LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

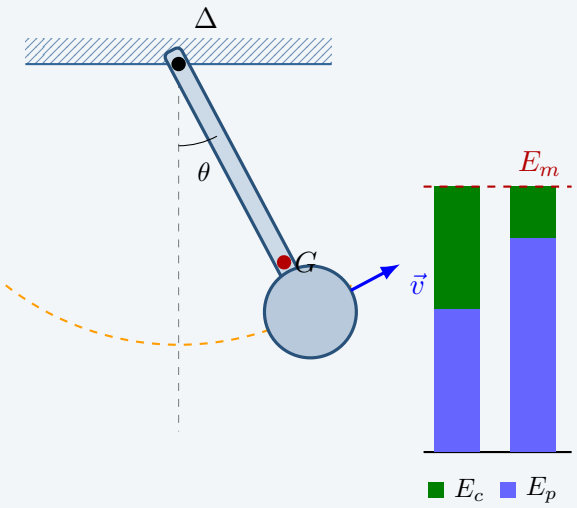
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

S3

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Approche énergétique du mouvement d'un solide

Puissance d'une force et d'un couple — Puissance des actions intérieures et des actions de contact — Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques — Énergie mécanique, intégrale première — Frottements et dissipation — Pendule pesant, portrait de phase — Systèmes déformables



$$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta) = E_m$$

> *On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme.*
>
> — Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique*, avertissement (1788)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Roulement sur un plan incliné »

S3 — Énergétique du solide

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Exprimer la puissance d'une force ou d'un couple sur un solide en translation ($\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$) ou en rotation autour d'un axe fixe ($\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \omega$).
- Savoir que la puissance des forces intérieures ne dépend pas du référentiel, qu'elle est nulle pour un solide et non nulle en général pour un système déformable.
- Appliquer les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques et le théorème de l'énergie mécanique ; utiliser une intégrale première.
- Exprimer la puissance des actions de contact et discuter l'aspect énergétique des frottements.
- Exploiter l'énergie du pendule pesant : profil $E_p(\theta)$, portrait de phase, pendulaire ou révolutif, amortissement.

Comment lire ce cours

Étiquettes : R à connaître ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Les théorèmes énergétiques donnent souvent l'équation du mouvement (ou une intégrale première) plus vite que le TRC ou le TMC du chapitre S2 : les actions qui ne travaillent pas disparaissent. La simulation PhysioNova « Roulement sur un plan incliné » compare, pour une même hauteur de chute, un solide qui glisse avec frottement (l'énergie mécanique diminue) et un solide qui roule sans glisser (elle se conserve). Exercices d'application corrigés après chaque notion ; approfondissements et classiques des concours en fin de chapitre.

Table des matières

I Puissance et travail des actions mécaniques . . . 3
I.1 Puissance d'une action sur un système . . . 3
I.2 Cas d'un solide . . . 3
II Puissance des actions intérieures . . . 4
II.1 Indépendance vis-à-vis du référentiel . . . 4
II.2 Cas du solide . . . 5
II.3 Actions de contact entre deux solides . . . 5
III Théorèmes énergétiques . . . 5
III.1 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques . . . 5
III.2 Énergie potentielle et énergie mécanique . . . 6
IV Aspect énergétique des frottements . . . 7
IV.1 Frottement de glissement . . . 7
IV.2 Frottements dans une liaison . . . 8
IV.3 Roulement sans glissement . . . 8
V Le pendule pesant : approche énergétique . . . 9
V.1 Énergie potentielle et équilibres . . . 9
V.2 Portrait de phase : mouvements pendulaire et révolutif . . . 9
V.3 Effet des frottements . . . 10
VI Systèmes déformables : rôle des forces intérieures . . . 11
VI.1 Tabouret d'inertie et patineuse . . . 11
VI.2 Saut et marche . . . 11
VII Synthèse . . . 12
VIII Exercices d'approfondissement . . . 13
IX Classiques des concours . . . 14

I Puissance et travail des actions mécaniques

I.1 Puissance d'une action sur un système

Définition — Puissance et travail R

La puissance, dans le référentiel $\mathcal{R}$, d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M de vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$, en watts. Pour un ensemble de forces appliquées aux points d'un système, ou une force répartie de densité $\mathrm{d}\vec{F}$:

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = \int_\Sigma \vec{v}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}\vec{F}$$

Le travail entre t_1 et t_2 est $W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}\,\mathrm{d}t$. Puissance et travail dépendent du référentiel.

I.2 Cas d'un solide

Puissance des actions extérieures sur un solide R D

Pour des actions de résultante $\vec{R}$ et de moment $\vec{\mathcal{M}}_A$ en un point A du solide :

$$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_A$$

Démonstration. Pour $M \in S$, $\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$. Donc $\mathcal{P} = \vec{v}(A) \cdot \int \mathrm{d}\vec{F} + \int (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \mathrm{d}\vec{F}$; par permutation circulaire du produit mixte, $(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\vec{F})$, et l'intégrale de $\overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\vec{F}$ est $\vec{\mathcal{M}}_A$. □

Les deux cas du programme R

- Solide en **translation** ($\vec{\Omega} = \vec{0}$) : tous les points ont la vitesse $\vec{v}$, et

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Solide en **rotation autour d'un axe fixe** Δ ($A \in \Delta$, $\vec{v}(A) = \vec{0}$, $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_\Delta$) :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\,\omega \qquad \text{et pour un couple} \qquad \mathcal{P} = \Gamma\,\omega$$

Conséquences : une force dont la droite d'action rencontre l'axe de rotation ne travaille pas ; une **liaison pivot parfaite ne travaille pas** ($\mathcal{M}_\Delta = 0$) ; le poids a pour puissance $m\vec{g} \cdot \vec{v}_G$ (force équivalente appliquée en G). Le travail d'un moment constant pour une rotation de $\Delta\theta$ est $W = \mathcal{M}_\Delta\,\Delta\theta$, l'analogue de $W = F\,\Delta x$.

Ordres de grandeur

- Cycliste : $200\,\mathrm{W}$ à $90\,\mathrm{tr/min}$, soit un couple moyen de $21\,\mathrm{N \cdot m}$ sur le pédalier ; sprinter : plus de $1\,\mathrm{kW}$ pendant quelques secondes.
- Moteur de voiture : 50 à $150\,\mathrm{kW}$; couple maximal 150 à $400\,\mathrm{N \cdot m}$.
- Éolienne de $2\,\mathrm{MW}$ tournant à $15\,\mathrm{tr/min}$: couple de l'ordre de $1{,}3 \times 10^6\,\mathrm{N \cdot m}$ sur l'arbre lent.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 **Moteur et éolienne** ✦✧✧✧✧

Q-1) Un moteur exerce un couple de $25\,\mathrm{N\cdot m}$ à $4000\,\mathrm{tr/min}$. Quelle puissance fournit-il ?

Q-2) Une éolienne fournit $2{,}0\,\mathrm{MW}$ en tournant à $15\,\mathrm{tr/min}$. Quel couple le vent exerce-t-il sur le rotor ? Pourquoi place-t-on un multiplicateur de vitesse avant la génératrice ?

Correction

Q-1) $\omega = 419\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $\mathcal{P} = \Gamma\omega = 10{,}5\,\mathrm{kW}$.

Q-2) $\omega = 1{,}57\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $\Gamma = \mathcal{P}/\omega = 1{,}3\times10^{6}\,\mathrm{N\cdot m}$. À puissance donnée, le couple est inversement proportionnel à la vitesse angulaire : en multipliant ω par 100 environ, on divise le couple, donc les efforts et la taille de la génératrice, par 100.

EXERCICE 2 **Puissance d'une force sur un solide en rotation** ✦✦✧✧✧

Une porte de largeur $\ell = 0{,}90\,\mathrm{m}$ tourne autour de ses gonds (liaison pivot parfaite d'axe vertical). On la pousse avec une force horizontale $F = 20\,\mathrm{N}$ appliquée à son bord, faisant l'angle $\beta = 60°$ avec le plan de la porte, alors qu'elle tourne à $\omega = 1{,}2\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Q-1) Calculer la puissance de la force de deux façons : $\vec{F}\cdot\vec{v}$ et $\mathcal{M}_\Delta\omega$.

Q-2) Quel travail fournit-on en ouvrant la porte de $90°$ avec cette force, l'angle β restant constant ?

Correction

Q-1) Le bord de la porte a la vitesse $\ell\omega = 1{,}08\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, perpendiculaire à la porte ; la composante de $\vec{F}$ selon cette direction est $F\sin\beta$: $\mathcal{P} = F\sin\beta\,\ell\omega = 18{,}7\,\mathrm{W}$. Bras de levier : $\ell\sin\beta$, $\mathcal{M}_\Delta = F\ell\sin\beta = 15{,}6\,\mathrm{N\cdot m}$, et $\mathcal{M}_\Delta\omega = 18{,}7\,\mathrm{W}$.

Q-2) $W = \mathcal{M}_\Delta\,\Delta\theta = 15{,}6\times\frac{\pi}{2} = 24{,}5\,\mathrm{J}$.

II Puissance des actions intérieures

II.1 Indépendance vis-à-vis du référentiel

Puissance des forces intérieures R D

Pour deux points M_1 et M_2 en interaction, $\vec{f}_{1\to2} = -\vec{f}_{2\to1}$:

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{2\to1}\cdot\vec{v}_1 + \vec{f}_{1\to2}\cdot\vec{v}_2 = \vec{f}_{1\to2}\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Elle ne dépend que de la vitesse **relative** des points : elle est la même dans tous les référentiels. Elle n'est pas nulle en général.

Exemple : deux masses reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. La force intérieure dérive de l'énergie potentielle $\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$ et $\mathcal{P}_{\text{int}} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\right]$, non nulle dès que le ressort se déforme. Les muscles d'un sauteur, les gaz brûlés dans un moteur, une explosion fournissent un travail intérieur positif ; les frottements internes d'un corps mou en dissipent.

II.2 Cas du solide

Puissance intérieure d'un solide R

Pour un **solide**, la puissance totale des forces intérieures est **nulle** : $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

Justification pour une paire de points. $\vec{f}_{1\to2}$ est colinéaire à $\overrightarrow{M_1M_2}$, et la distance M_1M_2 est constante : $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{v}_2-\vec{v}_1) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_1M_2^2 = 0$. Donc $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$ pour chaque paire. Le programme admet ce résultat pour un solide réel. □

II.3 Actions de contact entre deux solides

Puissance totale des actions de contact R D

Pour deux solides en contact ponctuel en I, l'action de S_2 sur S_1, $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$, et l'action opposée de S_1 sur S_2 ont une puissance totale

$$\mathcal{P}_{\text{contact}} = \vec{R}\cdot\vec{v}(I_1) - \vec{R}\cdot\vec{v}(I_2) = \vec{T}\cdot\vec{v}_g(S_1/S_2) \leq 0$$

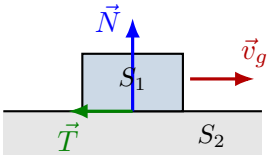


Fig. 1 : $\vec{T}\cdot\vec{v}_g < 0$: le frottement dissipe.

Démonstration. $\vec{R}\cdot\vec{v}(I_1) + (-\vec{R})\cdot\vec{v}(I_2) = \vec{R}\cdot\vec{v}_g$; $\vec{N}$ est normale au plan tangent qui contient $\vec{v}_g$, donc $\vec{N}\cdot\vec{v}_g = 0$; d'après Coulomb, $\vec{T}$ est opposée à $\vec{v}_g$ en cas de glissement. □

★ À retenir

- $\mathcal{P}_{\text{contact}}$ ne dépend pas du référentiel ; elle est **négative** en cas de glissement avec frottement ($-f_d N\, v_g$) : de l'énergie mécanique est convertie en énergie interne (échauffement).
- Elle est **nulle** s'il n'y a pas de frottement ($\vec{T} = \vec{0}$) ou **pas de glissement** ($\vec{v}_g = \vec{0}$) : un roulement sans glissement ne dissipe pas d'énergie (aux frottements de roulement près, hors programme).
- En revanche, la puissance de l'action de S_2 sur S_1 seule, $\vec{R}\cdot\vec{v}(I_1)$, dépend du référentiel et peut être positive : un tapis roulant fournit de l'énergie au colis qu'il entraîne.

III Théorèmes énergétiques

III.1 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques

TPC et TEC pour un système fermé R D

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \qquad \Delta E_c = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$$

Pour un **solide**, $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$: $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}}$.

Démonstration. Pour chaque point, le théorème de la puissance cinétique (MPSI) s'écrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \left(\vec{F}_{\text{ext}\to i} + \sum_j \vec{f}_{j\to i}\right)\cdot\vec{v}_i$. On somme sur tous les points. □

✗ Attention, erreurs fréquentes

Contrairement aux théorèmes de la résultante et du moment cinétiques, d'où les forces intérieures disparaissent, le bilan d'énergie d'un système déformable doit **inclure le travail des forces intérieures**.

Solide en rotation autour d'un axe fixe R D

Avec $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ et $\mathcal{P} = \sum \mathcal{M}_\Delta \omega$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2\right) = J_\Delta \omega \dot{\omega} = \omega \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

En simplifiant par ω (non identiquement nul), on retrouve le TMC scalaire $J_\Delta \dot{\omega} = \sum \mathcal{M}_\Delta$: pour un solide à un degré de liberté, le théorème énergétique et le théorème mécanique sont équivalents.

III.2 Énergie potentielle et énergie mécanique

Une action est **conservative** si sa puissance s'écrit $\mathcal{P} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}$, où E_p ne dépend que de la position du système.

Énergies potentielles usuelles R

Action	Énergie potentielle	Justification
Poids (axe Oz vers le haut)	$E_p = mgz_G$	$\mathcal{P} = m\vec{g}\cdot\vec{v}_G = -mg\dot{z}_G$
Ressort (raideur k)	$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$	force de rappel
Couple de torsion $-C\theta$	$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$	$\mathcal{P} = -C\theta\dot{\theta}$
Entraînement, rotation Ω uniforme	$E_p = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$	point matériel
Entraînement, translation ($\vec{a}_e$ cte)	$E_p = m\vec{a}_e \cdot \overrightarrow{OG}$	force $-m\vec{a}_e$

Théorème de l'énergie mécanique R

Avec $E_m = E_c + E_p$, où E_p regroupe les énergies potentielles des actions conservatives (extérieures et intérieures) :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{nc}} \qquad \Delta E_m = W_{\text{nc}}$$

où $\mathcal{P}_{\text{nc}}$ est la puissance des actions non conservatives. Si elles ne travaillent pas, E_m est conservée : $E_m = \text{cte}$ est une **intégrale première** du mouvement.

Dans un référentiel non galiléen, on ajoute la puissance de la force d'inertie d'entraînement ; la force de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse relative, ne travaille pas.

☞ Méthode — Choisir une méthode de mise en équation M

- Système à **un degré de liberté** (x ou θ), sans dissipation : la conservation de E_m donne directement une intégrale première ; en la dérivant, on obtient l'équation du mouvement sans calculer les actions qui ne travaillent pas (réaction normale sans frottement, liaison pivot parfaite, tension d'un fil inextensible dans un système « fil + poulie »).

- Pour calculer une **action de liaison** (tension, réaction), on utilise ensuite le TRC ou le TMC.
- Avec frottement solide, on détermine d'abord le régime (glissement ou non, chapitre S2), puis on fait le bilan énergétique avec $\mathcal{P}_{\text{contact}} = -f_d N v_g$.
- Pour un **système de plusieurs solides** liés, le TEC appliqué à l'ensemble évite d'écrire les actions intérieures qui ne travaillent pas (fil inextensible sans glissement, engrenage parfait).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 — Volant freiné : approche énergétique

Un volant ($J = 1{,}5\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$) tournant à $900\,\text{tr/min}$ est freiné par un couple constant $\Gamma = 4{,}0\,\text{N}\cdot\text{m}$. Retrouver par le théorème de l'énergie cinétique le nombre de tours avant l'arrêt. Que devient l'énergie ?

Correction

$\Delta E_c = W$: $0 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = -\Gamma\theta_f$, donc $\theta_f = \frac{J\omega_0^2}{2\Gamma} = \frac{1{,}5\times 94{,}2^2}{8} = 1{,}67\times 10^3\,\text{rad}$, soit 265 tours, comme au chapitre S2. Les $6{,}7\,\text{kJ}$ d'énergie cinétique sont dissipés en énergie interne dans le frein (échauffement).

EXERCICE 4 — Treuil : approche énergétique

Une charge $m = 10\,\text{kg}$ pend au bout d'un câble enroulé sans glissement sur un tambour ($R = 10\,\text{cm}$, $J = 0{,}050\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, pivot parfait). On lâche le système sans vitesse. Calculer la vitesse de la charge après une descente de $h = 2{,}0\,\text{m}$; retrouver l'accélération.

Correction

Système {charge + câble + tambour} : le pivot parfait ne travaille pas ; le câble, inextensible et sans glissement, a une puissance intérieure nulle. Seul le poids de la charge travaille : $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mgh$, d'où $v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + J/R^2}} = 5{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. En dérivant $\frac{1}{2}(m + J/R^2)\dot{x}^2 = mgx$: $\ddot{x} = \frac{g}{1+J/(mR^2)} = 6{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, sans avoir eu à introduire la tension.

EXERCICE 5 — Pendule de torsion : énergie

Un disque de moment d'inertie J est suspendu à un fil de torsion de constante C. Écrire son énergie mécanique, en déduire l'équation du mouvement et la période. Pour $J = 2{,}0\times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $C = 5{,}0\times 10^{-3}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ et une amplitude de $0{,}50\,\text{rad}$, calculer la vitesse angulaire maximale.

Correction

Le poids et la tension du fil, verticaux et passant par l'axe, ne travaillent pas : $E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = \text{cte}$. En dérivant : $J\ddot{\theta} + C\theta = 0$, $T = 2\pi\sqrt{J/C} = 3{,}97\,\text{s}$. $\dot{\theta}_{\max} = \theta_m\sqrt{C/J} = 0{,}79\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

IV Aspect énergétique des frottements

IV.1 Frottement de glissement

Lorsqu'un solide glisse sur un support fixe, la puissance du frottement est $\mathcal{P} = \vec{T}\cdot\vec{v}_g = -f_d N\, v_g < 0$. L'énergie mécanique diminue ; l'énergie perdue est convertie en énergie interne des deux solides (échauffement des freins, allumette que l'on frotte, usure des surfaces). Pour un palet lancé à v_0 sur un sol horizontal, le TEC donne directement la distance d'arrêt : $0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_d mg\,d$, soit $d = \frac{v_0^2}{2f_d g}$.

IV.2 Frottements dans une liaison

Une liaison pivot réelle exerce un couple de frottement : couple « sec » de norme constante Γ_f (opposé à ω), ou couple « visqueux » $-h\omega$ (palier lubrifié). Leur puissance $-\Gamma_f|\omega|$ ou $-h\omega^2$ est négative : l'énergie mécanique d'un pendule ou d'un volant décroît. La mesure de cette décroissance permet de **mesurer un couple de frottement** (activité expérimentale du programme).

IV.3 Roulement sans glissement

Pour un objet qui roule sans glisser, la force de frottement exercée par le sol **ne travaille pas** (son point d'application a une vitesse nulle). C'est elle qui permet à une voiture d'accélérer ou de freiner sans dissiper d'énergie au contact : l'énergie de la voiture qui accélère provient du moteur (forces intérieures au véhicule), et celle d'une voiture qui freine est dissipée dans les freins, pas sur la route (sauf si les roues se bloquent).

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La force de frottement n'est pas toujours « résistante » dans un référentiel donné : sur un tapis roulant, elle fournit de l'énergie au colis. Seule la puissance **totale** des actions de contact (sur les deux solides) est toujours négative ou nulle.
- La réaction normale d'un support fixe ne travaille pas, mais celle d'un support mobile (ascenseur, plateau qui monte) peut travailler.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Palet lancé

✦✧✧✧✧

Un palet de masse $m = 0{,}20\,\mathrm{kg}$ est lancé à $v_0 = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sur une table horizontale ($f_d = 0{,}25$). Calculer la distance parcourue, l'énergie dissipée et la puissance dissipée au départ.

Correction

$d = \frac{v_0^2}{2f_d g} = 1{,}83\,\mathrm{m}$. Énergie dissipée : $\frac{1}{2}mv_0^2 = 0{,}90\,\mathrm{J}$. Puissance au départ : $f_d m g\, v_0 = 1{,}5\,\mathrm{W}$; elle décroît linéairement avec v.

EXERCICE 7 Disques de frein

✦✦✧✧✧

Une voiture de $1200\,\mathrm{kg}$ roulant à $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ freine jusqu'à l'arrêt sans bloquer ses roues. Toute l'énergie est dissipée dans quatre disques en acier de $6{,}0\,\mathrm{kg}$ chacun (capacité thermique massique $c = 460\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$). Estimer l'élévation de température des disques. Pourquoi l'énergie n'est-elle pas dissipée au contact pneu–route ?

Correction

$E_c = \frac{1}{2}\times 1200\times 25^2 = 3{,}75\times 10^5\,\mathrm{J}$. Si elle reste dans les disques : $\Delta T = \frac{E_c}{4m_d c} = \frac{3{,}75\times 10^5}{4\times 6{,}0\times 460} = 34\,\mathrm{K}$ par freinage (davantage en descente prolongée, d'où l'échauffement des freins en montagne). Les roues roulant sans glisser, la puissance des actions de contact pneu–route est nulle ; la dissipation a lieu au glissement des plaquettes sur les disques.

EXERCICE 8 **Colis posé sur un tapis horizontal** ✦✦✧✧✧

Un colis de masse m est posé sans vitesse sur un tapis horizontal qui avance à vitesse constante u ; coefficient de frottement f.

Q-1) Calculer la durée de la phase de glissement, puis les déplacements du colis et du tapis pendant cette phase.

Q-2) Calculer le travail de la force de frottement sur le colis, puis le travail total des actions de contact. Quelle énergie le moteur du tapis doit-il fournir ? Commenter.

Correction

Q-1) Le colis glisse vers l'arrière par rapport au tapis : $\vec{T}$ est dirigée vers l'avant, $m\ddot{x} = fmg$. Le glissement cesse quand $\dot{x} = u$, à $t_1 = \frac{u}{fg}$. Déplacements : colis $\frac{u^2}{2fg}$, tapis $ut_1 = \frac{u^2}{fg}$.

Q-2) Sur le colis : $W = fmg\frac{u^2}{2fg} = \frac{1}{2}mu^2 = \Delta E_c$ (travail moteur !). Sur le tapis : $-fmg\frac{u^2}{fg} = -mu^2$. Total : $W_{\text{contact}} = -\frac{1}{2}mu^2$, conforme à $\int \vec{T}\cdot\vec{v}_g\,\mathrm{d}t < 0$. Le moteur, qui maintient la vitesse du tapis, fournit mu^2 : la moitié est communiquée au colis, l'autre moitié dissipée, **quel que soit** f.

V Le pendule pesant : approche énergétique

V.1 Énergie potentielle et équilibres

Pour le pendule pesant (masse m, $a = OG$, J_Δ, liaison pivot parfaite), seul le poids travaille. Avec $z_G = -a\cos\theta$:

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta) = \text{cte}$$

L'énergie potentielle $E_p(\theta) = mga(1-\cos\theta)$ est un **puits** : minimum en $\theta = 0$ (équilibre stable), maximum $2mga$ en $\theta = \pm\pi$ (équilibre instable). Pour une énergie E_m donnée, le mouvement n'est possible que là où $E_p(\theta) \le E_m$.

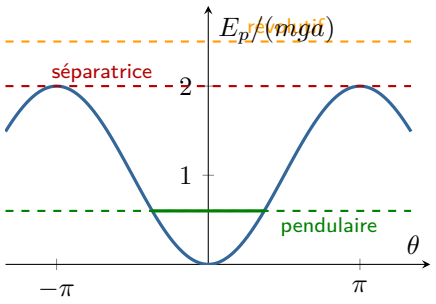


Fig. 2 : Profil d'énergie potentielle et niveaux d'énergie.

☞ Méthode — Exploiter un profil $E_p(\theta)$ M

- Équilibres : $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$; stabilité : $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} > 0$.
- Petites oscillations autour d'un équilibre stable θ_e : $E_p \approx E_p(\theta_e) + \frac{1}{2}E_p''(\theta_e)(\theta-\theta_e)^2$, et la pulsation vaut $\omega_0 = \sqrt{E_p''(\theta_e)/J_\Delta}$. Pour le pendule : $E_p''(0) = mga$, $\omega_0^2 = mga/J_\Delta$.
- Zones accessibles : $E_p(\theta) \le E_m$; points de rebroussement : $E_p(\theta) = E_m$.

V.2 Portrait de phase : mouvements pendulaire et révolutif

L'intégrale première donne $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{J_\Delta}\left(E_m - E_p(\theta)\right)}$:

- si $E_m < 2mga$, θ est confiné entre deux points de rebroussement $\pm\theta_m$ ($\cos\theta_m = 1 - \frac{E_m}{mga}$) : trajectoire de phase **fermée**, mouvement **pendulaire** périodique ;

- si $E_m > 2mga$, $\dot\theta$ garde un signe constant : mouvement **révolutif**, le pendule tourne indéfiniment dans le même sens ; la trajectoire de phase est ouverte mais périodique en θ (de période 2π) ;
- $E_m = 2mga$: **séparatrice**. Elle marque la **bifurcation** entre les deux types de mouvement, que l'on observe en TP en augmentant progressivement la vitesse initiale du pendule.

V.3 Effet des frottements

En présence d'un couple de frottement, $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_f < 0$: l'énergie diminue, la trajectoire de phase **spirale** vers le point d'équilibre stable. Un pendule lancé en mouvement révolutif finit par franchir la séparatrice et devient pendulaire.

- Frottement visqueux $-h\dot\theta$: amortissement exponentiel des petites oscillations (analogue du RLC), décrément logarithmique constant.
- Frottement sec Γ_f : sur une demi-oscillation de θ_1 à $-\theta_2$, l'énergie perdue vaut $\Gamma_f(\theta_1+\theta_2)$; aux petits angles, $\frac{1}{2}mga(\theta_1^2-\theta_2^2) = \Gamma_f(\theta_1+\theta_2)$, donc l'amplitude décroît **linéairement** de $\frac{2\Gamma_f}{mga}$ à chaque demi-période.

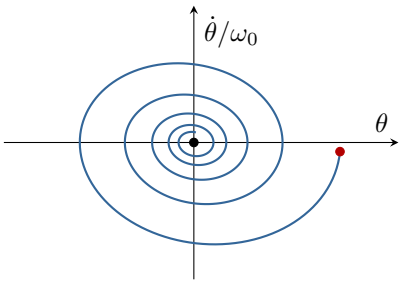


Fig. 3 : Portrait de phase amorti (frottement visqueux).

Remarque

En travaux pratiques. Un capteur angulaire relié à une carte d'acquisition donne $\theta(t)$; on calcule $\dot\theta$ numériquement et on trace $\dot\theta$ en fonction de θ. On observe la spirale, le non-isochronisme aux grandes amplitudes, et l'on calcule $E_m(t) = \frac{1}{2}J_\Delta\dot\theta^2 + mga(1-\cos\theta)$, dont la décroissance mesure le couple de frottement.

Programme Python : portrait de phase et énergie d'un pendule amorti

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

J, m, g, a = 0.12, 0.80, 9.81, 0.30        # SI
h, Gf = 2e-3, 5e-3                         # frottement visqueux, couple sec
def f(t, y):
    th, w = y
    return [w, (-m*g*a*np.sin(th) - h*w - Gf*np.tanh(w/1e-3))/J]
sol = solve_ivp(f, [0, 40], [0, 9.5], max_step=1e-3)   # lance au-dela de 2*w0
th, w = sol.y
Em = 0.5*J*w**2 + m*g*a*(1 - np.cos(th))
plt.subplot(1, 2, 1); plt.plot(th, w); plt.xlabel("theta"); plt.ylabel("dtheta/dt")
plt.subplot(1, 2, 2); plt.plot(sol.t, Em); plt.xlabel("t (s)"); plt.ylabel("Em (J)")
plt.show()
```

Le pendule, lancé avec $\dot\theta_0 = 9{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} > 2\omega_0$, fait quelques tours (révolutif, θ croît sans borne), puis franchit la séparatrice et oscille en spirale vers un équilibre stable $\theta = 2k\pi$. La fonction $\tanh(\omega/\varepsilon)$ régularise le signe du couple sec pour l'intégrateur.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 9 **Pendule par le théorème de la puissance cinétique** ✦✦✧✧✧

Retrouver l'équation du pendule pesant à partir du théorème de la puissance cinétique. Pourquoi cette méthode est-elle la plus rapide ?

Correction

$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$; puissance du poids : $\mathcal{M}_\Delta \dot{\theta} = -mga \sin\theta\, \dot{\theta}$; liaison parfaite : puissance nulle. $J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} = -mga \sin\theta\, \dot{\theta}$, puis on simplifie par $\dot{\theta}$ (non identiquement nul) : $J_\Delta \ddot{\theta} + mga \sin\theta = 0$. L'action de la liaison, inconnue, ne travaille pas : elle n'apparaît pas.

EXERCICE 10 **Pendule lancé** ✦✦✧✧✧

Un pendule pesant ($J_\Delta = 0{,}12\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, $m = 0{,}80\,\mathrm{kg}$, $a = 0{,}30\,\mathrm{m}$) est lancé depuis $\theta = 0$ avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.

Q-1) Calculer ω_0 et la valeur de $\dot{\theta}_0$ séparant les mouvements pendulaire et révolutif.

Q-2) Pour $\dot{\theta}_0 = 6{,}0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, déterminer l'amplitude des oscillations.

Correction

Q-1) $\omega_0 = \sqrt{mga/J_\Delta} = 4{,}43\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; seuil : $\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_0^2 = 2mga$, soit $\dot{\theta}_0 = 2\omega_0 = 8{,}86\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Q-2) $6{,}0 < 8{,}86$: mouvement pendulaire. $mga(1-\cos\theta_m) = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_0^2$: $1 - \cos\theta_m = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2\omega_0^2} = 0{,}917$, $\theta_m = 85°$.

VI Systèmes déformables : rôle des forces intérieures

VI.1 Tabouret d'inertie et patineuse

Une personne tourne sur un tabouret pivotant sans frottement, bras écartés (moment d'inertie J_1, vitesse ω_1), puis ramène les bras le long du corps ($J_2 < J_1$). Les actions extérieures (poids, réaction de l'axe) ont un moment nul par rapport à l'axe vertical : L_Δ est **conservé**, $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, et ω augmente. Mais

$$E_{c2} = \frac{L_\Delta^2}{2J_2} = \frac{J_1}{J_2} E_{c1} > E_{c1}.$$

L'énergie cinétique **augmente** alors qu'aucune force extérieure ne travaille : c'est le travail **positif des forces intérieures** (les muscles tirent les bras vers l'axe contre la tendance centrifuge). Inversement, en écartant les bras, la personne reçoit un travail intérieur négatif. Le même principe régit la pirouette d'une patineuse et les rotations d'un plongeur.

VI.2 Saut et marche

Lors d'un saut vertical, la réaction du sol s'applique à des pieds immobiles : elle **ne travaille pas**. Pourtant le centre de masse acquiert une vitesse : toute l'énergie provient du travail des forces intérieures (muscles). La réaction du sol est néanmoins indispensable : c'est la seule force extérieure verticale qui, par le TRC, permet à G d'accélérer vers le haut. Les deux théorèmes se complètent : le TRC dit « qui pousse », le TEC dit « qui fournit l'énergie ».

★ À retenir

Pour un système **déformable** : les forces intérieures disparaissent du TRC et du TMC, mais **pas du TEC**. Pour un **solide**, $\mathcal{P}_{\text{int}} = 0$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 11 Tabouret d'inertie

$J_1 = 5{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $\omega_1 = 1{,}5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $J_2 = 2{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Calculer ω_2 et le travail des forces intérieures.

Correction

$\omega_2 = J_1\omega_1/J_2 = 3{,}75\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. $E_{c1} = 5{,}6\,\text{J}$, $E_{c2} = 14{,}1\,\text{J}$: $W_{\text{int}} = \Delta E_c = 8{,}4\,\text{J}$, fourni par les muscles.

EXERCICE 12 Saut vertical

Un sauteur de $70\,\text{kg}$, accroupi, élève son centre de masse de $40\,\text{cm}$ en se détendant, jusqu'à quitter le sol ; son centre de masse s'élève ensuite encore de $50\,\text{cm}$.

Q-1) Calculer le travail des forces intérieures pendant l'impulsion.

Q-2) Estimer la force moyenne exercée par le sol (moyenne sur le déplacement de G).

Correction

Q-1) Vol : $\frac{1}{2}mv^2 = mg \times 0{,}50$. Impulsion : la réaction du sol ne travaille pas, $\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\text{int}} - mg \times 0{,}40$. Donc $W_{\text{int}} = mg \times 0{,}90 = 618\,\text{J}$.

Q-2) TRC vertical, puis intégration le long du déplacement de G : $(\bar{N} - mg) \times 0{,}40 = \frac{1}{2}mv^2 = mg \times 0{,}50$, d'où $\bar{N} = 2{,}25\,mg = 1{,}5\,\text{kN}$.

VII Synthèse

★ À retenir

Notion	Expression	Remarques
Puissance (translation)	$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$	dépend du référentiel
Puissance (rotation)	$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta\omega,\ \Gamma\omega$	pivot parfait : $\mathcal{P} = 0$
Forces intérieures	$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{f}_{1\to2}\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$	nulle pour un solide
Contact entre solides	$\mathcal{P} = \vec{T}\cdot\vec{v}_g \le 0$	nulle sans glissement
TPC / TEC	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$	$\mathcal{R}$ galiléen
Rotation (axe fixe)	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2\right) = \omega\sum\mathcal{M}_\Delta$	équivaut au TMC
Énergie mécanique	$\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{nc}}$	intégrale première si $\mathcal{P}_{\text{nc}} = 0$
Énergies potentielles	$mgz_G,\ \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2,\ \frac{1}{2}C\theta^2$	$-\frac{1}{2}m\Omega^2r^2$ en rotation
Pendule pesant	$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta)$	révolutif si $E_m > 2mga$

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 13 Chaîne qui glisse d'une table

★★★☆☆

Une chaîne homogène, parfaitement souple, de masse M et de longueur L, repose sur une table horizontale parfaitement lisse ; une longueur z pend verticalement par-dessus le bord, arrondi et sans frottement. On suppose que la chaîne glisse sans dissipation et que tous ses maillons ont la même vitesse $\dot{z}$. À $t = 0$, $z = z_0$ et $\dot{z} = 0$.

Q-1) Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la chaîne en fonction de z.

Q-2) En déduire $z(t)$, l'instant où la chaîne quitte la table et sa vitesse à cet instant. AN : $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $z_0 = 10\,\mathrm{cm}$.

Correction

Q-1) $E_c = \frac{1}{2}M\dot{z}^2$. La partie horizontale a une altitude constante ; la partie pendante, de masse Mz/L, a son centre de masse à $-z/2$: $E_p = -\dfrac{Mg}{2L}z^2$ (origine au niveau de la table).

Q-2) Les réactions (normales, sans frottement) ne travaillent pas, et l'on admet que les forces intérieures ne dissipent pas : $\frac{1}{2}M\dot{z}^2 - \frac{Mg}{2L}z^2 = -\frac{Mg}{2L}z_0^2$. En dérivant : $\ddot{z} = \frac{g}{L}z$, d'où $z = z_0\,\mathrm{ch}\,(t/\tau)$ avec $\tau = \sqrt{L/g} = 0{,}319\,\mathrm{s}$. La chaîne quitte la table quand $z = L$: $t_f = \tau\ \mathrm{argch}(L/z_0) = 0{,}96\,\mathrm{s}$, avec $\dot{z} = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - z_0^2)} = 3{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

EXERCICE 14 Pendule inversé et ressort de torsion

★★★☆☆

Une tige de masse m, de centre de masse G à la distance a de l'axe horizontal Δ, est maintenue **au-dessus** de l'axe par un ressort de torsion de constante C ; θ est l'angle entre $\overrightarrow{OG}$ et la verticale ascendante, et le ressort est au repos pour $\theta = 0$ (principe du métronome inversé).

Q-1) Écrire l'énergie potentielle $E_p(\theta)$.

Q-2) À quelle condition la position $\theta = 0$ est-elle stable ? Calculer alors la période des petites oscillations.

Q-3) Que se passe-t-il si cette condition n'est pas réalisée ?

Correction

Q-1) $z_G = a\cos\theta$: $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + mga\cos\theta$ (à une constante près).

Q-2) $E_p'(\theta) = C\theta - mga\sin\theta$ s'annule en 0 ; $E_p''(0) = C - mga$: stable si $C > mga$. Alors $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C - mga}}$: la gravité « assouplit » le ressort, et la période devient très grande quand $C \to mga$ (propriété utilisée dans les sismomètres pour obtenir de longues périodes).

Q-3) Si $C < mga$, $\theta = 0$ est instable ; il apparaît deux équilibres symétriques $\pm\theta_e$ tels que $C\theta_e = mga\sin\theta_e$, stables ($E_p''(\theta_e) = C - mga\cos\theta_e > 0$ car $\frac{\sin\theta_e}{\theta_e} > \cos\theta_e$) : la tige penche d'un côté ou de l'autre. C'est une bifurcation.

EXERCICE 15 Bilan énergétique d'un tapis élévateur

★★★☆☆

On reprend le colis du chapitre S2 posé sans vitesse sur un tapis incliné de α, montant à vitesse constante v_t (coefficient f, $\tan\alpha < f$). Pendant la phase de glissement, de durée $t_1 = \frac{v_t}{g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$:

Q-1) Calculer le travail du poids du colis et le travail total des actions de contact.

Q-2) En déduire, par le TEC appliqué au système {colis + tapis}, le travail fourni par le moteur. Vérifier que pour $\alpha = 0$ on retrouve mv_t^2.

Correction

Q-1) Le colis parcourt $x_1 = \frac{v_t^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$: $W_{\text{poids}} = -mg\sin\alpha\, x_1 = -\frac{1}{2}mv_t^2\frac{\sin\alpha}{f\cos\alpha - \sin\alpha}$. La vitesse de glissement $v_g = v_t - \dot{x}$ décroît linéairement de v_t à 0 : $W_{\text{contact}} = -fmg\cos\alpha\int_0^{t_1} v_g\,\mathrm{d}t = -fmg\cos\alpha\,\frac{v_t t_1}{2} = -\frac{1}{2}mv_t^2\frac{f\cos\alpha}{f\cos\alpha - \sin\alpha}$.

Q-2) Le tapis garde une vitesse constante : $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_t^2 = W_{\text{poids}} + W_{\text{contact}} + W_{\text{moteur}}$, d'où

$$W_{\text{moteur}} = \frac{1}{2}mv_t^2\left(1 + \frac{f\cos\alpha + \sin\alpha}{f\cos\alpha - \sin\alpha}\right) = mv_t^2\frac{f\cos\alpha}{f\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Pour $\alpha = 0$: $W_{\text{moteur}} = mv_t^2$, résultat de l'exercice sur le tapis horizontal.

IX Classiques des concours

EXERCICE 16 Ascenseur à contrepoids

★★★★☆

Une cabine chargée de masse $m_1 = 1000\,\text{kg}$ et un contrepoids de masse $m_2 = 800\,\text{kg}$ sont suspendus aux deux extrémités d'un câble inextensible, de masse négligeable, passant sans glisser sur une poulie motrice de rayon $R = 0{,}30\,\text{m}$ et de moment d'inertie $J = 30\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ (liaison pivot parfaite). Le moteur exerce sur la poulie un couple Γ. La cabine monte : elle accélère avec $a = 0{,}50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ jusqu'à $v = 1{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, puis monte à vitesse constante.

Q-1) Exprimer l'énergie cinétique du système {cabine + contrepoids + câble + poulie} en fonction de la vitesse v de la cabine. Définir une masse équivalente.

Q-2) Appliquer le théorème de la puissance cinétique et en déduire le couple moteur pendant chacune des deux phases.

Q-3) Calculer la puissance du moteur en régime permanent et sa valeur maximale. Comparer à la puissance nécessaire sans contrepoids.

Correction

Q-1) $E_c = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}v^2$ avec $m_{\text{eq}} = m_1 + m_2 + J/R^2 = 2133\,\text{kg}$.

Q-2) Puissances : poids, $-(m_1-m_2)gv$; couple moteur, $\Gamma\omega = \Gamma v/R$; pivot parfait et câble sans glissement : 0. TPC : $m_{\text{eq}}v\dot{v} = \frac{\Gamma}{R}v - (m_1-m_2)gv$, d'où $\Gamma = R\,[m_{\text{eq}}\dot{v} + (m_1-m_2)g]$. Accélération : $\Gamma = 0{,}30(1067 + 1962) = 909\,\text{N}\cdot\text{m}$; vitesse constante : $\Gamma = 589\,\text{N}\cdot\text{m}$.

Q-3) Régime permanent : $\mathcal{P} = (m_1-m_2)gv = 1{,}96\,\text{kW}$. Maximum à la fin de l'accélération : $\Gamma v/R = 3{,}0\,\text{kW}$. Sans contrepoids, il faudrait $m_1 gv = 9{,}8\,\text{kW}$ en régime permanent : le contrepoids, dont l'énergie potentielle diminue quand la cabine monte, économise l'essentiel de l'énergie.

EXERCICE 17 Pendule de TP : bifurcation et couple de frottement

Un pendule pesant de TP a les caractéristiques $J_\Delta = 0{,}12\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, $m = 0{,}80\,\mathrm{kg}$, $a = 0{,}30\,\mathrm{m}$.

Q-1) Calculer la période des petites oscillations.

Q-2) Le portrait de phase expérimental, enregistré pendant une dizaine d'oscillations, est une spirale très lente : l'amplitude passe de $40°$ à $30°$ en 10 oscillations, et la décroissance est linéaire. Quel type de frottement est mis en évidence ?

Q-3) En faisant un bilan d'énergie mécanique, estimer le couple de frottement Γ_f de la liaison.

Q-4) Le pendule est lancé en mouvement révolutif. Décrire l'allure du portrait de phase au cours du temps.

Correction

Q-1) $\omega_0 = \sqrt{mga/J_\Delta} = 4{,}43\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $T_0 = 1{,}42\,\mathrm{s}$ (à $40°$, la période réelle dépasse T_0 d'environ $3\,\%$).

Q-2) Une décroissance **linéaire** de l'amplitude caractérise un frottement **sec** (couple de norme constante) ; un frottement visqueux donnerait une décroissance exponentielle.

Q-3) Énergie perdue : $\Delta E_m = mga(\cos 30° - \cos 40°) = 0{,}80\times 9{,}81\times 0{,}30\times 0{,}100 = 0{,}235\,\mathrm{J}$. Angle total balayé : en une oscillation, environ $4\theta_m$ avec $\theta_m \approx 35° = 0{,}611\,\mathrm{rad}$, soit $10\times 4\times 0{,}611 = 24{,}4\,\mathrm{rad}$. Le couple sec a une puissance $-\Gamma_f\left|\dot\theta\right|$: $\Gamma_f = \frac{0{,}235}{24{,}4} = 9{,}6\times 10^{-3}\,\mathrm{N\cdot m}$. Vérification : décrément par demi-période $\frac{2\Gamma_f}{mga} = 8{,}2\times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$, soit $0{,}47°$, et $20\times 0{,}47° \approx 9{,}4° \approx 10°$.

Q-4) La trajectoire de phase ondule au-dessus de la séparatrice ($\dot\theta > 0$ toujours) en se rapprochant d'elle à chaque tour ; elle finit par la franchir, le pendule rebrousse chemin, et la trajectoire devient une spirale qui converge vers $(0,0)$.

EXERCICE 18 Énergie dans un référentiel tournant

Une perle de masse m peut glisser sans frottement sur une tige horizontale qui tourne à vitesse angulaire constante Ω autour d'un axe vertical passant par son extrémité O. La perle est reliée à O par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ; on note r sa distance à O.

Q-1) Dans le référentiel de la tige, quelles forces travaillent ? Écrire l'énergie potentielle totale $E_p(r)$.

Q-2) Discuter l'existence et la stabilité d'une position d'équilibre relatif selon la valeur de Ω. Calculer la pulsation des petites oscillations.

Q-3) L'énergie mécanique dans le référentiel terrestre est-elle conservée ? Interpréter.

Correction

Q-1) Dans le référentiel de la tige (rotation uniforme, non galiléen) : le poids et la réaction de la tige (sans frottement, perpendiculaire à la tige) ne travaillent pas ; la force de Coriolis non plus. Travaillent : le ressort et la force d'inertie d'entraînement. $E_p = \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 - \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2$.

Q-2) $E_p'(r) = k(r-\ell_0) - m\Omega^2 r = 0$ pour $r_e = \dfrac{k\ell_0}{k - m\Omega^2}$, qui n'existe ($r_e > 0$) que si $\Omega < \sqrt{k/m}$; $E_p'' = k - m\Omega^2 > 0$: stable. Pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2}$. Si $\Omega \geq \sqrt{k/m}$, la perle s'éloigne indéfiniment.

Q-3) Non : dans le référentiel terrestre, la réaction de la tige a une composante orthoradiale qui travaille (c'est le moteur qui entraîne la tige qui fournit ou reçoit de l'énergie). L'intégrale première $E_c' + E_p = \text{cte}$ n'existe que dans le référentiel de la tige.