LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

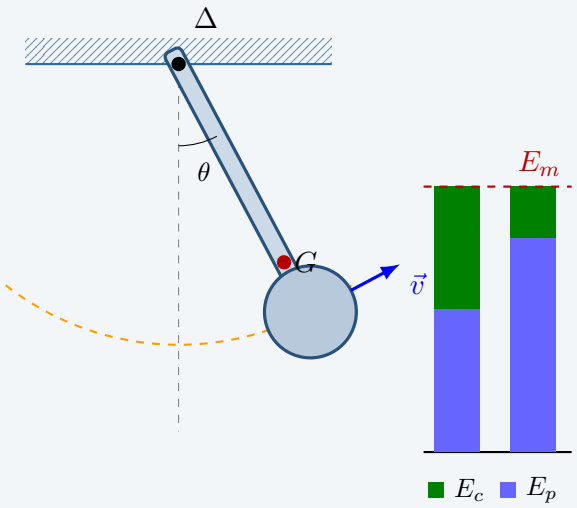
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

S3

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Approche énergétique du mouvement d'un solide

Puissance d'une force et d'un couple — Puissance des actions intérieures et des actions de contact — Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques — Énergie mécanique, intégrale première — Frottements et dissipation — Pendule pesant, portrait de phase — Systèmes déformables



$$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta) = E_m$$

> *On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme.*
>
> — Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique*, avertissement (1788)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Roulement sur un plan incliné »

S3 — Énergétique du solide

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Exprimer la puissance d'une force ou d'un couple sur un solide en translation ($\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$) ou en rotation autour d'un axe fixe ($\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \omega$).
- Savoir que la puissance des forces intérieures ne dépend pas du référentiel, qu'elle est nulle pour un solide et non nulle en général pour un système déformable.
- Appliquer les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques et le théorème de l'énergie mécanique ; utiliser une intégrale première.
- Exprimer la puissance des actions de contact et discuter l'aspect énergétique des frottements.
- Exploiter l'énergie du pendule pesant : profil $E_p(\theta)$, portrait de phase, pendulaire ou révolutif, amortissement.

Comment lire ce cours

Étiquettes : R à connaître ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Les théorèmes énergétiques donnent souvent l'équation du mouvement (ou une intégrale première) plus vite que le TRC ou le TMC du chapitre S2 : les actions qui ne travaillent pas disparaissent. La simulation PhysioNova « Roulement sur un plan incliné » compare, pour une même hauteur de chute, un solide qui glisse avec frottement (l'énergie mécanique diminue) et un solide qui roule sans glisser (elle se conserve). Exercices d'application corrigés après chaque notion ; approfondissements et classiques des concours en fin de chapitre.

Table des matières

I Puissance et travail des actions mécaniques . . . 3
I.1 Puissance d'une action sur un système . . . 3
I.2 Cas d'un solide . . . 3
II Puissance des actions intérieures . . . 4
II.1 Indépendance vis-à-vis du référentiel . . . 4
II.2 Cas du solide . . . 4
II.3 Actions de contact entre deux solides . . . 5
III Théorèmes énergétiques . . . 5
III.1 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques . . . 5
III.2 Énergie potentielle et énergie mécanique . . . 6
IV Aspect énergétique des frottements . . . 7
IV.1 Frottement de glissement . . . 7
IV.2 Frottements dans une liaison . . . 7
IV.3 Roulement sans glissement . . . 7
V Le pendule pesant : approche énergétique . . . 8
V.1 Énergie potentielle et équilibres . . . 8
V.2 Portrait de phase : mouvements pendulaire et révolutif . . . 9
V.3 Effet des frottements . . . 9
VI Systèmes déformables : rôle des forces intérieures . . . 10
VI.1 Tabouret d'inertie et patineuse . . . 10
VI.2 Saut et marche . . . 10
VII Synthèse . . . 11
VIII Exercices d'approfondissement . . . 11
IX Classiques des concours . . . 12

I Puissance et travail des actions mécaniques

I.1 Puissance d'une action sur un système

Définition — Puissance et travail R

La puissance, dans le référentiel $\mathcal{R}$, d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$, en watts. Pour un ensemble de forces appliquées aux points d'un système, ou une force répartie de densité $\mathrm{d}\vec{F}$:

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = \int_\Sigma \vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}\vec{F}$$

Le travail entre t_1 et t_2 est $W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}\,\mathrm{d}t$. Puissance et travail dépendent du référentiel.

I.2 Cas d'un solide

Puissance des actions extérieures sur un solide R D

Pour des actions de résultante $\vec{R}$ et de moment $\vec{\mathcal{M}}_A$ en un point A du solide :

$$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A$$

Démonstration. Pour $M \in S$, $\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$. Donc $\mathcal{P} = \vec{v}(A) \cdot \int \mathrm{d}\vec{F} + \int (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \mathrm{d}\vec{F}$; par permutation circulaire du produit mixte, $(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\vec{F})$, et l'intégrale de $\overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\vec{F}$ est $\vec{\mathcal{M}}_A$. □

Les deux cas du programme R

- Solide en **translation** ($\vec{\Omega} = \vec{0}$) : tous les points ont la vitesse $\vec{v}$, et

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Solide en **rotation autour d'un axe fixe** Δ ($A \in \Delta$, $\vec{v}(A) = \vec{0}$, $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_\Delta$) :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\,\omega \qquad \text{et pour un couple} \qquad \mathcal{P} = \Gamma\,\omega$$

Conséquences : une force dont la droite d'action rencontre l'axe de rotation ne travaille pas ; une **liaison pivot parfaite ne travaille pas** ($\mathcal{M}_\Delta = 0$) ; le poids a pour puissance $m\vec{g} \cdot \vec{v}_G$ (force équivalente appliquée en G). Le travail d'un moment constant pour une rotation de $\Delta\theta$ est $W = \mathcal{M}_\Delta\,\Delta\theta$, l'analogue de $W = F\,\Delta x$.

Ordres de grandeur

- Cycliste : $200\,\mathrm{W}$ à $90\,\mathrm{tr/min}$, soit un couple moyen de $21\,\mathrm{N \cdot m}$ sur le pédalier ; sprinter : plus de $1\,\mathrm{kW}$ pendant quelques secondes.
- Moteur de voiture : 50 à $150\,\mathrm{kW}$; couple maximal 150 à $400\,\mathrm{N \cdot m}$.
- Éolienne de $2\,\mathrm{MW}$ tournant à $15\,\mathrm{tr/min}$: couple de l'ordre de $1{,}3 \times 10^6\,\mathrm{N \cdot m}$ sur l'arbre lent.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 **Moteur et éolienne** ✦✧✧✧✧

Q-1) Un moteur exerce un couple de $25\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ à $4000\,\mathrm{tr/min}$. Quelle puissance fournit-il ?

Q-2) Une éolienne fournit $2{,}0\,\mathrm{MW}$ en tournant à $15\,\mathrm{tr/min}$. Quel couple le vent exerce-t-il sur le rotor ? Pourquoi place-t-on un multiplicateur de vitesse avant la génératrice ?

EXERCICE 2 **Puissance d'une force sur un solide en rotation** ✦✦✧✧✧

Une porte de largeur $\ell = 0{,}90\,\mathrm{m}$ tourne autour de ses gonds (liaison pivot parfaite d'axe vertical). On la pousse avec une force horizontale $F = 20\,\mathrm{N}$ appliquée à son bord, faisant l'angle $\beta = 60°$ avec le plan de la porte, alors qu'elle tourne à $\omega = 1{,}2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Q-1) Calculer la puissance de la force de deux façons : $\vec{F}\cdot\vec{v}$ et $\mathcal{M}_\Delta\omega$.

Q-2) Quel travail fournit-on en ouvrant la porte de $90°$ avec cette force, l'angle β restant constant ?

II Puissance des actions intérieures

II.1 Indépendance vis-à-vis du référentiel

Puissance des forces intérieures R D

Pour deux points M_1 et M_2 en interaction, $\vec{f}_{1\to2} = -\vec{f}_{2\to1}$:

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{2\to1}\cdot\vec{v}_1 + \vec{f}_{1\to2}\cdot\vec{v}_2 = \vec{f}_{1\to2}\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Elle ne dépend que de la vitesse **relative** des points : elle est la même dans tous les référentiels. Elle n'est pas nulle en général.

Exemple : deux masses reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. La force intérieure dérive de l'énergie potentielle $\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$ et $\mathcal{P}_{\text{int}} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\right]$, non nulle dès que le ressort se déforme. Les muscles d'un sauteur, les gaz brûlés dans un moteur, une explosion fournissent un travail intérieur positif ; les frottements internes d'un corps mou en dissipent.

II.2 Cas du solide

Puissance intérieure d'un solide R

Pour un **solide**, la puissance totale des forces intérieures est **nulle** : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

Justification pour une paire de points. $\vec{f}_{1\to2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_1M_2}$, et la distance M_1M_2 est constante : $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{v}_2-\vec{v}_1) = \frac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_1M_2^2 = 0$. Donc $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ pour chaque paire. Le programme admet ce résultat pour un solide réel. □

II.3 Actions de contact entre deux solides

Puissance totale des actions de contact R D

Pour deux solides en contact ponctuel en I, l'action de S_2 sur S_1, $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$, et l'action opposée de S_1 sur S_2 ont une puissance totale

$$\mathcal{P}_{\text{contact}} = \vec{R} \cdot \vec{v}(I_1) - \vec{R} \cdot \vec{v}(I_2) = \vec{T} \cdot \vec{v}_g(S_1/S_2) \leq 0$$

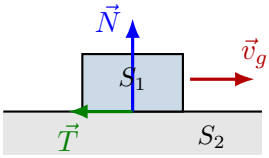


Fig. 1 : $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$: le frottement dissipe.

★ À retenir

- $\mathcal{P}_{\text{contact}}$ ne dépend pas du référentiel ; elle est **négative** en cas de glissement avec frottement ($-f_d N\, v_g$) : de l'énergie mécanique est convertie en énergie interne (échauffement).
- Elle est **nulle** s'il n'y a pas de frottement ($\vec{T} = \vec{0}$) ou **pas de glissement** ($\vec{v}_g = \vec{0}$) : un roulement sans glissement ne dissipe pas d'énergie (aux frottements de roulement près, hors programme).
- En revanche, la puissance de l'action de S_2 sur S_1 seule, $\vec{R} \cdot \vec{v}(I_1)$, dépend du référentiel et peut être positive : un tapis roulant fournit de l'énergie au colis qu'il entraîne.

III Théorèmes énergétiques

III.1 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques

TPC et TEC pour un système fermé R D

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \qquad \Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$$

Pour un **solide**, $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$: $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}}$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Contrairement aux théorèmes de la résultante et du moment cinétiques, d'où les forces intérieures disparaissent, le bilan d'énergie d'un système déformable doit **inclure le travail des forces intérieures**.

Solide en rotation autour d'un axe fixe R D

Avec $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ et $\mathcal{P} = \sum \mathcal{M}_\Delta \omega$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2\right) = J_\Delta \omega \dot{\omega} = \omega \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

En simplifiant par ω (non identiquement nul), on retrouve le TMC scalaire $J_\Delta \dot{\omega} = \sum \mathcal{M}_\Delta$: pour un solide à un degré de liberté, le théorème énergétique et le théorème mécanique sont équivalents.

III.2 Énergie potentielle et énergie mécanique

Énergies potentielles usuelles R

Action	Énergie potentielle	Justification
Poids (axe Oz vers le haut)	$E_p = mgz_G$	$\mathcal{P} = m\vec{g} \cdot \vec{v}_G = -mg\dot{z}_G$
Ressort (raideur k)	$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$	force de rappel
Couple de torsion $-C\theta$	$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$	$\mathcal{P} = -C\theta\dot{\theta}$
Entraînement, rotation Ω uniforme	$E_p = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$	point matériel
Entraînement, translation ($\vec{a}_e$ cte)	$E_p = m\vec{a}_e \cdot \overrightarrow{OG}$	force $-m\vec{a}_e$

Théorème de l'énergie mécanique R

Avec $E_m = E_c + E_p$, où E_p regroupe les énergies potentielles des actions conservatives (extérieures et intérieures) :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{nc}} \qquad \Delta E_m = W_{\text{nc}}$$

où $\mathcal{P}_{\text{nc}}$ est la puissance des actions non conservatives. Si elles ne travaillent pas, E_m est conservée : $E_m = \text{cte}$ est une **intégrale première** du mouvement.

☞ Méthode — Choisir une méthode de mise en équation M

- Système à **un degré de liberté** (x ou θ), sans dissipation : la conservation de E_m donne directement une intégrale première ; en la dérivant, on obtient l'équation du mouvement sans calculer les actions qui ne travaillent pas (réaction normale sans frottement, liaison pivot parfaite, tension d'un fil inextensible dans un système « fil + poulie »).
- Pour calculer une **action de liaison** (tension, réaction), on utilise ensuite le TRC ou le TMC.
- Avec frottement solide, on détermine d'abord le régime (glissement ou non, chapitre S2), puis on fait le bilan énergétique avec $\mathcal{P}_{\text{contact}} = -f_d N v_g$.

- Pour un **système de plusieurs solides** liés, le TEC appliqué à l'ensemble évite d'écrire les actions intérieures qui ne travaillent pas (fil inextensible sans glissement, engrenage parfait).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Volant freiné : approche énergétique ✦✧✧✧✧

EXERCICE 4 Treuil : approche énergétique ✦✦✧✧✧

EXERCICE 5 Pendule de torsion : énergie ✦✦✧✧✧

IV Aspect énergétique des frottements

IV.1 Frottement de glissement

IV.2 Frottements dans une liaison

IV.3 Roulement sans glissement

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La force de frottement n'est pas toujours « résistante » dans un référentiel donné : sur un tapis roulant, elle fournit de l'énergie au colis. Seule la puissance **totale** des actions de contact (sur les deux solides) est toujours négative ou nulle.
- La réaction normale d'un support fixe ne travaille pas, mais celle d'un support mobile (ascenseur, plateau qui monte) peut travailler.

☞ **Exercices d'application**

EXERCICE 6 Palet lancé ✦✧✧✧✧

EXERCICE 7 Disques de frein ✦✦✧✧✧

EXERCICE 8 Colis posé sur un tapis horizontal ✦✦✧✧✧

V Le pendule pesant : approche énergétique

V.1 Énergie potentielle et équilibres

$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta) = \text{cte}$$

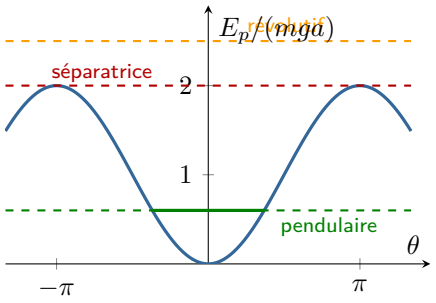


Fig. 2 : Profil d'énergie potentielle et niveaux d'énergie.

☞ **Méthode — Exploiter un profil $E_p(\theta)$** M

- Équilibres : $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$; stabilité : $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} > 0$.
- Petites oscillations autour d'un équilibre stable θ_e : $E_p \approx E_p(\theta_e) + \frac{1}{2}E_p''(\theta_e)(\theta-\theta_e)^2$, et la pulsation vaut $\omega_0 = \sqrt{E_p''(\theta_e)/J_\Delta}$. Pour le pendule : $E_p''(0) = mga$, $\omega_0^2 = mga/J_\Delta$.
- Zones accessibles : $E_p(\theta) \leq E_m$; points de rebroussement : $E_p(\theta) = E_m$.

V.2 Portrait de phase : mouvements pendulaire et révolutif

-
-
-

V.3 Effet des frottements

-
-

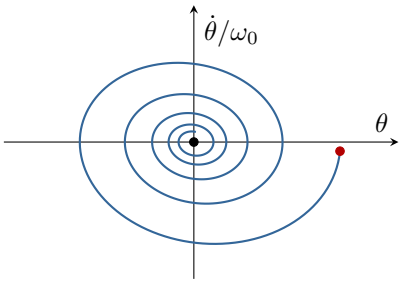


Fig. 3 : Portrait de phase amorti (frottement visqueux).

Remarque

En travaux pratiques. Un capteur angulaire relié à une carte d'acquisition donne $\theta(t)$; on calcule $\dot{\theta}$ numériquement et on trace $\dot{\theta}$ en fonction de θ. On observe la spirale, le non-isochronisme aux grandes amplitudes, et l'on calcule $E_m(t) = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta)$, dont la décroissance mesure le couple de frottement.

Programme Python : portrait de phase et énergie d'un pendule amorti

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

J, m, g, a = 0.12, 0.80, 9.81, 0.30        # SI
h, Gf = 2e-3, 5e-3                         # frottement visqueux, couple sec
def f(t, y):
    th, w = y
    return [w, (-m*g*a*np.sin(th) - h*w - Gf*np.tanh(w/1e-3))/J]
sol = solve_ivp(f, [0, 40], [0, 9.5], max_step=1e-3)   # lance au-dela de 2*w0
th, w = sol.y
Em = 0.5*J*w**2 + m*g*a*(1 - np.cos(th))
plt.subplot(1, 2, 1); plt.plot(th, w); plt.xlabel("theta"); plt.ylabel("dtheta/dt")
plt.subplot(1, 2, 2); plt.plot(sol.t, Em); plt.xlabel("t (s)"); plt.ylabel("Em (J)")
plt.show()
```

☞ **Exercices d'application**

EXERCICE 9 **Pendule par le théorème de la puissance cinétique** ✦✦✧✧✧

EXERCICE 10 **Pendule lancé** ✦✦✧✧✧

VI Systèmes déformables : rôle des forces intérieures

VI.1 Tabouret d'inertie et patineuse

VI.2 Saut et marche

★ À retenir

Pour un système **déformable** : les forces intérieures disparaissent du TRC et du TMC, mais **pas du TEC**. Pour un **solide**, $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

☞ **Exercices d'application**

EXERCICE 11 Tabouret d'inertie

EXERCICE 12 Saut vertical

VII Synthèse

★ À retenir

Notion	Expression	Remarques
Puissance (translation)	$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	dépend du référentiel
Puissance (rotation)	$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \omega,\ \Gamma\omega$	pivot parfait : $\mathcal{P} = 0$
Forces intérieures	$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{1\to2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$	nulle pour un solide
Contact entre solides	$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g \leq 0$	nulle sans glissement
TPC / TEC	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$	$\mathcal{R}$ galiléen
Rotation (axe fixe)	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2\right) = \omega \sum \mathcal{M}_\Delta$	équivaut au TMC
Énergie mécanique	$\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{nc}}$	intégrale première si $\mathcal{P}_{\text{nc}} = 0$
Énergies potentielles	$mgz_G,\ \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2,\ \frac{1}{2}C\theta^2$	$-\frac{1}{2}m\Omega^2r^2$ en rotation
Pendule pesant	$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta)$	révolutif si $E_m > 2mga$

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 13 Chaîne qui glisse d'une table

EXERCICE 14 Pendule inversé et ressort de torsion

★★★☆☆

EXERCICE 15 Bilan énergétique d'un tapis élévateur

★★★☆☆

IX Classiques des concours

EXERCICE 16 Ascenseur à contrepoids

★★★★☆

EXERCICE 17 Pendule de TP : bifurcation et couple de frottement

★★★★☆

EXERCICE 18 Énergie dans un référentiel tournant

★★★☆☆