LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

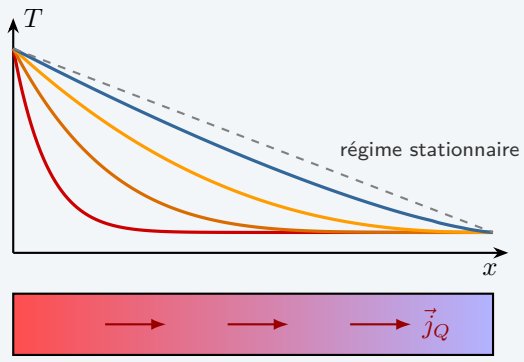
Classes préparatoires aux grandes écoles
**MP — Physique-chimie**
Année 2026-2027

# T1

## THERMODYNAMIQUE

# Conduction thermique

Flux thermique — Loi de Fourier — Équation de la diffusion — Conditions aux limites, loi de Newton — Résistances thermiques — Différences finies — Corps noir, Stefan et Wien




« *La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers ; ses rayons occupent toutes les parties de l'espace.*

— Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, discours préliminaire (1822)

physionova
physionova.academy

**Pr. CHARIFI**
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Équation de la chaleur »

# T1 — Conduction thermique

## Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Citer les trois modes de transfert thermique ; définir flux et vecteur densité de flux $\vec{j}_Q$ ; énoncer la loi de Fourier (ordres de grandeur de $\lambda$, analogie avec la loi d'Ohm).
- Établir par un bilan d'énergie interne l'équation de la diffusion thermique à une variable d'espace (cartésienne, cylindrique, sphérique), avec ou sans source ; l'analyser en ordre de grandeur ($L^2 \sim D\tau$) et relier sa forme à l'irréversibilité.
- Écrire les conditions aux limites : continuité du flux et de la température, loi de Newton.
- Utiliser la résistance thermique (seule celle du barreau est à mémoriser) et les associations série et parallèle.
- Résoudre numériquement l'équation de diffusion (différences finies, Euler explicite).
- Utiliser le vocabulaire du rayonnement thermique, les lois de Stefan et de Wien ; faire et linéariser le bilan radiatif d'un corps noir.

## Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Le programme ne demande aucune connaissance spécifique sur les solutions de l'équation de diffusion : on doit savoir l'établir, l'analyser et la résoudre dans des cas guidés. La simulation PhysioNova « Équation de la chaleur » montre l'évolution d'un profil de température dans un barreau et l'établissement du régime stationnaire affine.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

## Table des matières

I Transferts thermiques et loi de Fourier . . . 4
I.1 Les trois modes de transfert thermique . . . 4
I.2 Flux thermique et vecteur densité de flux . . . 4
I.3 Loi de Fourier . . . 4
II Équation de la diffusion thermique . . . 5
II.1 Bilan d'énergie sur une tranche . . . 6
II.2 Équation de la chaleur . . . 6
II.3 Géométries cylindrique et sphérique . . . 7
II.4 Analyse en ordre de grandeur ; irréversibilité . . . 7
II.5 Conditions aux limites . . . 8
III Régime stationnaire : résistance thermique . . . 9
III.1 Conservation du flux ; profil dans un mur . . . 9
III.2 Résistance et conductance thermiques . . . 10
III.3 Géométries cylindrique et sphérique . . . 11
IV Régime variable : exemples de résolution . . . 12
IV.1 Onde thermique dans le sol . . . 12
IV.2 Séparation des variables . . . 13
IV.3 Résolution numérique : différences finies . . . 13
V Rayonnement thermique . . . 15
V.1 Vocabulaire . . . 15
V.2 Bilan radiatif à la paroi d'un corps noir . . . 16
VI Synthèse . . . 17

VII Exercices d'approfondissement . . . . . 18
VIII Classiques des concours . . . . . 20

# I Transferts thermiques et loi de Fourier

## I.1 Les trois modes de transfert thermique

Un **transfert thermique** est un échange d'énergie qui n'est pas associé à un travail macroscopique ; il apparaît dès que la température n'est pas uniforme.

| Mode | Mécanisme | Exemples |
|---|---|---|
| **Conduction (diffusion)** | transfert de proche en proche par l'agitation microscopique (chocs, vibrations du réseau, électrons libres), **sans mouvement macroscopique** de matière | cuillère dans un café chaud, mur d'une maison |
| **Convection** | transport d'énergie par un **déplacement macroscopique** de fluide, naturel (différence de masse volumique) ou forcé (pompe, ventilateur) | radiateur et air d'une pièce, courants marins |
| **Rayonnement** | émission et absorption d'ondes électromagnétiques ; **possible dans le vide** | Soleil et Terre, caméra thermique |

Dans un solide, seule la conduction intervient (avec, pour un solide transparent, le rayonnement) ; dans un fluide, la convection domine généralement ; le rayonnement devient important à haute température. Ce chapitre étudie la conduction ; la convection n'interviendra que par les conditions aux limites (loi de Newton).

## I.2 Flux thermique et vecteur densité de flux

**Définition — Flux et vecteur densité de flux thermique** R

Le **flux thermique** $\Phi$ à travers une surface orientée $S$ est la puissance thermique qui la traverse dans le sens de l'orientation : pendant $\mathrm{d}t$, le transfert thermique est $\delta Q = \Phi\,\mathrm{d}t$ ; $\Phi$ s'exprime en watts. On l'écrit comme le flux du **vecteur densité de flux thermique** $\vec{j}_Q$ ($\mathrm{W\cdot m^{-2}}$) :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

**✗ Attention, erreurs fréquentes**

Pour une surface fermée, $\mathrm{d}\vec{S}$ est orienté vers l'extérieur : $\oiint \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ est la puissance **sortante**. Le transfert thermique **reçu** par le système, au sens du premier principe, en est l'opposé.

## I.3 Loi de Fourier

**Loi de Fourier** R

Dans un milieu isotrope dont la température n'est pas uniforme :

$$\vec{j}_Q = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T \qquad \left(\text{à une dimension : } j_Q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

où $\lambda > 0$ est la **conductivité thermique** du milieu, en $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

- C'est une loi **phénoménologique** (déduite de l'expérience) et **linéaire**, valable pour des gradients pas trop forts ; sa justification microscopique est hors programme.

▶ Le signe moins traduit que la chaleur va spontanément des régions chaudes vers les régions froides, conformément au second principe.

**★ À retenir**

**Analogie avec la loi d'Ohm locale** $\vec{j} = \gamma\vec{E} = -\gamma\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ : $T \leftrightarrow V$, $\vec{j}_Q \leftrightarrow \vec{j}$, $\Phi \leftrightarrow I$, $\lambda \leftrightarrow \gamma$. Les métaux, bons conducteurs électriques grâce à leurs électrons libres, sont aussi de bons conducteurs thermiques.

**Ordres de grandeur**

Conductivités thermiques dans les conditions usuelles ($\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) :

| air immobile | polystyrène, laine | bois | eau | verre | béton | acier | cuivre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0,026$ | $0,03$ à $0,04$ | $0,15$ | $0,6$ | $1$ | $1$ à $2$ | $15$ à $50$ | $400$ |

Les isolants usuels emprisonnent de l'air immobile dans de petites cellules, ce qui supprime la convection. Gaz < liquides < solides non métalliques < métaux.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 1 — Vitre simple ✦✧✧✧✧

Une vitre de $1{,}5\,\mathrm{m^2}$ et de $5\,\mathrm{mm}$ d'épaisseur ($\lambda = 1{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) a ses faces à $19\,^\circ\mathrm{C}$ et $1\,^\circ\mathrm{C}$. En admettant que $T$ varie linéairement dans le verre, calculer $j_Q$ et $\Phi$. Commenter.

**Correction**

$j_Q = \lambda\frac{\Delta T}{e} = \frac{1{,}0\times 18}{0{,}005} = 3{,}6\times 10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, $\Phi = 5{,}4\,\mathrm{kW}$. Cette valeur est irréaliste : les faces du verre ne sont pas aux températures des airs intérieur et extérieur. Les échanges avec l'air (loi de Newton, partie III) limitent fortement le flux.

### EXERCICE 2 — Sens du flux et source interne ✦✧✧✧✧

Dans un barreau, en régime stationnaire, $T(x) = T_0 - ax^2$ avec $a > 0$.

**Q-1)** Dans quel sens circule la chaleur pour $x > 0$ ? pour $x < 0$ ?

**Q-2)** Le flux à travers une section est-il conservé ? Que peut-on en conclure ?

**Correction**

**Q-1)** $j_Q = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 2\lambda a x$ : vers les $x$ croissants pour $x > 0$, décroissants pour $x < 0$ ; la chaleur s'éloigne du maximum de température.

**Q-2)** $|j_Q|$ croît avec $|x|$ : chaque tranche cède plus d'énergie qu'elle n'en reçoit. En régime stationnaire, il faut une **source interne** (effet Joule, réaction chimique ou nucléaire), de puissance volumique $p = \frac{\mathrm{d}j_Q}{\mathrm{d}x} = 2\lambda a$ (partie II).

# II Équation de la diffusion thermique

## II.1 Bilan d'énergie sur une tranche

On considère un solide **indéformable** (aucun travail des forces de pression) de masse volumique $\rho$ et de capacité thermique massique $c$, sous forme d'un barreau de section $S$ **calorifugé latéralement**, d'axe $Ox$. La température ne dépend que de $x$ et de $t$, et $\vec{j}_Q = j_Q(x,t)\,\vec{u}_x$. Le matériau peut produire une puissance volumique $p$ (effet Joule, réaction).

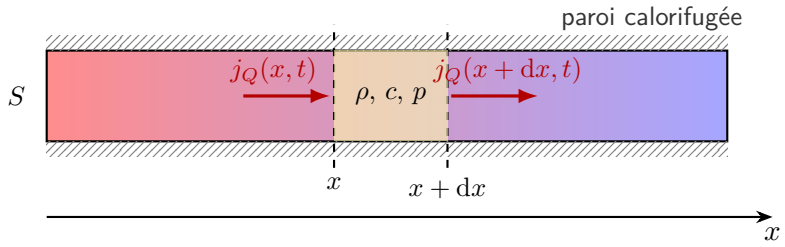



**Fig. 1 :** Bilan d'énergie interne sur la tranche comprise entre $x$ et $x+\mathrm{d}x$.

### Équation locale de conservation de l'énergie D

$$\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} + p$$

**Démonstration.** Appliquons le premier principe à la tranche entre $t$ et $t+\mathrm{d}t$ ; pour une phase condensée indéformable, $\mathrm{d}U = \delta Q$ et $\mathrm{d}U = (\rho S\,\mathrm{d}x)\,c\,\big[T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)\big] = \rho c S\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t$. Le transfert thermique reçu comprend :

- ce qui entre par la section $x$ moins ce qui sort par la section $x+\mathrm{d}x$ : $\big[j_Q(x,t) - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)\big]S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ ;
- ce qui est produit dans le volume : $p\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

On simplifie par $S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Pour un volume $V$ quelconque, la forme intégrale s'écrit $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\oiint \vec{j}_Q\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iiint p\,\mathrm{d}\tau$, et sa forme locale (admise) est $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_Q = p$.

## II.2 Équation de la chaleur

### Équation de la diffusion thermique R D

En reportant la loi de Fourier :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p}{\rho c} \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c}\ \ (\mathrm{m^2\cdot s^{-1}})$$

$D$ est la **diffusivité thermique**. En géométrie quelconque (forme admise, opérateurs fournis) : $\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\Delta T + p$.

**Remarque**

- **Terme source Joule.** Dans un conducteur ohmique parcouru par $\vec{j}$, la puissance volumique dissipée vaut $p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}$ ; intégrée sur un fil de résistance $R$ parcouru par $I$, elle donne $RI^2$.
- On admet que ces équations s'appliquent aussi à un fluide immobile (sans convection), avec $c = c_p$.

▶ La solution est déterminée par la **condition initiale** $T(x,0)$ et par **deux conditions aux limites**.

## II.3 Géométries cylindrique et sphérique

Lorsque $T$ ne dépend que de la distance $r$ à un axe (ou à un centre) et du temps, $\vec{j}_Q = j_Q(r,t)\vec{u}_r$, et l'aire traversée dépend de $r$ : il faut refaire le bilan sur une coquille.

**Diffusion à symétrie cylindrique** D

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + p$$

**Démonstration.** Coquille comprise entre les cylindres de rayons $r$ et $r+\mathrm{d}r$, de hauteur $H$, de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi r H\,\mathrm{d}r$. Le flux sortant à travers le cylindre de rayon $r$ est $\Phi(r,t) = j_Q(r,t)\,2\pi r H$. Le premier principe donne

$$\rho c\, 2\pi r H\,\mathrm{d}r\,\frac{\partial T}{\partial t} = \Phi(r,t) - \Phi(r+\mathrm{d}r,t) + p\,2\pi r H\,\mathrm{d}r = -\frac{\partial}{\partial r}\big(r\,j_Q\big)\,2\pi H\,\mathrm{d}r + p\,2\pi r H\,\mathrm{d}r,$$

puis on remplace $j_Q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}$ et on divise par $2\pi r H\,\mathrm{d}r$.

| **Géométrie** | Aire traversée | Équation (sans source) |
|---|---|---|
| **Cartésienne** | $S$ | $\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ |
| **Cylindrique** | $2\pi r H$ | $\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ |
| **Sphérique** | $4\pi r^2$ | $\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ |

## II.4 Analyse en ordre de grandeur ; irréversibilité

**Échelles de la diffusion** R

Sur une longueur caractéristique $L$ et une durée caractéristique $\tau$, $\frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{\Delta T}{\tau}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta T}{L^2}$. L'équation impose

$$\tau \sim \frac{L^2}{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad L \sim \sqrt{D\,t}$$

La diffusion est **lente sur les grandes distances** : la distance parcourue croît comme $\sqrt{t}$, et doubler l'épaisseur à chauffer multiplie la durée par quatre.

**Ordres de grandeur**

| Milieu | $D$ $(\mathrm{m^2\cdot s^{-1}})$ | $\tau$ pour $L = 1\,\mathrm{cm}$ |
|---|---|---|
| Cuivre | $1{,}1\times10^{-4}$ | 1 s |
| Air immobile | $2\times10^{-5}$ | 5 s |
| Verre, béton | $5\times10^{-7}$ à $8\times10^{-7}$ | 2 à 3 min |
| Eau, aliments | $1{,}4\times10^{-7}$ | 12 min |

**★ À retenir**

**Irréversibilité.** L'équation de diffusion est du premier ordre en temps : en changeant $t$ en $-t$, on obtient une équation différente. Le film à l'envers d'une diffusion (chaleur qui se concentre spontanément) est impossible : la diffusion crée de l'entropie. L'équation de d'Alembert, du second ordre en temps, est au contraire invariante par renversement du temps.

## II.5 Conditions aux limites

**Conditions aux limites** R

- **Continuité du flux** à toute interface : une surface, sans volume ni capacité thermique, ne peut pas accumuler d'énergie.
- **Continuité de la température** pour un **contact thermique parfait** entre deux solides. Un thermostat impose sa température.
- **Loi de Newton** à l'interface solide–fluide : le flux surfacique cédé par la paroi au fluide est

$$j_Q = h\,(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$$

  $h$ est le **coefficient de transfert thermique de surface** ($\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$), et $T_{\text{fluide}}$ la température du fluide loin de la paroi.
- **Paroi calorifugée** (adiabatique) : $\vec{j}_Q\cdot\vec{n}=0$, soit $\frac{\partial T}{\partial n}=0$. Un flux peut aussi être imposé (résistance chauffante).

**Continuité du flux** D. On fait un bilan sur un petit cylindre d'épaisseur $\varepsilon$ qui traverse l'interface, de bases $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ d'aire $\mathrm{d}S$. Quand $\varepsilon\to 0$, son volume, donc son énergie interne et la puissance qui y est produite, tendent vers zéro, et le flux latéral aussi. Il reste $(-j_{Q,1}+j_{Q,2})\,\mathrm{d}S=0$ : la composante normale de $\vec{j}_Q$ est continue. En une dimension : $-\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x}\big|_1=-\lambda_2\frac{\partial T}{\partial x}\big|_2$.

> **Remarque**
>
> La loi de Newton est phénoménologique : elle résume la **couche limite** de fluide, où la température passe de $T_{\text{paroi}}$ à $T_{\text{fluide}}$ et où le transfert se fait par conduction et convection. Un $h$ infini correspond à un contact parfait. En une dimension, en $x=x_0$ (paroi solide pour $x<x_0$) : $-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=h\,[T(x_0,t)-T_f]$.

**Ordres de grandeur**

$h\approx 5$ à $25\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ dans l'air calme (convection naturelle) ; 10 à $200\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ dans l'air en mouvement ; $10^2$ à $10^4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ dans l'eau ; jusqu'à $10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ en ébullition.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 3 Temps de cuisson ✦✧✧✧✧

Une pièce de viande de $5\,\mathrm{cm}$ d'épaisseur ($D=1{,}4\times10^{-7}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$) est saisie sur ses deux faces.

**Q-1)** Estimer la durée nécessaire pour que le cœur commence à chauffer.

**Q-2)** Même question pour une pièce trois fois plus épaisse.

**Correction**

**Q-1)** La chaleur doit parcourir la demi-épaisseur $L = 2{,}5\,\text{cm}$ : $\tau \sim \frac{L^2}{D} = \frac{6{,}25\times10^{-4}}{1{,}4\times10^{-7}} = 4{,}5\times10^{3}\,\text{s}$, environ $75\,\text{min}$ (ordre de grandeur).
**Q-2)** $\tau \propto L^2$ : neuf fois plus, soit environ $11\,\text{h}$ ; c'est pourquoi les grosses pièces cuisent à basse température pendant longtemps.

## EXERCICE 4 Fil chauffé par effet Joule

★★☆☆☆

Un fil cylindrique de rayon $a$, de conductivité électrique $\gamma$ et de conductivité thermique $\lambda$, est parcouru par un courant $I$ uniformément réparti. Sa surface est maintenue à $T_a$. On se place en régime stationnaire.

**Q-1)** Exprimer la puissance volumique $p$. Par un bilan sur le cylindre de rayon $r < a$ et de hauteur $H$, établir $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$.

**Q-2)** En déduire $T(r)$ et l'écart de température entre l'axe et la surface.

**Q-3)** Application : fil de cuivre de rayon $1\,\text{mm}$ parcouru par $10\,\text{A}$ ($\gamma = 6{,}0\times10^{7}\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$, $\lambda = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$).

**Correction**

**Q-1)** $j = \frac{I}{\pi a^2}$ et $p = \frac{j^2}{\gamma}$. En régime stationnaire, la puissance produite dans le cylindre, $p\pi r^2 H$, en sort par sa surface latérale : $-\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}2\pi r H = p\pi r^2 H$, d'où $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{pr}{2\lambda}$.
**Q-2)** $T(r) = T_a + \frac{p}{4\lambda}(a^2 - r^2)$ ; $T(0) - T_a = \frac{pa^2}{4\lambda}$.
**Q-3)** $j = 3{,}2\times10^{6}\,\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$, $p = 1{,}7\times10^{5}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$ et $T(0) - T_a = 1{,}1\times10^{-4}\,\text{K}$ : la température d'un fil métallique est quasi uniforme ; c'est la gaine et l'air qui limitent l'évacuation de la chaleur.

## EXERCICE 5 Bilan en symétrie sphérique

★★☆☆☆

Un matériau homogène, sans source, occupe l'espace compris entre deux sphères de même centre ; sa température ne dépend que de $r$ et de $t$.

**Q-1)** En faisant un bilan sur la coquille comprise entre $r$ et $r + \mathrm{d}r$, établir l'équation de diffusion.

**Q-2)** Vérifier qu'on retrouve la forme générale $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\Delta T$, sachant que, pour une fonction de $r$ seul, $\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$.

**Correction**

**Q-1)** $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\mathrm{d}r$ et $\Phi(r,t) = j_Q\,4\pi r^2$ : $\rho c\,4\pi r^2\mathrm{d}r\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(4\pi r^2 j_Q\right)\mathrm{d}r$, puis $j_Q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}$ : $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$.
**Q-2)** C'est bien la partie radiale du laplacien sphérique ; les termes en $\theta$ et $\varphi$ sont nuls.

# III Régime stationnaire : résistance thermique

## III.1 Conservation du flux ; profil dans un mur

En régime stationnaire et sans source, $\operatorname{div}\vec{j}_Q = 0$ : **le flux thermique est conservatif**. Dans un **tube de flux** (surface latérale calorifugée ou formée de lignes de $\vec{j}_Q$), le même flux $\Phi$ traverse toutes les sections, comme l'intensité dans une branche de circuit.

### Barreau calorifugé latéralement, ou mur plan R D

Entre $x = 0$ (température $T_1$) et $x = L$ (température $T_2$), en régime stationnaire, $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$ :

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L} \qquad \Phi = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$$

Le profil est **affine** et $\vec{j}_Q$ uniforme ; les isothermes sont des plans parallèles aux faces.

## III.2 Résistance et conductance thermiques

### Définition — Résistance thermique R

Entre deux surfaces isothermes d'un tube de flux, en régime stationnaire, l'écart de température est proportionnel au flux qui les traverse. La **résistance thermique** et la **conductance thermique** sont

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{1\to2}}\ (\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}) \qquad G_{\text{th}} = \frac{1}{R_{\text{th}}} \qquad \text{barreau : } R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$$

L'expression du barreau calorifugé latéralement est la **seule à mémoriser**.

| Conduction électrique | Conduction thermique |
|---|---|
| potentiel $V$ | température $T$ |
| intensité $I$ | flux thermique $\Phi$ |
| $\vec{j} = -\gamma\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ (Ohm) | $\vec{j}_Q = -\lambda\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ (Fourier) |
| $U = RI$, $R = \dfrac{L}{\gamma S}$ | $\Delta T = R_{\text{th}}\Phi$, $R_{\text{th}} = \dfrac{L}{\lambda S}$ |
| loi des nœuds | conservation du flux |

### Résistance conducto-convective R

La loi de Newton sur une paroi d'aire $S$ donne $\Phi = hS\,(T_{\text{paroi}} - T_{\text{fluide}})$, soit

$$R_{\text{cc}} = \frac{1}{hS}$$

**Associations de résistances.**

- **En série** (couches successives traversées par le même flux) : $R = R_1 + R_2 + \cdots$
- **En parallèle** (chemins soumis au même écart de température) : $G = G_1 + G_2 + \cdots$, soit $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$

Dans des couches en série, la chute de température dans chaque couche est proportionnelle à sa résistance : la couche la plus résistante impose la plus grande chute.

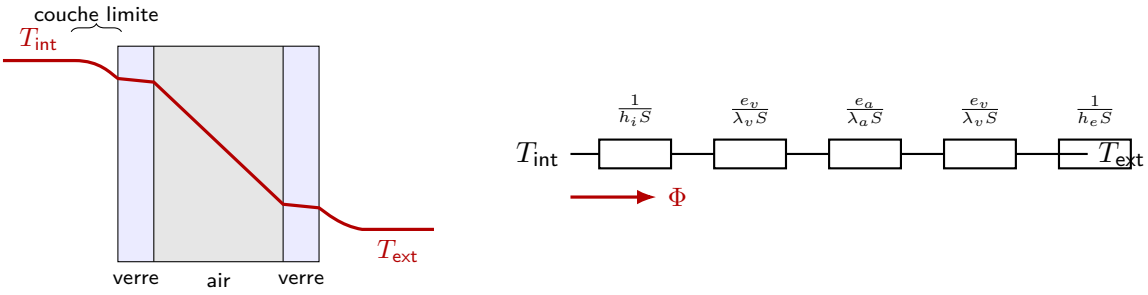



**Fig. 2 :** Double vitrage : profil de température (épaisseurs non à l'échelle) et schéma électrique équivalent. La chute de température est la plus forte dans la lame d'air.

## III.3 Géométries cylindrique et sphérique

### ☞ Méthode — Calculer une résistance thermique M

1. En régime stationnaire sans source, écrire que le flux $\Phi$ est le même à travers toute surface isotherme (cylindre ou sphère de rayon $r$).
2. Écrire $\Phi = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times \mathcal{A}(r)$, avec $\mathcal{A} = 2\pi r H$ ou $4\pi r^2$.
3. Séparer les variables et intégrer de $r_1$ à $r_2$ ; en déduire $R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$.

$$R_{\text{cyl}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda H} \qquad R_{\text{sph}} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$ (à savoir établir, pas à retenir)

**Démonstration (cylindre) D.** $\mathrm{d}T = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda H}\frac{\mathrm{d}r}{r}$, d'où $T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi\lambda H}\ln\frac{r_2}{r_1}$. Pour une couche mince ($r_2 = r_1 + e$, $e \ll r_1$), $\ln\frac{r_2}{r_1} \approx \frac{e}{r_1}$ et l'on retrouve $R = \frac{e}{\lambda 2\pi r_1 H}$, résistance d'un mur plan.

### ✗ Attention, erreurs fréquentes

- La formule $R = \frac{L}{\lambda S}$ ne vaut que pour un **tube de flux à section constante** ; en géométrie cylindrique ou sphérique, il faut refaire le calcul.
- Le profil de température n'est affine qu'en géométrie plane, sans source et en régime stationnaire ; en cylindrique, il est logarithmique, en sphérique en $1/r$.
- En parallèle, ce sont les conductances qui s'ajoutent, pas les résistances.
- Ne pas oublier les résistances conducto-convectives : elles dominent souvent pour les parois minces (vitres).

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 6 Simple ou double vitrage ✦✦✧✧✧

Une fenêtre de $1{,}0\,\mathrm{m}^2$ sépare une pièce à $20\,^\circ\mathrm{C}$ de l'extérieur à $0\,^\circ\mathrm{C}$, avec $h_i = 8\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ et $h_e = 20\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$. On compare un simple vitrage de $4\,\mathrm{mm}$ et un double vitrage 4–16–4 (verre $\lambda_v = 1{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, air immobile $\lambda_a = 0{,}026\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$).

**Q-1)** Calculer le flux perdu dans chaque cas.

**Q-2)** Calculer la température de la face intérieure du vitrage dans chaque cas. Intérêt ?

**Q-3)** Les valeurs mesurées pour un tel double vitrage correspondent plutôt à $R \approx 0{,}35\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$. Pourquoi le modèle surestime-t-il l'isolation ?

**Correction**

**Q-1)** Résistances en série : $\frac{1}{h_i S} = 0{,}125\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$, $\frac{1}{h_e S} = 0{,}050\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$, verre $0{,}004\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$, lame d'air $\frac{0{,}016}{0{,}026} = 0{,}62\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$. Simple : $R = 0{,}179\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$, $\Phi = 112\,\mathrm{W}$. Double : $R = 0{,}80\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$, $\Phi = 25\,\mathrm{W}$.

**Q-2)** $T_{\text{face}} = T_{\text{int}} - \frac{\Phi}{h_i S}$ : $6{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ pour le simple vitrage, $16{,}9\,^\circ\mathrm{C}$ pour le double. La vitre intérieure, plus chaude, évite la condensation et la sensation de paroi froide.

**Q-3)** La lame d'air n'est pas immobile (convection naturelle entre une vitre chaude et une vitre froide) et le rayonnement infrarouge traverse l'air : deux transferts en parallèle avec la conduction, qui diminuent la résistance de la lame.

### EXERCICE 7 Tuyau calorifugé

★★☆☆☆

Un tuyau d'eau chaude de rayon extérieur $r_1 = 1{,}5\,\mathrm{cm}$, à $85\,^\circ\mathrm{C}$, est entouré d'un manchon isolant ($\lambda = 0{,}040\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) jusqu'au rayon $r_2 = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, dont la surface extérieure est à $15\,^\circ\mathrm{C}$.

**Q-1)** Établir la résistance thermique d'une longueur $H$ de manchon.

**Q-2)** Calculer la puissance perdue par mètre de tuyau, et la température à mi-épaisseur ($r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$).

**Correction**

**Q-1)** Voir la méthode : $R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda H}$.

**Q-2)** Pour $H = 1\,\mathrm{m}$ : $R = \frac{\ln(2{,}33)}{2\pi\times 0{,}040} = 3{,}37\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ et $\Phi = \frac{70}{3{,}37} = 21\,\mathrm{W}$. $T(r) = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$ : $T = 85 - 70\times\frac{0{,}511}{0{,}847} = 43\,^\circ\mathrm{C}$, en dessous de la moyenne arithmétique (profil logarithmique).

### EXERCICE 8 Coquilles cylindrique et sphérique

★★☆☆☆

Un matériau de conductivité $\lambda = 0{,}35\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ remplit l'espace compris entre deux surfaces de rayons $a = 1\,\mathrm{cm}$ et $b = 10\,\mathrm{cm}$, maintenues à $T_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ et $T_2 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Calculer la résistance thermique et le flux transmis :

**Q-1)** pour deux cylindres coaxiaux de longueur $H = 1\,\mathrm{m}$ ;

**Q-2)** pour deux sphères concentriques.

**Correction**

**Q-1)** $R = \frac{\ln 10}{2\pi\times 0{,}35} = 1{,}05\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ et $\Phi = 76\,\mathrm{W}$.

**Q-2)** $R = \frac{1}{4\pi\times 0{,}35}\left(\frac{1}{0{,}01} - \frac{1}{0{,}1}\right) = 20{,}5\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ et $\Phi = 3{,}9\,\mathrm{W}$. La résistance est dominée par la région proche de la petite sphère, où la section offerte au flux est faible.

## IV Régime variable : exemples de résolution

### IV.1 Onde thermique dans le sol

La température de la surface du sol ($x = 0$, axe $Ox$ vers le bas) varie périodiquement : $T(0,t) = T_0 + T_m\cos(\omega t)$, à l'échelle de la journée ou de l'année. Le sol, homogène, de diffusivité $D$, occupe $x > 0$.

**Onde thermique** D

En régime sinusoïdal forcé, la solution bornée en profondeur est

$$T(x,t) = T_0 + T_m\,\mathrm{e}^{-x/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \qquad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

Les oscillations s'amortissent sur l'épaisseur $\delta$ et prennent du retard avec la profondeur.

**Démonstration.** On cherche $T = T_0 + \mathrm{Re}\left[\underline{\theta}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]$. L'équation de diffusion donne $\mathrm{i}\omega\underline{\theta} = D\underline{\theta}''$, d'où $\underline{\theta} = A\mathrm{e}^{-\underline{k}x} + B\mathrm{e}^{\underline{k}x}$ avec $\underline{k}^2 = \frac{\mathrm{i}\omega}{D}$, soit $\underline{k} = \frac{1+\mathrm{i}}{\delta}$. La solution doit rester bornée : $B = 0$, et $\underline{\theta}(0) = T_m$ donne $A = T_m$.

**Remarque**

C'est l'analogue thermique de l'effet de peau en électromagnétisme (même équation de diffusion, $\delta$ de même forme). Pour un sol de diffusivité $D = 8\times10^{-7}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ : $\delta \approx 15\,\mathrm{cm}$ pour les variations journalières, $\delta \approx 2{,}8\,\mathrm{m}$ pour les variations annuelles. Ce n'est pas une onde au sens de d'Alembert : la « vitesse » $\omega\delta$ dépend de la fréquence et l'amplitude décroît d'un facteur $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$ sur une « longueur d'onde ».

## IV.2 Séparation des variables

**☞ Méthode — Relaxation d'une plaque vers le régime stationnaire** M

Une plaque $0 < x < L$ est initialement à $T(x,0) = T_i$ ; à $t = 0$, ses faces sont portées à $T_0$ (en $x = 0$) et $T_L$ (en $x = L$).

1. On sépare le régime stationnaire : $T = T_s(x) + \theta(x,t)$, avec $T_s = T_0 + (T_L - T_0)\frac{x}{L}$. Alors $\theta$ vérifie l'équation de diffusion avec $\theta(0,t) = \theta(L,t) = 0$.
2. On cherche $\theta = f(x)g(t)$ : $\frac{g'}{Dg} = \frac{f''}{f} = -k^2$. Les conditions aux limites imposent $f = \sin\frac{n\pi x}{L}$, puis $g = \mathrm{e}^{-t/\tau_n}$ avec $\tau_n = \frac{L^2}{n^2\pi^2 D}$.
3. Par linéarité, $\theta(x,t) = \sum_{n\geq1} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau_n}$ ; les $A_n$ sont les coefficients de Fourier de $\theta(x,0)$. Pour $T_i = 0$ : $A_n = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n T_L - T_0\right]$.

Les modes s'amortissent sans osciller (au contraire de la cavité de W2). Le mode $n = 1$ s'amortit le plus lentement : la durée du régime transitoire est de l'ordre de $\tau_1 = \frac{L^2}{\pi^2 D}$.

## IV.3 Résolution numérique : différences finies

On discrétise $x_i = i\,\Delta x$ $(0 \leq i \leq N)$ et $t_n = n\,\Delta t$, et l'on note $T_i^n \approx T(x_i, t_n)$. La méthode d'Euler explicite en temps et une différence centrée en espace,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

donnent la relation de récurrence

$$T_i^{n+1} = T_i^n + r\left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right) \qquad r = \frac{D\,\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}\ \text{(stabilité)}$$

Les conditions aux limites fixent $T_0^n$ et $T_N^n$ (température imposée) ou $T_N^n = T_{N-1}^n$ (paroi calorifugée).

### Activité numérique : barreau chauffé à une extrémité (Python)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L, D = 0.10, 1.0e-6        # longueur (m) et diffusivite (m^2/s)
N = 50                     # nombre d'intervalles
dx = L / N
dt = 0.4 * dx**2 / D       # r = 0,4 < 0,5 : schema stable
r = D * dt / dx**2
x = np.linspace(0, L, N + 1)
T = np.full(N + 1, 20.0)   # barreau initialement a 20 C
T[0] = 100.0               # extremite x = 0 portee a 100 C
for n in range(1, 3001):
    T[1:-1] = T[1:-1] + r * (T[2:] - 2 * T[1:-1] + T[:-2])
    T[-1] = 20.0           # extremite x = L maintenue a 20 C
    if n % 750 == 0:
        plt.plot(x, T, label=f"t = {n * dt:.0f} s")
plt.xlabel("x (m)"); plt.ylabel("T (C)"); plt.legend(); plt.show()
```

Pistes : vérifier que le profil tend vers une droite ; essayer $r = 0,6$ (oscillations qui divergent) ; remplacer la dernière condition par `T[-1] = T[-2]` (extrémité calorifugée). Dans cet exemple, $\tau_1 = \frac{L^2}{\pi^2 D} \approx 1000\,\text{s}$ : avec $\Delta t = 1{,}6\,\text{s}$, la simulation dure $4800\,\text{s} \approx 5\tau_1$ et atteint pratiquement le régime stationnaire.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 9 L'effet de cave

Dans une région où l'épaisseur caractéristique pour les variations annuelles vaut $\delta_{\text{an}} = 2{,}5\,\text{m}$, on creuse une cave.

**Q-1)** À quelle profondeur l'amplitude annuelle est-elle divisée par 10 ? Avec quel retard ?

**Q-2)** Quelle est l'épaisseur caractéristique pour les variations journalières ?

**Correction**

**Q-1)** $e^{-x/\delta} = \frac{1}{10}$ : $x = \delta \ln 10 = 5{,}8\,\text{m}$. Retard de phase $\frac{x}{\delta} = 2{,}3\,\text{rad}$, soit $\frac{2{,}3}{2\pi} \times 365 = 134$ jours : environ 4 mois et demi, la cave est la plus froide au printemps.

**Q-2)** $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ : $\delta_{\text{jour}} = \frac{\delta_{\text{an}}}{\sqrt{365}} = 13\,\text{cm}$.

### EXERCICE 10 Stabilité et coût d'une simulation

On simule la diffusion dans un mur de béton ($D = 6 \times 10^{-7}\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) de $20\,\text{cm}$, avec $\Delta x = 2\,\text{mm}$.

**Q-1)** Quel pas de temps maximal peut-on choisir ? Combien d'itérations faut-il pour simuler 24 heures ?

**Q-2)** Que deviennent ces nombres si l'on divise $\Delta x$ par 2 ?

**Q-3)** Estimer la durée du régime transitoire du mur.

**Correction**

**Q-1)** $r \leq \frac{1}{2}$ : $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D} = \frac{4\times10^{-6}}{1{,}2\times10^{-6}} = 3{,}3\,\text{s}$, soit au moins $2{,}6 \times 10^4$ itérations pour $86\,400\,\text{s}$.

**Q-2)** $\Delta t$ est divisé par 4, le nombre d'itérations multiplié par 4, et le nombre de points par 2 : le calcul est 8 fois plus long.

**Q-3)** $\tau_1 = \frac{L^2}{\pi^2 D} = \frac{0{,}04}{9{,}87\times6\times10^{-7}} = 6{,}8 \times 10^3\,\text{s}$, près de 2 heures ; le régime stationnaire est atteint au bout de quelques $\tau_1$.

# V Rayonnement thermique

## V.1 Vocabulaire

Toute matière dont la température n'est pas nulle émet un rayonnement électromagnétique d'origine thermique, de spectre continu. Ce transfert ne nécessite aucun support matériel.

**Définition — Milieux et flux radiatifs** R

- Un milieu **transparent** laisse passer le rayonnement (vide, air sec) ; un milieu **opaque** l'arrête sur une faible épaisseur. Le rayonnement qui arrive sur une surface opaque est en partie **absorbé**, en partie **réfléchi** ; la surface en **émet** aussi.
- On raisonne sur des **flux surfaciques hémisphériques** ($\mathrm{W \cdot m^{-2}}$), émis ou reçus par une face dans tout le demi-espace.
- **Flux partant** $\varphi_p$ = flux émis + flux réfléchi. **Flux radiatif** $\varphi_R = \varphi_p - \varphi_{\text{inc}}$ = puissance surfacique réellement perdue par la paroi.
- **Équilibre radiatif** : $\varphi_R = 0$, la paroi émet autant qu'elle absorbe.

Le programme se limite à des corps totalement transparents ou totalement absorbants, quelles que soient la longueur d'onde et la direction, et à une propagation dans un milieu non absorbant.

**Définition — Corps noir** R

Un **corps noir** est un **absorbeur intégral** : il absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit, quelles que soient sa longueur d'onde et sa direction. Son émission ne dépend que de sa température. Une petite ouverture percée dans une cavité isotherme en est une excellente réalisation : un rayon qui y entre est absorbé après de multiples réflexions.

**Lois de Stefan et de Wien (admises)** R

- **Loi de Stefan-Boltzmann** : le flux surfacique émis par un corps noir à la température $T$ est

$$\varphi_{\text{CN}} = \sigma T^4 \qquad \sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$$

- **Loi de Wien** : le spectre d'émission passe par un maximum à la longueur d'onde $\lambda_m$ telle que

$$\lambda_m\, T = 2{,}90 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$$

La loi de Planck, qui donne la forme exacte du spectre, est hors programme.

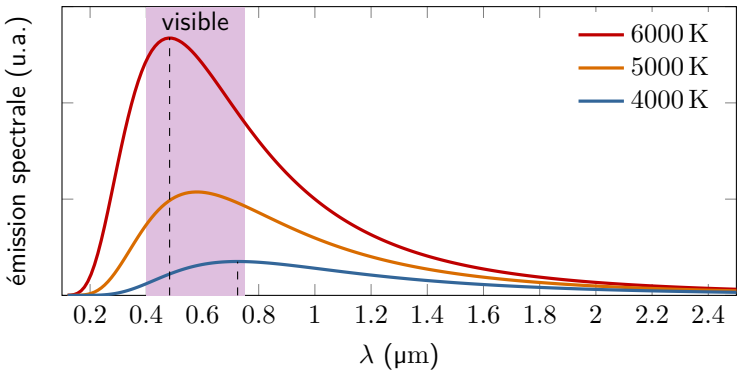



**Fig. 3 :** Spectres d'émission du corps noir (tracés avec la loi de Planck, hors programme) : le maximum se déplace vers les courtes longueurs d'onde quand $T$ augmente (Wien) et l'aire sous la courbe croît comme $T^4$ (Stefan).

**Ordres de grandeur**

| Corps | $T$ | $\lambda_m$ | domaine |
|---|---|---|---|
| Photosphère du Soleil | $5800\,\mathrm{K}$ | $500\,\mathrm{nm}$ | visible |
| Filament de lampe à incandescence | $2800\,\mathrm{K}$ | $1{,}0\,\mu\mathrm{m}$ | proche infrarouge |
| Corps humain | $310\,\mathrm{K}$ | $9{,}4\,\mu\mathrm{m}$ | infrarouge (caméra thermique) |
| Fond diffus cosmologique | $2{,}7\,\mathrm{K}$ | $1{,}1\,\mathrm{mm}$ | micro-ondes |

## V.2 Bilan radiatif à la paroi d'un corps noir

**Flux radiatif d'un corps noir** R D

Un corps noir isotherme **convexe** (il ne reçoit pas son propre rayonnement), à la température $T$, recevant un flux surfacique $\varphi_{\text{inc}}$, a pour flux radiatif

$$\varphi_R = \sigma T^4 - \varphi_{\text{inc}}$$

Dans une enceinte à $T_0$, qui lui envoie le rayonnement d'équilibre ($\varphi_{\text{inc}} = \sigma T_0^4$) : $\varphi_R = \sigma\left(T^4 - T_0^4\right)$.

**Démonstration.** Corps noir : rien n'est réfléchi, le flux partant est le flux émis $\sigma T^4$, et $\varphi_R = \varphi_p - \varphi_{\text{inc}}$. Si $T = T_0$, l'équilibre thermique impose $\varphi_R = 0$, d'où $\varphi_{\text{inc}} = \sigma T_0^4$.

**Linéarisation** R D

Si $|T - T_0| \ll T_0$, $T^4 - T_0^4 = (T^2 + T_0^2)(T + T_0)(T - T_0) \approx 4T_0^3(T - T_0)$ : le flux radiatif suit une loi de Newton

$$\varphi_R \approx h_R\,(T - T_0) \qquad h_R = 4\sigma T_0^3 \approx 6\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}} \text{ à } 300\,\mathrm{K}$$

À température ambiante, $h_R$ est du même ordre que le coefficient conducto-convectif dans l'air calme : **le rayonnement n'est pas négligeable**, et il devient dominant aux hautes températures ($h_R \propto T_0^3$). On lui associe une résistance $R_{\text{rad}} = \frac{1}{h_R S}$, en parallèle avec la résistance conducto-convective.

## ☞ Exercices d'application

### EXERCICE 11 Couleur des étoiles ✦✧✧✧✧

Bételgeuse a une température de surface d'environ $3500\,\mathrm{K}$, Rigel d'environ $12\,000\,\mathrm{K}$. Où se situe le maximum de leur spectre ? Quelle est leur couleur apparente ?

**Correction**

Bételgeuse : $\lambda_m = \frac{2{,}90\times10^{-3}}{3500} = 830\,\mathrm{nm}$, dans l'infrarouge ; le visible est sur la partie croissante du spectre, plus intense dans le rouge : l'étoile paraît rouge-orangé. Rigel : $\lambda_m = 240\,\mathrm{nm}$, dans l'ultraviolet ; le visible est sur la partie décroissante, plus intense dans le bleu : étoile blanc bleuté.

### EXERCICE 12 Du Soleil à la Terre ✦✦✧✧✧

On mesure le maximum du spectre solaire à $\lambda_m = 500\,\mathrm{nm}$. Données : rayon solaire $R_S = 6{,}96\times10^8\,\mathrm{m}$, distance Terre-Soleil $d = 1{,}50\times10^{11}\,\mathrm{m}$, albédo terrestre $A = 0{,}30$.

**Q-1)** Calculer la température de surface du Soleil et sa puissance totale.

**Q-2)** En déduire le flux surfacique reçu au niveau de la Terre (constante solaire).

**Q-3)** La Terre, assimilée à un corps noir de température uniforme, absorbe la fraction $1-A$ du flux reçu sur sa section $\pi R_T^2$ et rayonne sur toute sa surface. Calculer sa température d'équilibre. Commenter.

**Correction**

**Q-1)** $T_S = \frac{2{,}90\times10^{-3}}{5{,}00\times10^{-7}} = 5800\,\mathrm{K}$ ; $P = 4\pi R_S^2\sigma T_S^4 = 3{,}9\times10^{26}\,\mathrm{W}$.

**Q-2)** Le milieu étant non absorbant, $P$ traverse toute sphère de rayon $d$ : $\varphi_0 = \frac{P}{4\pi d^2} = \sigma T_S^4\left(\frac{R_S}{d}\right)^2 = 1{,}4\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, proche de la valeur mesurée, $1361\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

**Q-3)** Équilibre radiatif : $(1-A)\varphi_0\pi R_T^2 = 4\pi R_T^2\sigma T^4$, soit $T = \left[\frac{(1-A)\varphi_0}{4\sigma}\right]^{1/4}$. Avec $\varphi_0 = 1361\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ : $T = 255\,\mathrm{K} = -18\,^\circ\mathrm{C}$. La température moyenne réelle ($15\,^\circ\mathrm{C}$) est plus élevée : c'est l'effet de serre (exercice d'approfondissement).

### EXERCICE 13 Pertes radiatives d'une personne ✦✧✧✧✧

Une personne dévêtue (surface $1{,}7\,\mathrm{m^2}$, peau à $34\,^\circ\mathrm{C}$, assimilée à un corps noir) se tient dans une pièce dont les murs sont à $18\,^\circ\mathrm{C}$. Calculer la puissance radiative nette, exactement puis par linéarisation autour de la température moyenne. Commenter.

**Correction**

Exact : $\sigma S(307^4 - 291^4) = 5{,}67\times10^{-8}\times1{,}7\times1{,}71\times10^9 = 165\,\mathrm{W}$. Linéarisé : $h_R = 4\sigma(299\,\mathrm{K})^3 = 6{,}1\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ et $P = h_R S\,\Delta T = 6{,}1\times1{,}7\times16 = 165\,\mathrm{W}$. C'est plus que le métabolisme de repos (environ $100\,\mathrm{W}$) : immobile et dévêtu, on a froid, même dans un air sans courant.

## VI Synthèse

**★ À retenir**

- Trois modes : conduction, convection, rayonnement. $\Phi = \iint \vec{j}_Q\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ ; Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ ; analogie avec Ohm.

- Bilan sur une tranche : $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} + p$ ; équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{p}{\rho c}$, $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ ; forme générale $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\Delta T + p$ ; Joule $p = j^2/\gamma$.
- $\tau \sim L^2/D$ ; équation irréversible (premier ordre en temps).
- Conditions aux limites : continuité du flux, continuité de $T$ (contact parfait), Newton $j_Q = h(T_p - T_f)$.
- Régime stationnaire : flux conservatif ; $R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{\Phi}$, barreau $\frac{L}{\lambda S}$, conducto-convective $\frac{1}{hS}$ ; série : $R$ s'ajoutent, parallèle : $G$ s'ajoutent.
- Euler explicite : $T_i^{n+1} = T_i^n + r(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$, stable si $r = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$.
- Corps noir : Stefan $\sigma T^4$, Wien $\lambda_m T = 2{,}90 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}$ ; $\varphi_R = \sigma(T^4 - T_0^4) \approx 4\sigma T_0^3(T - T_0)$.

## VII Exercices d'approfondissement

### EXERCICE 14 Ailette de refroidissement

★★★☆☆

Une tige cylindrique d'aluminium ($\lambda = 237\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), de rayon $a = 2\,\text{mm}$ et très longue, est fixée sur un composant à $T_0$. Sa surface latérale échange avec l'air à $T_f$ selon la loi de Newton ($h = 20\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$). On suppose $T$ uniforme sur une section : $T = T(x)$, en régime stationnaire.

**Q-1)** Par un bilan sur une tranche de longueur $\mathrm{d}x$, établir $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\theta}{\ell^2}$ avec $\theta = T - T_f$ et $\ell = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$. Calculer $\ell$.

**Q-2)** Résoudre pour une tige infinie. En déduire la puissance évacuée par l'ailette pour $T_0 - T_f = 50\,\text{K}$.

**Q-3)** Comparer à la puissance évacuée par la seule surface de la base, sans ailette. Conclure.

**Correction**

**Q-1)** Sur la tranche : $[j_Q(x) - j_Q(x+\mathrm{d}x)]\,\pi a^2 - h\theta\,2\pi a\,\mathrm{d}x = 0$, avec $j_Q = -\lambda\theta'$ : $\lambda\pi a^2\theta'' = 2\pi a h\theta$. $\ell = \sqrt{\frac{237\times 0{,}002}{40}} = 0{,}11\,\text{m}$.

**Q-2)** $\theta = \theta_0 \mathrm{e}^{-x/\ell}$ (solution bornée). $\Phi = -\lambda\pi a^2\theta'(0) = \frac{\lambda\pi a^2\theta_0}{\ell} = \frac{237\times 1{,}26\times 10^{-5}\times 50}{0{,}109} = 1{,}4\,\text{W}$.

**Q-3)** Sans ailette : $h\pi a^2\theta_0 = 0{,}013\,\text{W}$. L'ailette multiplie la puissance évacuée par environ 100 en offrant une grande surface d'échange ; au-delà de quelques $\ell$, une ailette plus longue est inutile.

### EXERCICE 15 Refroidissement d'une bille : le modèle à température uniforme

★★★☆☆

Une bille d'acier de rayon $R = 1\,\text{cm}$ ($\rho = 7800\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $c = 460\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $\lambda = 50\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$), sortie d'un four, refroidit dans l'air à $T_f$ ($h = 10\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$).

**Q-1)** En supposant sa température uniforme, établir l'équation d'évolution de $T(t)$ et la constante de temps $\tau$.

**Q-2)** Comparer $\tau$ à la durée $\tau_d = R^2/D$ d'homogénéisation interne. Quel nombre sans dimension faut-il comparer à 1 ? Conclure.

**Q-3)** Le rayonnement est-il négligeable lorsque la bille est à $300\,°\text{C}$ et l'air à $20\,°\text{C}$ ?

**Correction**

**Q-1)** $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho c \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -h\,4\pi R^2 (T - T_f)$, d'où $T - T_f = (T_i - T_f)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{\rho c R}{3h} = \frac{7800\times460\times0{,}01}{30} = 1{,}2\times10^3\,\mathrm{s}$, environ $20\,\mathrm{min}$.
**Q-2)** $D = \frac{\lambda}{\rho c} = 1{,}4\times10^{-5}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ et $\tau_d = 7\,\mathrm{s}$. $\frac{\tau_d}{\tau} = \frac{3hR}{\lambda} = 3\,\mathrm{Bi}$, où $\mathrm{Bi} = \frac{hR}{\lambda} = 2\times10^{-3}$ est le nombre de Biot. $\mathrm{Bi} \ll 1$ : la conduction interne homogénéise la bille bien plus vite qu'elle ne refroidit ; le modèle est justifié.
**Q-3)** $\varphi_R = \sigma(573^4 - 293^4) = 5{,}6\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, contre $h\Delta T = 2{,}8\times10^3\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ : à $300\,^\circ\mathrm{C}$, le rayonnement domine (pour un corps noir ; une surface métallique brillante rayonne beaucoup moins).

## EXERCICE 16 Rayon critique d'isolation

★★★☆☆

Un fil électrique de rayon $r_1$ est entouré d'une gaine isolante de conductivité $\lambda$, jusqu'au rayon $r_2$ ; la gaine échange avec l'air selon la loi de Newton (coefficient $h$).

**Q-1)** Exprimer la résistance thermique totale $R(r_2)$, par unité de longueur, entre le fil et l'air.

**Q-2)** Montrer que $R(r_2)$ passe par un minimum pour $r_2 = r_c = \frac{\lambda}{h}$. Calculer $r_c$ pour du PVC ($\lambda = 0{,}16\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, $h = 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$).

**Q-3)** Un fil de rayon $1\,\mathrm{mm}$ est-il mieux refroidi avec ou sans gaine de $2\,\mathrm{mm}$ d'épaisseur ?

**Correction**

**Q-1)** En série : $R = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda} + \frac{1}{2\pi r_2 h}$ (pour $H = 1\,\mathrm{m}$).
**Q-2)** $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r_2} = \frac{1}{2\pi\lambda r_2} - \frac{1}{2\pi h r_2^2} = 0$ pour $r_2 = \frac{\lambda}{h}$ ; la dérivée est négative avant, positive après : minimum. $r_c = 1{,}6\,\mathrm{cm}$.
**Q-3)** Sans gaine, $R = \frac{1}{2\pi r_1 h} = 15{,}9\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ ; avec gaine ($r_2 = 3\,\mathrm{mm}$), $R = \frac{\ln 3}{2\pi\times0{,}16} + \frac{1}{2\pi\times0{,}003\times10} = 1{,}09 + 5{,}31 = 6{,}4\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$. Paradoxalement, la gaine **améliore** le refroidissement : elle augmente la surface d'échange plus qu'elle n'ajoute de résistance de conduction, tant que $r_2 < r_c$.

## EXERCICE 17 Effet de serre : modèle à une couche

★★★☆☆

La Terre reçoit en moyenne $\frac{(1-A)\varphi_0}{4} = 238\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ du Soleil. On modélise l'atmosphère par une couche isotherme à $T_a$, transparente au rayonnement solaire (visible) mais absorbant totalement l'infrarouge, qui rayonne comme un corps noir vers le haut et vers le bas. Le sol, à $T_s$, est un corps noir.

**Q-1)** Écrire l'équilibre radiatif de la couche et celui du sol.

**Q-2)** En déduire $T_s$ et $T_a$. Comparer à la température d'équilibre sans atmosphère ($255\,\mathrm{K}$) et à la valeur réelle ($288\,\mathrm{K}$). Commenter.

**Correction**

**Q-1)** Couche : elle absorbe $\sigma T_s^4$ et émet $2\sigma T_a^4$ (deux faces) : $\sigma T_s^4 = 2\sigma T_a^4$. Sol : $238\,\mathrm{W\cdot m^{-2}} + \sigma T_a^4 = \sigma T_s^4$.
**Q-2)** $\sigma T_a^4 = 238\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ donne $T_a = 255\,\mathrm{K}$, et $T_s = 2^{1/4} T_a = 303\,\mathrm{K}$. L'atmosphère réchauffe le sol de près de $50\,\mathrm{K}$ ; le modèle surestime l'effet réel ($33\,\mathrm{K}$) car l'atmosphère n'absorbe pas tout l'infrarouge (fenêtre atmosphérique) et la convection transporte aussi de l'énergie.

# VIII Classiques des concours

## EXERCICE 18 Isolation d'une maison et régime transitoire

Une maison est maintenue à $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ alors que l'extérieur est à $T_e = 5\,°\mathrm{C}$. Ses murs ($S_m = 200\,\mathrm{m}^2$) sont formés de $20\,\mathrm{cm}$ de béton ($\lambda_b = 1{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) doublés de $8\,\mathrm{cm}$ de polystyrène ($\lambda_p = 0{,}035\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$), avec $h_i = 8\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ et $h_e = 20\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$. Les fenêtres ($S_f = 15\,\mathrm{m}^2$) ont une conductance surfacique $U_f = 2{,}8\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$. La ventilation renouvelle la moitié des $300\,\mathrm{m}^3$ d'air par heure ($\rho_{\text{air}} c_p = 1{,}2\times10^3\,\mathrm{J\cdot m^{-3}\cdot K^{-1}}$). On néglige le toit et le sol.

**Q-1)** Calculer la résistance thermique d'un mètre carré de mur, puis la conductance $G_m$ de l'ensemble des murs. Dans quelle couche la chute de température est-elle la plus grande ?

**Q-2)** Calculer la conductance $G_f$ des fenêtres et la conductance équivalente $G_v$ de la ventilation. Ces trois conductances sont-elles en série ou en parallèle ?

**Q-3)** En déduire la puissance de chauffage nécessaire.

**Q-4)** La nuit, on coupe le chauffage pendant $8\,\mathrm{h}$. La capacité thermique effective de la maison (air, mobilier, partie intérieure des murs) vaut $C = 2{,}0\times10^7\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$. On admet que la maison est à chaque instant à une température uniforme $T(t)$ et que le régime stationnaire des murs s'établit instantanément. Établir l'équation d'évolution de $T$, et calculer la température au matin.

**Q-5)** Quelle énergie a-t-on économisée ? Quelle énergie faudra-t-il fournir pour revenir à $20\,°\mathrm{C}$ ? Conclure sur l'intérêt de couper le chauffage.

**Correction**

**Q-1)** Par mètre carré : $\frac{1}{h_i}+\frac{e_b}{\lambda_b}+\frac{e_p}{\lambda_p}+\frac{1}{h_e} = 0{,}125+0{,}200+2{,}286+0{,}050 = 2{,}66\,\mathrm{K\cdot m^2\cdot W^{-1}}$, d'où $G_m = \frac{200}{2{,}66} = 75\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}$. La chute est proportionnelle à la résistance : $86\,\%$ des $15\,\mathrm{K}$, soit $12{,}9\,\mathrm{K}$, dans le polystyrène.
**Q-2)** $G_f = U_f S_f = 42\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}$. La ventilation évacue un débit d'air $D_V = 150\,\mathrm{m^3\cdot h^{-1}} = 0{,}0417\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$ réchauffé de $T_e$ à $T_i$ : $P_v = \rho c_p D_V (T_i - T_e)$, soit $G_v = 50\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}$. Les trois fuites sont soumises au même écart de température : elles sont **en parallèle**, $G = 167\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}$.
**Q-3)** $P = G(T_i - T_e) = 2{,}5\,\mathrm{kW}$.
**Q-4)** $C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -G(T-T_e)$ : $T - T_e = (T_i - T_e)\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{C}{G} = 1{,}2\times10^5\,\mathrm{s} = 33\,\mathrm{h}$. Après $8\,\mathrm{h}$ : $T = 5 + 15\,\mathrm{e}^{-8/33} = 16{,}8\,°\mathrm{C}$.
**Q-5)** Avec le chauffage, on aurait fourni $2{,}5\,\mathrm{kW}\times 8\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{kWh}$. Sans chauffage, la maison perd $\int G(T-T_e)\,\mathrm{d}t = C\,(20-16{,}8) = 6{,}4\times10^7\,\mathrm{J} = 18\,\mathrm{kWh}$, qu'il faudra restituer au matin (un peu moins en réalité, car les pertes sont plus faibles pendant la remontée en température). L'économie est d'environ $2\,\mathrm{kWh}$ par nuit ($10\,\%$) : couper le chauffage fait toujours gagner de l'énergie, puisqu'une maison plus froide perd moins, mais le gain est faible pour une maison de grande inertie ($\tau \gg 8\,\mathrm{h}$).

## EXERCICE 19 Température d'un satellite

Un satellite sphérique de rayon $R = 0{,}50\,\mathrm{m}$, de masse $m = 200\,\mathrm{kg}$ et de capacité thermique massique $c = 900\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, en orbite autour de la Terre, reçoit le flux solaire $\varphi_0 = 1361\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Sa surface est assimilée à un corps noir et sa conductivité, élevée, rend sa température uniforme. On néglige le rayonnement de la Terre.

**Q-1)** Exprimer et calculer sa température d'équilibre en l'absence d'électronique embarquée. Dans quel domaine émet-il ?

**Q-2)** L'électronique dissipe $P = 100\,\mathrm{W}$. Calculer la nouvelle température d'équilibre.

**Q-3)** Le satellite entre dans l'ombre de la Terre. Écrire l'équation d'évolution de sa température. Calculer la vitesse initiale de refroidissement et estimer la baisse de température après une éclipse de $30\,\mathrm{min}$. Justifier l'approximation utilisée.

**Q-4)** Pour limiter ces variations, on recouvre le satellite d'un revêtement réfléchissant. Pourquoi ce choix sort-il du modèle du corps noir ? Quel est son effet qualitatif ?

**Correction**

**Q-1)** Il absorbe $\varphi_0 \pi R^2$ (sa section) et émet $4\pi R^2 \sigma T^4$ : $T = \left(\frac{\varphi_0}{4\sigma}\right)^{1/4} = 278\,\mathrm{K}$, soit $5\,^\circ\mathrm{C}$. Wien : $\lambda_m = 10\,\mu\mathrm{m}$, infrarouge.

**Q-2)** $4\pi R^2 \sigma T^4 = \varphi_0 \pi R^2 + P$ : $T^4 = \frac{1069+100}{1{,}78\times10^{-7}} = 6{,}56\times10^{9}\,\mathrm{K}^4$ et $T = 285\,\mathrm{K}$.

**Q-3)** $mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P - 4\pi R^2\sigma T^4$. Au début, $mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 100 - 1169 = -1{,}07\times10^{3}\,\mathrm{W}$, avec $mc = 1{,}8\times10^{5}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -5{,}9\times10^{-3}\,\mathrm{K\cdot s^{-1}}$, soit environ $-11\,\mathrm{K}$ en $30\,\mathrm{min}$. La variation relative de $T^4$ reste faible ($4\times\frac{11}{285}\approx 15\,\%$), ce qui justifie, en première approximation, une vitesse de refroidissement constante (elle diminue en réalité un peu).

**Q-4)** Une surface réfléchissante n'absorbe qu'une partie du rayonnement et émet moins qu'un corps noir (corps « gris », hors programme). Elle réduit l'énergie absorbée au soleil et les pertes radiatives à l'ombre : les variations de température sont atténuées, et la température d'équilibre dépend du rapport de ses propriétés d'absorption dans le visible et d'émission dans l'infrarouge.