monochromatique** (ou harmonique) de direction $\vec{u}$ s'écrit

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + \varphi\right) \qquad \text{avec} \qquad \vec{k} = k\,\vec{u}$$

$\vec{k}$ est le **vecteur d'onde**. L'onde présente une **double périodicité** : temporelle, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, et spatiale, de période $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (longueur d'onde) le long de $\vec{u}$. Deux points distants de Δx selon $\vec{u}$ vibrent avec le déphasage $k\Delta x$.

Relation de dispersion dans le vide R D

En reportant une OPPM dans l'équation de d'Alembert ($\Delta \to -k^2$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2$) :

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = cT = \frac{c}{f}$$

La relation $k(\omega)$ est linéaire : toutes les fréquences se propagent à la même vitesse c, le vide est **non dispersif**.

III.2 Notation complexe

On associe à l'OPPM le champ complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})}$, avec $\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$.

Opérateurs et relations de structure R D

Pour une OPPM, $\frac{\partial}{\partial t} \to \mathrm{i}\omega$ et $\vec{\nabla} \to -\mathrm{i}\vec{k}$: $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}$, $\Delta \to -k^2$. Les équations de Maxwell deviennent algébriques :

$$\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \qquad \vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \qquad \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega} \qquad \vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}.$$

Démonstration. $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = -\mathrm{i}k_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\dots)}$, de même pour y et z : $\vec{\nabla} \to -\mathrm{i}\vec{k}$. MF : $-\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}}$; MA : $-\mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$.

Moyennes énergétiques d'une OPPM R

Pour $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{e}$ ($\vec{e}$ unitaire transverse) : $\langle u_{em}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ et

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\,\vec{u} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*\right)$$

Remarque

Rôle de l'OPPM. L'OPPM est encore plus idéale que l'OPP : extension infinie dans l'espace *et* dans le temps. Mais d'après l'analyse de Fourier, tout signal réel est une superposition d'OPPM de pulsations différentes : c'est un **paquet d'ondes**, et l'OPPM en est la composante élémentaire. L'équation de propagation étant linéaire, il suffit d'étudier chaque composante. Les relations de structure en complexe supposent la convention $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$; avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, il faut changer i en $-\mathrm{i}$ dans les opérateurs.

III.3 Domaines spectraux

Domaine	Longueur d'onde dans le vide	Applications
Ondes radio	$\lambda > 1\,\mathrm{m}$	radiodiffusion AM et FM, TNT, RFID ($13{,}56\,\mathrm{MHz}$)
Micro-ondes	$1\,\mathrm{mm}$ à $1\,\mathrm{m}$	téléphonie ($0{,}9\,\mathrm{GHz}$ à $3{,}5\,\mathrm{GHz}$), Wi-Fi, four ($2{,}45\,\mathrm{GHz}$), radar
Infrarouge	$0{,}8\,\mu\mathrm{m}$ à $1\,\mathrm{mm}$	thermographie, télécommandes, fibres optiques ($1{,}55\,\mu\mathrm{m}$)
Visible	$400\,\mathrm{nm}$ à $800\,\mathrm{nm}$	vision, éclairage, lasers
Ultraviolet	$10\,\mathrm{nm}$ à $400\,\mathrm{nm}$	stérilisation, photolithographie
Rayons X	$0{,}01\,\mathrm{nm}$ à $10\,\mathrm{nm}$	radiographie, cristallographie
Rayons γ	$< 0{,}01\,\mathrm{nm}$	radiothérapie, astrophysique

Tab. 1 : Le spectre électromagnétique.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Appliquer $\vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$ à une onde stationnaire, à une superposition d'ondes de directions différentes ou à une onde dans un milieu : cette relation ne vaut que pour **une** OPP dans le vide.
- Confondre la direction de propagation ($\vec{k}$) et la direction du champ électrique.
- Oublier de vérifier $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$: un champ $E_x(x,t)\vec{u}_x$ ne peut pas être une onde dans le vide.
- Calculer une énergie avec les champs complexes : revenir aux champs réels.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 Une OPPM oblique

✦✧✧✧✧

Dans le vide, $\vec{E} = E_0\cos\left(\omega t - \frac{k(x+y)}{\sqrt{2}}\right)\vec{u}_z$.

Q-1) Préciser la direction de propagation, la relation entre k et ω, et vérifier que l'onde est transverse.

Q-2) Déterminer $\vec{B}$ et $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle$.

Correction

Q-1) $\vec{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$: propagation selon la première bissectrice, avec $k = \frac{\omega}{c}$. $\vec{E} \parallel \vec{u}_z$ est bien orthogonal à $\vec{k}$.

Q-2) $\vec{u}\wedge\vec{u}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x+\vec{u}_y)\wedge\vec{u}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x-\vec{u}_y)$, donc $\vec{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \frac{k(x+y)}{\sqrt{2}}\right)(\vec{u}_x-\vec{u}_y)$ et $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\vec{u}$.

EXERCICE 3 **Ordres de grandeur** ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer la longueur d'onde de la radio FM ($100\,\mathrm{MHz}$), d'un téléphone ($900\,\mathrm{MHz}$), d'un four à micro-ondes ($2{,}45\,\mathrm{GHz}$) et de la lumière verte ($6\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$). Comparer à la taille des antennes.

Q-2) Un laser de $400\,\mathrm{W}$ ($\lambda = 0{,}70\,\mu\mathrm{m}$) émet un faisceau cylindrique de $3{,}0\,\mathrm{mm}$ de diamètre. Calculer l'amplitude du champ électrique et le nombre de photons émis par seconde ($h = 6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$).

Correction

Q-1) $\lambda = \frac{c}{f}$: $3\,\mathrm{m}$ (antennes d'environ $1\,\mathrm{m}$), $33\,\mathrm{cm}$ (antennes intégrées de quelques centimètres, d'ordre $\frac{\lambda}{4}$), $12\,\mathrm{cm}$ (cavité de quelques λ, d'où des ondes stationnaires et le plateau tournant), $500\,\mathrm{nm}$.

Q-2) $\langle\Pi\rangle = \frac{400}{\pi(1{,}5\times10^{-3})^2} = 5{,}7\times10^{7}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$; $E_0 = \sqrt{\frac{2\langle\Pi\rangle}{\varepsilon_0 c}} = 2{,}1\times10^{5}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$. Énergie d'un photon $\frac{hc}{\lambda} = 2{,}8\times10^{-19}\,\mathrm{J}$: $1{,}4\times10^{21}$ photons par seconde.

IV Polarisation d'une OPPM

IV.1 États de polarisation

Pour une OPPM se propageant selon $\vec{u}_z$, le champ électrique est transverse ; à une origine des temps près, il s'écrit

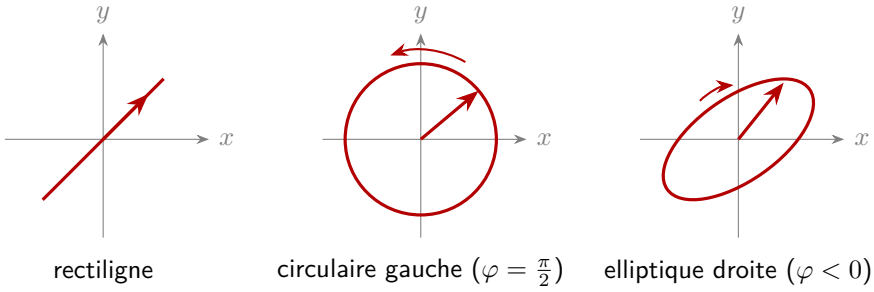
$$\vec{E} = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x + E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi)\,\vec{u}_y, \qquad \varphi \in]-\pi,\pi].$$

Dans un plan d'onde, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit en général une **ellipse** : c'est l'état de **polarisation** de l'onde. On décrit la polarisation par $\vec{E}$ car $\vec{B}$ s'en déduit et parce que les détecteurs (et la matière) sont surtout sensibles au champ électrique.

Définition — États de polarisation R

- $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$: polarisation **rectiligne** ; $\vec{E}$ garde une direction fixe.
- $E_{0x} = E_{0y}$ et $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$: polarisation **circulaire** ; l'extrémité de $\vec{E}$ décrit un cercle à vitesse angulaire ω.
- Cas général : polarisation **elliptique**.

Sens de rotation : la polarisation est dite **gauche** si, pour un observateur qui *reçoit* l'onde (il regarde vers la source), $\vec{E}$ tourne dans le sens trigonométrique ; **droite** sinon. Avec l'écriture ci-dessus, $(\vec{E}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t})\cdot\vec{u}_z = \omega E_{0x}E_{0y}\sin\varphi$: gauche pour $\varphi\in]0,\pi[$, droite pour $\varphi\in]-\pi,0[$.



rectiligne — circulaire gauche ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) — elliptique droite ($\varphi < 0$)

Fig. 2 : Courbe décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde, vue par un observateur qui reçoit l'onde ($\vec{u}_z$ pointe vers lui).

☞ Méthode — Identifier une polarisation M

1. Mettre les deux composantes sous la forme $\cos(\omega t - kz)$ et $\cos(\omega t - kz - \varphi)$ (par exemple $\sin\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$).
2. Lire φ et le rapport des amplitudes : rectiligne, circulaire ou elliptique.
3. Pour le sens, se placer en $z = 0$, suivre $\vec{E}$ entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{4}$ et regarder le plan (x, y) depuis les z positifs (côté où va l'onde).

IV.2 Lumière naturelle, polariseurs et lames

Lumière naturelle. Une source thermique émet des trains d'onde courts et indépendants : le déphasage entre les deux composantes varie aléatoirement en quelques femtosecondes ; l'extrémité de $\vec{E}$ ne décrit aucune courbe stable, la lumière est **non polarisée**.

Polariseur et loi de Malus R D

Un **polariseur** (dichroïque) ne transmet que la composante de $\vec{E}$ parallèle à sa direction de transmission. Derrière lui, la lumière est polarisée rectilignement ; une lumière naturelle perd la moitié de son intensité. Si une onde polarisée rectilignement d'intensité I_0 arrive sur un analyseur dont l'axe fait l'angle α avec sa direction de polarisation :

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Démonstration. L'amplitude transmise est la projection $E_0 \cos\alpha$, et l'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (polariseurs croisés), $I = 0$: c'est le test d'une polarisation rectiligne.

Définition — Lames à retard R

Une lame biréfringente d'épaisseur e possède deux axes (lent, d'indice n_ℓ, et rapide, d'indice $n_r < n_\ell$). La composante de $\vec{E}$ selon l'axe lent prend, par rapport à l'autre, le retard de phase

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_\ell - n_r)\, e$$

Lame quart d'onde : $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; elle transforme une polarisation rectiligne à $45°$ de ses axes en polarisation circulaire. **Lame demi-onde** : $\Delta\varphi = \pi$; elle transforme une rectiligne en sa symétrique par rapport aux axes de la lame.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 — **Reconnaître des polarisations** ✦✦✧✧✧

On considère, dans le vide, les champs suivants (propagation selon $\vec{u}_z$) :

(a) $E_0 \cos(\omega t - kz)(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$ (b) $E_0 \left[\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y\right]$

(c) $E_0 \left[\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x - 2\sin(\omega t - kz)\vec{u}_y\right]$

Q-1) Préciser l'état de polarisation et, le cas échéant, le sens de rotation.

Q-2) Calculer $\vec{\Pi}$ pour l'onde (b). Commenter.

Q-3) Montrer que la somme d'une onde circulaire gauche et d'une onde circulaire droite de même amplitude est polarisée rectilignement.

Correction

Q-1) (a) Rectiligne, à $45°$ de $\vec{u}_x$. (b) $\sin\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, amplitudes égales : circulaire **gauche** (en $z = 0$, $\vec{E}$ passe de $\vec{u}_x$ à $\vec{u}_y$ en $\frac{T}{4}$, sens trigonométrique vu des $z > 0$). (c) $-2\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, amplitudes différentes : elliptique **droite**, d'axes Ox et Oy.

Q-2) $\vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\left[\cos(\cdot)\vec{u}_y - \sin(\cdot)\vec{u}_x\right]$ et $\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u}_z = \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$: constant dans le temps, car $\|\vec{E}\|$ est constant pour une onde circulaire.

Q-3) $E_0[\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y] + E_0[\cos\theta\vec{u}_x - \sin\theta\vec{u}_y] = 2E_0\cos\theta\,\vec{u}_x$: rectiligne selon $\vec{u}_x$.

EXERCICE 5 Trois polariseurs

★★☆☆☆

De la lumière naturelle d'intensité I_0 traverse deux polariseurs croisés P_1 et P_2.

Q-1) Quelle intensité sort de P_2 ?

Q-2) On intercale entre eux un polariseur P dont l'axe fait l'angle θ avec celui de P_1. Exprimer l'intensité transmise. Pour quel angle est-elle maximale ? Commenter.

Correction

Q-1) P_1 transmet $\frac{I_0}{2}$; P_2, croisé, l'éteint : $I = 0$.

Q-2) Après P : $\frac{I_0}{2}\cos^2\theta$; après P_2, à $\frac{\pi}{2} - \theta$ de P : $I = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{I_0}{8}\sin^2 2\theta$, maximale pour $\theta = 45°$ ($\frac{I_0}{8}$). Ajouter un filtre *augmente* la lumière transmise : un polariseur projette le champ, il ne se contente pas de « trier » des photons existants.

V Propagation dans un plasma dilué

V.1 Modèle et conductivité complexe

Définition — Plasma dilué R

Un **plasma** est un gaz ionisé (ions positifs et électrons libres), globalement et localement neutre au repos. Hypothèses du modèle :

- plasma **dilué** : aucune interaction entre les charges (pas de collisions) ; poids négligeable ;
- ions **immobiles**, beaucoup plus lourds que les électrons ($\frac{m_p}{m_e} \approx 1836$) ; densité électronique n, électrons de masse m et de charge $-e$;
- électrons non relativistes : la force magnétique $e\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \sim ev\frac{E}{c}$ est négligeable devant eE ;
- onde transverse et localement neutre : $\rho = 0$.

Exemples : ionosphère ($n \approx 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}$ à $10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$), vent solaire, plasmas de fusion, gaz d'électrons d'un métal (approximativement, aux hautes fréquences).

Conductivité complexe du plasma R D

Pour une OPPM $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}$, en régime forcé :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\gamma} = -\mathrm{i}\,\frac{ne^2}{m\omega}$$

La conductivité est **imaginaire pure** : $\vec{j}$ est en quadrature avec $\vec{E}$ et la puissance moyenne cédée aux électrons, $\left\langle \vec{j}\cdot\vec{E}\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\gamma})E_0^2$, est nulle. Le plasma n'absorbe pas l'onde.

Démonstration. Principe fondamental de la dynamique pour un électron : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$, soit $\mathrm{i}\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$; puis $\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2}{\mathrm{i}m\omega}\underline{\vec{E}}$.

V.2 Relation de dispersion

Relation de dispersion du plasma R D

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \qquad \text{avec} \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} \quad \text{(pulsation plasma)}$$

Numériquement, $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 9\sqrt{n}$ (f_p en Hz, n en m^{-3}).

Démonstration. Le rotationnel de MF, avec MA et $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, donne l'équation de propagation en présence de courants :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}.$$

En complexe : $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \mathrm{i}\omega\mu_0\underline{\gamma} = \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega_p^2}{c^2}$, car $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$.

Deux régimes de part et d'autre de la coupure R

- $\omega > \omega_p$: $k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ est réel ; l'onde **se propage** sans atténuation, mais le milieu est **dispersif** (vitesse de phase $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}} > c$, dépendant de ω).
- $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$, $k = -\frac{\mathrm{i}}{\delta}$ avec $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}$ (racine qui assure la décroissance). Le champ réel $\vec{E} = \vec{E}_0\mathrm{e}^{-z/\delta}\cos(\omega t)$ oscille sur place avec une amplitude qui décroît : c'est une **onde évanescente**. $\vec{B}$ est en quadrature avec $\vec{E}$, donc $\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \vec{0}$: aucune énergie ne pénètre en moyenne, l'onde incidente est **totalement réfléchie**.

ω_p est une **pulsation de coupure** : le plasma se comporte comme un filtre passe-haut. Pour $\omega \gg \omega_p$, les électrons n'ont plus le temps de suivre le champ et l'on retrouve la propagation dans le vide.

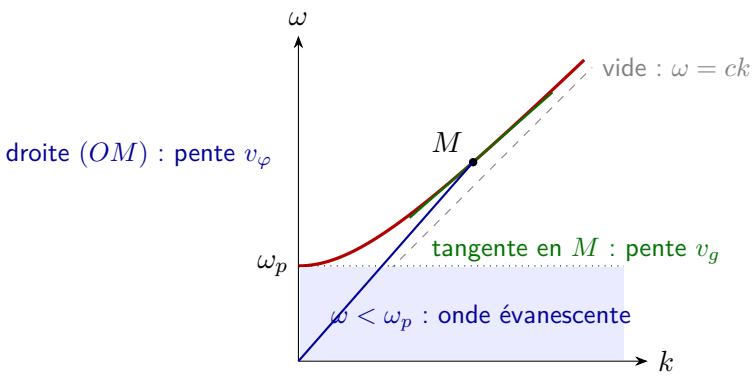


Fig. 3 : Relation de dispersion du plasma : aucune onde ne se propage sous ω_p ; la vitesse de phase (pente de la corde issue de l'origine) dépasse c, la vitesse de groupe (pente de la tangente) est inférieure à c.

Ordres de grandeur

Ionosphère. La haute atmosphère (de $60\,\mathrm{km}$ à $1000\,\mathrm{km}$ d'altitude) est ionisée par le rayonnement ultraviolet solaire : $n \approx 10^{10}\,\mathrm{m^{-3}}$ à $10^{12}\,\mathrm{m^{-3}}$, soit $f_p \approx 1\,\mathrm{MHz}$ à $9\,\mathrm{MHz}$. Les ondes moyennes et courtes ($f < f_p$) sont réfléchies et peuvent atteindre des récepteurs situés au-delà de l'horizon par réflexions successives ; la FM ($100\,\mathrm{MHz}$), la TNT, le GPS ($1{,}6\,\mathrm{GHz}$) et les liaisons satellitaires traversent l'ionosphère. La densité varie entre le jour et la nuit et avec l'activité solaire, d'où la variabilité de la réception lointaine des ondes courtes.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Sondage de l'ionosphère

★★☆☆☆

Un émetteur au sol envoie verticalement de brèves impulsions de fréquence réglable. Au-dessous de $f_c = 5{,}0\,\mathrm{MHz}$, on reçoit un écho $1{,}6\,\mathrm{ms}$ après l'émission ; au-dessus, aucun écho.

Q-1) Interpréter. En déduire l'altitude de la couche réfléchissante (on prendra une vitesse de propagation égale à c sous la couche).

Q-2) En déduire la densité électronique de la couche ($m = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$).

Q-3) Sur quelle épaisseur une onde de $2{,}5\,\mathrm{MHz}$ pénètre-t-elle dans la couche (en supposant n uniforme) ?

Correction

Q-1) Pour $f < f_p$, l'onde est évanescente dans la couche et réfléchie ; au-dessus, elle la traverse. Donc $f_p = 5{,}0\,\mathrm{MHz}$, et $h = \frac{ct}{2} = 240\,\mathrm{km}$.

Q-2) $n = \frac{4\pi^2 f_p^2 m \varepsilon_0}{e^2} = 3{,}1 \times 10^{11}\,\mathrm{m^{-3}}$.

Q-3) $\omega = \frac{\omega_p}{2}$: $\delta = \frac{c}{\omega_p\sqrt{1-1/4}} = \frac{2c}{\sqrt{3}\,\omega_p} = 11\,\mathrm{m}$: l'onde ne pénètre que de quelques dizaines de mètres avant de repartir.

EXERCICE 7 Des métaux transparents à l'ultraviolet

★★☆☆☆

Pour les hautes fréquences, les électrons de conduction d'un métal alcalin se comportent comme un plasma. Pour le sodium, $n = 2{,}5 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$.

Q-1) Calculer ω_p et la longueur d'onde de coupure $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$.

Q-2) Expliquer l'éclat métallique du sodium dans le visible et sa transparence dans l'ultraviolet lointain.

Correction

Q-1) $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} = 8{,}9 \times 10^{15}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et $\lambda_p = 210\,\mathrm{nm}$ (valeur mesurée : environ $210\,\mathrm{nm}$).

Q-2) Pour $\lambda > \lambda_p$ (visible, infrarouge), $\omega < \omega_p$: la lumière ne pénètre pas, elle est réfléchie, d'où l'aspect brillant. Pour $\lambda < \lambda_p$, le métal propage l'onde : il devient transparent.

VI Vitesse de phase et vitesse de groupe

VI.1 Dispersion et vitesse de phase

Définition — Vitesse de phase, milieu dispersif R

Pour une OPPM $\cos(\omega t - kz)$ avec k réel, les plans d'égale phase avancent à la **vitesse de phase**

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

(pour $\underline{k}$ complexe, on remplace k par sa partie réelle). Un milieu est **dispersif** si v_φ dépend de ω : les différentes composantes de Fourier d'un signal se propagent à des vitesses différentes et le signal se déforme.

VI.2 Paquet d'ondes et vitesse de groupe

Superposition de deux OPPM de pulsations voisines R D

La somme de deux ondes de même amplitude, de pulsations $\omega_0 \pm \Delta\omega$ et de nombres d'onde $k_0 \pm \Delta k$ ($\Delta\omega \ll \omega_0$), est

$$s = 2A\cos(\Delta\omega\, t - \Delta k\, z)\,\cos(\omega_0 t - k_0 z).$$

La **porteuse** avance à $\frac{\omega_0}{k_0} = v_\varphi$; l'**enveloppe** (le battement) avance à $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

Démonstration. $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ avec $a, b = (\omega_0 \pm \Delta\omega)t - (k_0 \pm \Delta k)z$.

Définition — Vitesse de groupe R

Un **paquet d'ondes** est une superposition d'OPPM de pulsations comprises dans une bande étroite autour de ω_0. Dans un milieu linéaire **faiblement dispersif**, son enveloppe se déplace sans se déformer notablement à la **vitesse de groupe**

$$v_g = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{\omega_0}$$

C'est la vitesse de propagation de l'information et, en l'absence d'absorption, de l'énergie. Dans un milieu non dispersif (vide), $v_g = v_\varphi = c$.

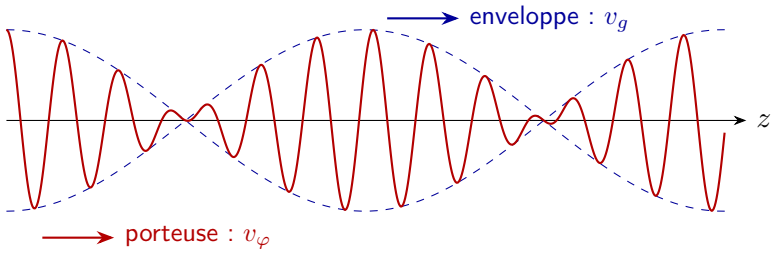


Fig. 4 : Battements de deux ondes de pulsations voisines : la porteuse avance à v_φ, l'enveloppe à v_g.

Vitesses dans un plasma R D

Pour $\omega > \omega_p$, en différentiant $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$: $\omega\,\mathrm{d}\omega = c^2 k\,\mathrm{d}k$, d'où

$$v_g = \frac{c^2 k}{\omega} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c \qquad\qquad v_\varphi\, v_g = c^2$$

La vitesse de phase supérieure à c ne contredit pas la relativité : elle ne transporte ni énergie ni information.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Retard de groupe dans un plasma ✦✦✧✧✧

Un plasma a la pulsation plasma $\omega_p = 2\pi \times 5\,\mathrm{MHz}$.

Q-1) Calculer v_φ et v_g pour une porteuse à $10\,\mathrm{MHz}$.

Q-2) Deux impulsions à $10\,\mathrm{MHz}$ et $20\,\mathrm{MHz}$ sont émises simultanément et traversent $100\,\mathrm{km}$ de ce plasma. Calculer leur décalage à l'arrivée. Conséquence pour un signal large bande ?

Correction

Q-1) $\frac{\omega_p}{\omega} = \frac{1}{2}$: $v_g = c\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 0,87c = 2,6 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_\varphi = \frac{c^2}{v_g} = 1,15c$.

Q-2) À $20\,\mathrm{MHz}$: $v_g = c\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = 0,968c$. Durées : $\frac{10^5}{0,866c} = 385\,\mu\mathrm{s}$ et $\frac{10^5}{0,968c} = 344\,\mu\mathrm{s}$: décalage de $41\,\mu\mathrm{s}$. Les composantes spectrales d'un signal arrivent décalées : il est **déformé** par la dispersion.

VII Conducteur ohmique : effet de peau

VII.1 Équation de propagation dans un métal

On considère un conducteur ohmique ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$) en régime lentement variable :

- il est **localement neutre** : une charge volumique y disparaît en $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$, de l'ordre de $10^{-19}\,\mathrm{s}$ pour le cuivre (EM4) ;
- le **courant de déplacement est négligeable** devant le courant de conduction si $\varepsilon_0\omega \ll \sigma$, ce qui vaut pour le cuivre jusqu'à environ $10^{17}\,\mathrm{Hz}$;
- la loi d'Ohm statique reste valable tant que la période est grande devant la durée entre collisions ($\approx 10^{-14}\,\mathrm{s}$), c'est-à-dire jusqu'à l'infrarouge.

Équation de diffusion R D

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ce n'est plus une équation de d'Alembert mais une **équation de diffusion**, de même forme que l'équation de la chaleur (chapitre T1) : elle n'est pas invariante par $t \to -t$, le phénomène est irréversible.

Démonstration. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$ (car $\rho = 0$) et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\mu_0\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, MA s'écrivant $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\sigma\vec{E}$.

VII.2 Épaisseur de peau

Onde dans un conducteur ohmique R D

Une onde $\underline{\vec{E}} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)} \vec{u}_x$ pénètre dans le conducteur ($z > 0$). La relation de dispersion est $\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\mu_0\sigma\omega$; la racine physique (champ borné quand $z \to +\infty$) est

$$\underline{k} = \frac{1-\mathrm{i}}{\delta} \qquad \text{avec} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \qquad \text{(épaisseur de peau)}$$

$$\vec{E}(z,t) = E_0\, \mathrm{e}^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

Démonstration. En complexe, $-\underline{k}^2 = \mathrm{i}\mu_0\sigma\omega$. Comme $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$, $\underline{k} = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\delta}$. Avec le signe $+$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\underline{k}z} = \mathrm{e}^{-z/\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/\delta}$ décroît : c'est la solution retenue ; l'autre divergerait.

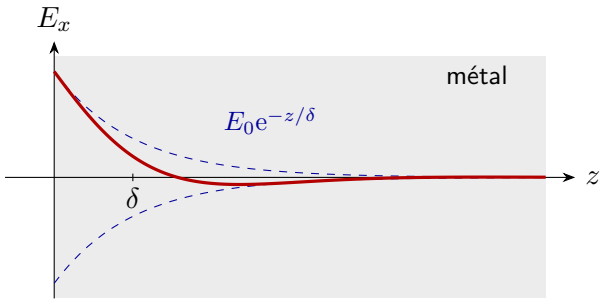


Fig. 5 : Effet de peau : champ électrique à un instant donné dans le métal ; l'amplitude est divisée par e sur la distance δ.

Interprétation. L'onde se propage (vitesse de phase $\omega\delta$) en s'atténuant ; champ et courants sont confinés dans une couche d'épaisseur de quelques δ : c'est l'**effet de peau**. δ diminue quand σ ou ω augmente : les courants induits s'opposent d'autant plus efficacement à la pénétration du champ (loi de Lenz) que le métal est bon conducteur et que le champ varie vite. Le champ magnétique $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega}\underline{E}\,\vec{u}_y$ est en retard de $\frac{\pi}{4}$ sur $\vec{E}$; le vecteur de Poynting moyen décroît en $\mathrm{e}^{-2z/\delta}$: l'énergie qui entre est dissipée par effet Joule dans la couche superficielle.

Ordres de grandeur

Milieu	50 Hz	1 kHz	1 MHz	1 GHz
Cuivre ($\sigma = 6\times10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$)	9 mm	2 mm	65 µm	2 µm
Eau de mer ($\sigma = 4\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$)	36 m	8 m	25 cm	(8 mm, hors modèle)

Pour l'eau de mer à 1 GHz, $\varepsilon_0\omega/\sigma \approx 0,01$ mais la polarisation des molécules d'eau, hors programme, modifie le résultat.

Limite du conducteur parfait R

Si $\sigma \to \infty$, $\delta \to 0$: les champs variables sont nuls dans le conducteur et les courants deviennent surfaciques. On retrouve le modèle du **conducteur parfait** (EM4), utilisé pour la réflexion des ondes (W2).

Applications. Blindage électromagnétique (cage de Faraday) ; conducteurs haute fréquence argentés en surface ou formés de brins fins isolés (fil de Litz) ; chauffage par induction localisé en surface (trempe superficielle) ; communications avec les sous-marins en très basse fréquence.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 9 Épaisseurs de peau ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer δ pour le cuivre à $50\,\mathrm{Hz}$ et à $100\,\mathrm{MHz}$. Pourquoi les conducteurs du réseau électrique peuvent-ils être massifs, alors qu'en VHF on argente la surface des conducteurs ?

Q-2) Pourquoi communique-t-on avec un sous-marin en plongée à quelques dizaines de hertz plutôt qu'à quelques mégahertz ?

Correction

Q-1) $\mu_0\sigma = 75,4$ (SI). À $50\,\mathrm{Hz}$: $\delta = \sqrt{\frac{2}{75,4\times 314}} = 9,2\,\mathrm{mm}$; à $100\,\mathrm{MHz}$: $6,5\,\mu\mathrm{m}$. À $50\,\mathrm{Hz}$, toute la section d'un câble centimétrique conduit ; en VHF, seule une pellicule de quelques micromètres transporte le courant, d'où l'intérêt d'un métal très conducteur en surface.

Q-2) Dans l'eau de mer, $\delta = 36\,\mathrm{m}$ à $50\,\mathrm{Hz}$ mais $25\,\mathrm{cm}$ à $1\,\mathrm{MHz}$: seules les très basses fréquences atteignent un sous-marin en plongée (avec un débit d'information très faible).

EXERCICE 10 Blindage ✦✦✧✧✧

On veut atténuer d'un facteur 1000 en amplitude un champ à $1\,\mathrm{MHz}$ avec une feuille d'aluminium ($\sigma = 3{,}8\times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$). Quelle épaisseur minimale faut-il ? (On néglige la réflexion à l'entrée de la feuille.)

Correction

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = 82\,\mu\mathrm{m}$. $\mathrm{e}^{-e/\delta} = 10^{-3}$ impose $e = \delta\ln 1000 = 6,9\,\delta = 0{,}57\,\mathrm{mm}$. (En réalité, la forte réflexion à la surface rend le blindage encore plus efficace.)

VIII Synthèse

★ À retenir

- Vide sans sources : $\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$; à une dimension, $s = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$.
- OPP : transverse, $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$, $u_{em} = \varepsilon_0 E^2$, $\vec{\Pi} = c u_{em} \vec{u}$; modèle idéal (localement valable).
- OPPM : $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$, $\lambda = cT$; $\partial_t \to \mathrm{i}\omega$, $\vec{\nabla} \to -\mathrm{i}\vec{k}$; $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$; $\langle \Pi \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$.
- Polarisation rectiligne, circulaire ($\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, amplitudes égales), elliptique ; Malus $I = I_0 \cos^2 \alpha$; lame $\frac{\lambda}{4}$: rectiligne à $45°$ → circulaire.
- Plasma : $\underline{\gamma} = -\mathrm{i}\frac{ne^2}{m\omega}$, $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$; coupure, onde évanescente sous ω_p.
- $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ (enveloppe, énergie) ; plasma : $v_\varphi v_g = c^2$.
- Métal : $\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$; $\delta \to 0$: conducteur parfait.

	Vide	Plasma dilué	Conducteur ohmique
Courant	$\vec{j} = \vec{0}$	$\underline{\vec{j}} = -\mathrm{i}\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}$	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (réel)
Relation de dispersion	$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$	$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$	$\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\mu_0 \sigma \omega$
Nature de k	réel	réel ($\omega > \omega_p$) ou imaginaire pur	$\frac{1-\mathrm{i}}{\delta}$
Propagation	non dispersive	dispersive ; coupure à ω_p	atténuée sur δ
Énergie	transportée à c	transportée à v_g ; aucune absorption	dissipée par effet Joule

Tab. 2 : Comparaison des trois milieux du programme.

IX Exercices d'approfondissement

EXERCICE 11 Onde sphérique et portée d'un émetteur ✦✦✦✧✧

Une source ponctuelle isotrope rayonne dans le vide une puissance moyenne $\mathcal{P}$ constante.

Q-1) Par conservation de l'énergie, montrer que l'amplitude des champs décroît en $\frac{1}{r}$ loin de la source.

Q-2) Même question pour une source rectiligne infinie (onde cylindrique).

Q-3) Application : émetteur isotrope de $1\,\mathrm{kW}$; amplitude du champ électrique à $10\,\mathrm{km}$.

Correction

Q-1) En régime établi, la puissance moyenne traversant toute sphère de rayon r vaut $\mathcal{P}$: $\langle \Pi \rangle \, 4\pi r^2 = \mathcal{P}$. Comme l'onde est localement plane, $\langle \Pi \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$, d'où $E_0 \propto \frac{1}{r}$, en accord avec la solution sphérique de d'Alembert.

Q-2) À travers un cylindre de rayon r et de hauteur h : $\langle \Pi \rangle \, 2\pi r h$ constant, d'où $E_0 \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Q-3) $\langle \Pi \rangle = \frac{10^3}{4\pi \times 10^8} = 8{,}0 \times 10^{-7}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ et $E_0 = \sqrt{\frac{2\langle \Pi \rangle}{\varepsilon_0 c}} = 25\,\mathrm{mV \cdot m^{-1}}$.

EXERCICE 12 L'énergie se propage à la vitesse de groupe dans un plasma

On considère dans un plasma ($\omega > \omega_p$) l'OPPM $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$.

Q-1) Exprimer $\vec{B}$, la vitesse $\vec{v}$ des électrons et leur énergie cinétique volumique $e_c = \frac{1}{2}nmv^2$.

Q-2) Calculer les moyennes de u_{em}, de e_c et de Π.

Q-3) Montrer que la vitesse de propagation de l'énergie $v_E = \frac{\langle\Pi\rangle}{\langle u_{em}+e_c\rangle}$ est égale à v_g.

Correction

Q-1) $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$: $\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$. $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E}$ donne $\vec{v} = -\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t - kz)\vec{u}_x$ et $e_c = \frac{ne^2E_0^2}{2m\omega^2}\sin^2(\omega t - kz)$.

Q-2) $\langle u_{em}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right)$, $\langle e_c\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, $\langle\Pi\rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}$.

Q-3) Avec $c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$: $\langle u_{em} + e_c\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$, donc $v_E = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\frac{2}{\varepsilon_0 E_0^2} = \frac{c^2k}{\omega} = v_g$. L'énergie est partagée entre le champ et le mouvement des électrons, et elle avance à la vitesse de groupe.

EXERCICE 13 Réflexion d'une onde sur un plasma

Le demi-espace $z < 0$ est vide, le demi-espace $z > 0$ est un plasma de pulsation ω_p. L'onde incidente $\underline{\vec{E}_i} = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_0 z)}\vec{u}_x$ ($k_0 = \frac{\omega}{c}$) donne une onde réfléchie $\underline{r}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_0 z)}\vec{u}_x$ et une onde transmise $\underline{t}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}\vec{u}_x$. On pose $\underline{n} = \frac{ck}{\omega}$.

Q-1) Exprimer les champs magnétiques des trois ondes.

Q-2) L'interface ne porte ni charge ni courant : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont continus en $z = 0$. En déduire $\underline{r} = \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$ et $\underline{t} = \frac{2}{1+\underline{n}}$.

Q-3) Pour $\omega > \omega_p$, vérifier $R + T = 1$ avec $R = |\underline{r}|^2$ et $T = n|\underline{t}|^2$.

Q-4) Pour $\omega < \omega_p$, montrer que $|\underline{r}| = 1$ et interpréter.

Correction

Q-1) $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$: $\underline{\vec{B}_i} = \frac{E_0}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_0 z)}\vec{u}_y$, $\underline{\vec{B}_r} = -\frac{\underline{r}E_0}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_0 z)}\vec{u}_y$, $\underline{\vec{B}_t} = \frac{\underline{n}\underline{t}E_0}{c}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}\vec{u}_y$.

Q-2) $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et $1 - \underline{r} = \underline{n}\underline{t}$, d'où $\underline{t} = \frac{2}{1+\underline{n}}$ et $\underline{r} = \frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$.

Q-3) n réel ; le flux moyen transmis est $n|\underline{t}|^2$ fois le flux incident (car $\langle\Pi\rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega} \propto nE_0^2$) : $R + T = \frac{(1-n)^2+4n}{(1+n)^2} = 1$.

Q-4) $\underline{k} = -\frac{\mathrm{i}}{\delta}$ donc $\underline{n} = -\mathrm{i}\nu$ avec ν réel : $\underline{r} = \frac{1+\mathrm{i}\nu}{1-\mathrm{i}\nu}$ est de module 1 : réflexion totale ; l'onde transmise est évanescente et ne transporte pas d'énergie en moyenne.

EXERCICE 14 Effet de peau : courant surfacique et résistance de surface

On reprend l'onde $\underline{E}(z) = E_0\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})z/\delta}$ dans un conducteur occupant $z > 0$.

Q-1) Calculer le courant par unité de largeur $\underline{J}_s = \int_0^\infty \sigma\underline{E}\,\mathrm{d}z$.

Q-2) Calculer la puissance moyenne dissipée par unité de surface et montrer qu'elle vaut $\frac{1}{2}R_s|\underline{J}_s|^2$ avec $R_s = \frac{1}{\sigma\delta}$.

Q-3) En déduire que la résistance d'un fil de rayon $a \gg \delta$ croît comme $\sqrt{f}$. Rapport entre les résistances à $1\,\mathrm{MHz}$ et en continu pour un fil de cuivre de rayon $0{,}5\,\mathrm{mm}$?

Correction

Q-1) $\underline{j_s} = \frac{\sigma E_0 \delta}{1+\mathrm{i}}$.

Q-2) $\langle p_J \rangle = \frac{\sigma}{2} E_0^2 \mathrm{e}^{-2z/\delta}$, d'où par unité de surface $\frac{\sigma E_0^2 \delta}{4}$. Or $|\underline{j_s}|^2 = \frac{\sigma^2 E_0^2 \delta^2}{2}$, donc $\frac{1}{2} R_s |\underline{j_s}|^2 = \frac{\sigma E_0^2 \delta}{4}$: tout se passe comme si le courant était uniforme sur l'épaisseur δ.

Q-3) Le courant n'utilise qu'une couronne de section $2\pi a\delta$: $R_{HF} \approx \frac{\ell}{\sigma 2\pi a\delta} \propto \frac{1}{\delta} \propto \sqrt{f}$. $\frac{R_{HF}}{R_0} = \frac{\pi a^2}{2\pi a\delta} = \frac{a}{2\delta} = \frac{500}{2\times 65} \approx 3{,}8$.

X Classiques des concours

EXERCICE 15 Production et analyse d'une lumière polarisée

Une OPPM de longueur d'onde $\lambda_0 = 589\,\mathrm{nm}$ se propage selon $\vec{u}_z$; en $z = 0$, $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\,(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$.

Q-1) Écrire $\vec{E}(z,t)$ et $\vec{B}(z,t)$ dans le vide, puis $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle$.

Q-2) L'onde traverse une lame d'axes Ox (lent) et Oy (rapide) qui retarde de $\Delta\varphi$ la composante selon $\vec{u}_x$. Écrire le champ à la sortie (à une phase commune près).

Q-3) Préciser la polarisation à la sortie pour une lame quart d'onde avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$, puis pour une lame demi-onde (quelconque α).

Q-4) La lame est en quartz ($n_\ell - n_r = 9{,}1 \times 10^{-3}$). Calculer l'épaisseur minimale d'une lame quart d'onde. Pourquoi utilise-t-on souvent des lames d'ordre supérieur ?

Q-5) On place derrière la lame quart d'onde un analyseur tournant. Qu'observe-t-on ? Comment distinguer une lumière circulaire d'une lumière naturelle ?

Correction

Q-1) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)(\cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y)$, $\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)(\cos\alpha\vec{u}_y - \sin\alpha\vec{u}_x)$, $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}\vec{u}_z$.

Q-2) $\vec{E} = E_0\,[\cos\alpha\cos(\omega t - \Delta\varphi)\vec{u}_x + \sin\alpha\cos(\omega t)\vec{u}_y]$.

Q-3) Quart d'onde, $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\,[\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y]$: circulaire ; en $t = 0$, $\vec{E} \parallel \vec{u}_y$, en $t = \frac{T}{4}$, $\vec{E} \parallel \vec{u}_x$: rotation de $\vec{u}_y$ vers $\vec{u}_x$, sens horaire vu des $z > 0$: circulaire **droite**. Demi-onde : $\vec{E} = E_0 \cos\omega t\,(-\cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y)$: rectiligne, symétrique de la direction initiale par rapport à l'axe Oy.

Q-4) $\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta n\, e = \frac{\pi}{2}$ donne $e = \frac{\lambda_0}{4\Delta n} = 16\,\mu\mathrm{m}$: très mince et fragile. Une épaisseur $e_p = (4p+1)\frac{\lambda_0}{4\Delta n}$ donne le même effet ($\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + 2p\pi$), au prix d'une plus grande sensibilité à la longueur d'onde.

Q-5) Pour une lumière circulaire, la projection sur toute direction a la même amplitude : l'intensité derrière l'analyseur est constante, $\frac{I}{2}$, comme pour une lumière naturelle. On place alors une seconde lame quart d'onde avant l'analyseur : la lumière circulaire redevient rectiligne (extinction possible), la lumière naturelle reste non polarisée.

EXERCICE 16 Deux ondes obliques et guide d'ondes

★★★★☆

Dans le vide, on superpose deux OPPM de même pulsation ω et de même amplitude, polarisées selon $\vec{u}_y$, de vecteurs d'onde $\vec{k}_1 = k(\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_z)$ et $\vec{k}_2 = k(\sin\theta\,\vec{u}_x - \cos\theta\,\vec{u}_z)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$:

$$\vec{E} = E_0\left[\cos\left(\omega t - \vec{k}_1\cdot\overrightarrow{OM}\right) - \cos\left(\omega t - \vec{k}_2\cdot\overrightarrow{OM}\right)\right]\vec{u}_y.$$

Q-1) Mettre $\vec{E}$ sous forme d'un produit. Quelle est la nature de l'onde selon Ox ? selon Oz ?

Q-2) Montrer que $\vec{E}$ est nul sur les plans $z = p\frac{\pi}{k\cos\theta}$ (p entier). En déduire qu'on peut placer deux plans conducteurs parfaits en $z = 0$ et $z = a$ si $ka\cos\theta = m\pi$ (m entier non nul). Montrer que le mode m n'existe que pour $\omega > \omega_m = \frac{m\pi c}{a}$.

Q-3) Établir la relation de dispersion $\omega^2 = c^2k_x^2 + \omega_m^2$. Calculer v_φ et v_g selon Ox ; vérifier $v_\varphi v_g = c^2$ et interpréter $v_g = c\sin\theta$.

Q-4) Application : $a = 2{,}0\,\text{cm}$, $f = 10\,\text{GHz}$. Quels modes se propagent ? Calculer v_φ et v_g pour le mode $m = 1$.

Correction

Q-1) $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ avec $\frac{A+B}{2} = \omega t - kx\sin\theta$ et $\frac{A-B}{2} = kz\cos\theta$: $\vec{E} = -2E_0\sin(kz\cos\theta)\sin(\omega t - kx\sin\theta)\vec{u}_y$. Onde **progressive** selon Ox, **stationnaire** selon Oz.

Q-2) $\sin(kz\cos\theta) = 0$ pour $kz\cos\theta = p\pi$. Sur ces plans, le champ électrique (tangentiel) est nul : on peut y placer un conducteur parfait, les relations de passage étant satisfaites avec des charges et courants surfaciques. Avec des plans en 0 et a : $k\cos\theta = \frac{m\pi}{a}$. Comme $k\cos\theta \leq k = \frac{\omega}{c}$, il faut $\omega \geq \omega_m = \frac{m\pi c}{a}$ (pulsation de coupure du mode m).

Q-3) $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ avec $k_z = \frac{m\pi}{a}$: $\omega^2 = c^2k_x^2 + \omega_m^2$ (même forme que pour le plasma). $v_\varphi = \frac{\omega}{k_x} = \frac{c}{\sin\theta} > c$; $v_g = \frac{c^2k_x}{\omega} = c\sin\theta < c$ et $v_\varphi v_g = c^2$. L'énergie avance à $c\sin\theta$: projection sur Ox de la vitesse c des ondes qui se réfléchissent en zigzag sur les parois.

Q-4) $f_m = \frac{mc}{2a} = m \times 7{,}5\,\text{GHz}$: seul le mode $m = 1$ se propage. $\cos\theta = \frac{f_1}{f} = 0{,}75$, $\sin\theta = 0{,}66$: $v_\varphi = 1{,}5c$ et $v_g = 0{,}66c$.

EXERCICE 17 Onde guidée par un câble coaxial

★★★★☆

Un câble coaxial est formé de deux conducteurs parfaits cylindriques coaxiaux de rayons $R_1 < R_2$, l'espace intermédiaire étant vide. On y cherche une onde $\vec{E} = E(r)f\left(t - \frac{z}{v}\right)\vec{u}_r$, $\vec{B} = B(r)f\left(t - \frac{z}{v}\right)\vec{u}_\theta$.

Q-1) À l'aide de MG, montrer que $E(r) = \frac{A}{r}$.

Q-2) À l'aide de MF et MA, montrer que $v = c$ et $B(r) = \frac{E(r)}{c}$. L'onde est-elle transverse ? plane ?

Q-3) Exprimer l'intensité $i(z,t)$ dans l'âme (relation de passage pour $\vec{B}$) et la tension $u(z,t)$ entre l'âme et la gaine (circulation de $\vec{E}$ dans un plan $z = \text{cte}$). En déduire l'impédance caractéristique $Z_c = \frac{u}{i}$. Application : $\frac{R_2}{R_1} = 3{,}5$; puis câble rempli de polyéthylène ($\varepsilon_r = 2{,}25$: remplacer ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$).

Q-4) Montrer que la puissance transportée, flux de $\vec{\Pi}$ à travers une section, vaut ui.

Correction

Q-1) $\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$: rE ne dépend pas de r, $E = \frac{A}{r}$.

Q-2) MF : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \dfrac{\partial E_r}{\partial z}\vec{u}_\theta = -\frac{A}{rv}f'\vec{u}_\theta = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -B(r)f'\vec{u}_\theta$, d'où $B = \frac{A}{rv}$. MA : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{\partial B_\theta}{\partial z}\vec{u}_r = \frac{A}{rv^2}f'\vec{u}_r$ doit valoir $\frac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{A}{rc^2}f'\vec{u}_r$: $v = c$ et $B = \frac{E}{c}$. L'onde est transverse (TEM) mais **non plane** : son amplitude varie dans les plans d'onde.

Q-3) Sur l'âme, $\vec{B}(R_1) - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_r$ donne $\vec{j}_s = \frac{B(R_1)f}{\mu_0}\vec{u}_z$, et $i = 2\pi R_1 j_s = \frac{2\pi A}{\mu_0 c}f$. $u = \int_{R_1}^{R_2} \frac{A}{r}f\,\mathrm{d}r = A\ln\frac{R_2}{R_1}f$. $Z_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\frac{R_2}{R_1} \approx 60\ln\frac{R_2}{R_1}$: $Z_c = 75\,\Omega$. Avec le polyéthylène, Z_c est divisée par $\sqrt{\varepsilon_r} = 1,5$: $50\,\Omega$ (câbles de laboratoire), et $v = \frac{c}{1,5} = 2{,}0\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Q-4) $\vec{\Pi} = \frac{EB}{\mu_0}f^2\vec{u}_z = \frac{A^2f^2}{\mu_0 c r^2}\vec{u}_z$; $\mathcal{P} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{A^2f^2}{\mu_0 c r^2}2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c}\ln\frac{R_2}{R_1}f^2 = ui$: l'énergie est guidée dans l'isolant.