LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

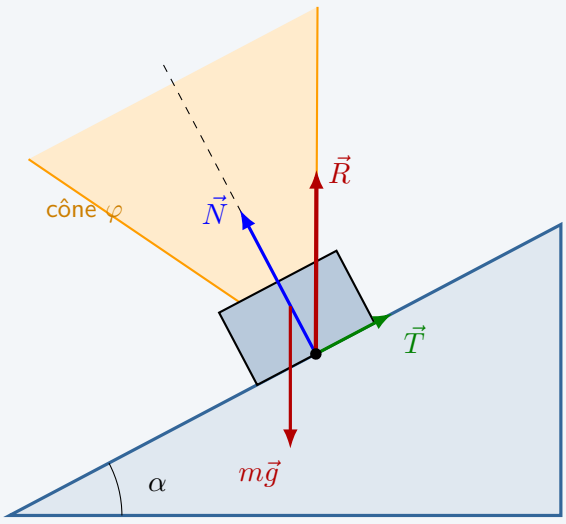
FICHE RÉSUMÉ

S2

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Dynamique du solide, lois de Coulomb du frottement

Forces intérieures et extérieures — Moment d'une force, couple, liaison pivot — Théorème de la résultante cinétique — Lois de Coulomb du frottement de glissement — Théorème scalaire du moment cinétique — Pendule pesant



équilibre tant que $\tan\alpha \leq f_s$

> *L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires.*
>
> — Isaac Newton, *Principia*, loi III (1687), trad. Émilie du Châtelet (1759)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Roulement sur un plan incliné »

S2 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Le centre de masse d'un système fermé se meut comme un point de masse m soumis aux seules forces extérieures ($m\vec{a}_G = \vec{F}_{\text{ext}}$), et un solide en rotation autour d'un axe fixe obéit à $J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta$: les forces intérieures disparaissent de ces deux bilans. Le frottement de glissement suit les lois de Coulomb : $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s N$ sans glissement, $\left\|\vec{T}\right\| = f_d N$ opposée à $\vec{v}_g$ en glissement ; on fait une hypothèse, on résout, on valide. Le pendule pesant, $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\omega_0^2 = mga/J_\Delta$, est harmonique aux petits angles et non isochrone aux grands.

I Actions mécaniques

Définition — Forces, moments, couples, liaisons R

- Forces **intérieures** : résultante nulle et moment total nul (3e loi de Newton, forces portées par M_iM_j) ; leur puissance n'est pas nulle en général.
- Moment par rapport à un axe orienté : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \pm Fd$ (d : **bras de levier**) ; nul si la droite d'action rencontre l'axe ou lui est parallèle.
- Poids : équivalent à $m\vec{g}$ appliqué en G : $\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}$.
- **Couple** : résultante nulle, moment $\vec{\Gamma}$ indépendant du point ; exemples : moteur, $-C\theta$ (torsion), $\vec{p} \wedge \vec{E}$ (dipôle).
- Liaison pivot **parfaite** : $\mathcal{M}_{\Delta,\text{liaison}} = 0$, mais résultante quelconque et moment perpendiculaire à Δ possibles (pas réductible à une force unique passant par l'axe en général).
- Référentiel non galiléen : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ (translation), $m\Omega^2\overrightarrow{HM}$ (rotation uniforme), Coriolis $-2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}'$.

II Théorèmes généraux

TRC et TMC R D

Dans un référentiel galiléen, pour un système fermé :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (O \text{ fixe})$$

Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ :

$$J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Système isolé ou pseudo-isolé : $\vec{p}$ conservé, G rectiligne uniforme. $\sum \mathcal{M}_\Delta = 0$: $L_\Delta = J_\Delta\omega$ conservé.

★ À retenir

	Translation	Rotation (axe fixe)
Inertie	m	J_Δ
Cause	force F	moment $\mathcal{M}_\Delta$, couple Γ
Loi	$m\ddot{x} = \sum F_x$	$J_\Delta\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta$
Conservation	$p = m\dot{x}$	$L_\Delta = J_\Delta\dot{\theta}$
Rappel élastique	$-kx$	$-C\theta$

III Lois de Coulomb du frottement de glissement

Lois de Coulomb (solide en translation) R

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ exercée par le support :

- contact : $N \geq 0$ (rupture si $N = 0$) ;
- non-glissement, $\vec{v}_g = \vec{0}$: $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s N$ ($\vec{T}$ inconnue) ;
- glissement : $\left\|\vec{T}\right\| = f_d N$, $\vec{T}$ colinéaire et opposée à $\vec{v}_g$.

Cône de frottement de demi-angle φ, $\tan\varphi = f$: $\vec{R}$ dedans (adhérence) ou sur le bord (glissement). $f_d \leq f_s$, souvent $f_s = f_d = f$; indépendants de l'aire apparente et de la vitesse.

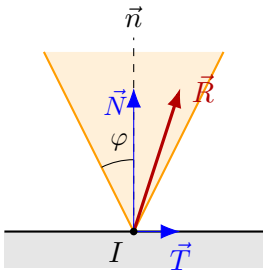


Fig. 1 : Cône de frottement.

Situation	Hypothèse et résultat	Condition de validité
Équilibre sur un plan incliné	$N = mg\cos\alpha$, $T = mg\sin\alpha$	$\tan\alpha \leq f_s$ (mesure de f_s)
Mise en mouvement (traction F)	immobile, $T = F$	$F \leq f_s mg$, sinon $T = f_d mg$
Freinage roues bloquées	$\ddot{x} = -f_d g$, $d = \dfrac{v_0^2}{2f_d g}$	glissement maintenu jusqu'à l'arrêt
Caisse sur camion (a)	$T = ma$ dans $\mathcal{R}'$	$a \leq f_s g$
Pièce sur plateau (ω)	$T = m\omega^2 r$ dans $\mathcal{R}'$	$\omega \leq \sqrt{f_s g/r}$

Activité numérique : palet relié à un ressort sur un tapis (collé-glissé) ; on bascule entre adhérence ($v = u$, test $k|x| > f_s mg$) et glissement ($T = f_d mg$, test d'annulation de $v - u$). Le phénomène disparaît si $f_s = f_d$.

IV Pendule pesant

Pendule pesant R D

TMC ($a = OG$, pivot parfait) :

$$J_\Delta \ddot{\theta} + mga \sin\theta = 0$$

Intégrale première : $\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = E$.
Petites oscillations : $T_0 = 2\pi\sqrt{J_\Delta/(mga)}$; longueur équivalente $J_\Delta/(ma)$.
Borda : $T \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\right)$; $T \to \infty$ si $\theta_m \to \pi$.
Révolutif si $E > mga$, soit $\dot{\theta}_0 > 2\omega_0$ depuis $\theta = 0$.

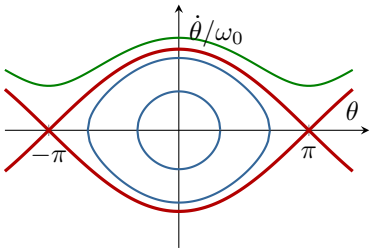


Fig. 2 : Portrait de phase.

Analogies : $J_\Delta\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mga\theta = 0 \leftrightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$; pendule de torsion $J\ddot{\theta} = -C\theta \leftrightarrow$ masse-ressort.
Activité numérique : intégrer $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$ (`solve_ivp`) et repérer les annulations de $\dot{\theta}$ pour tracer $T(\theta_m)$.

Ordres de grandeur

Coefficients de frottement : pneu/route sèche $0{,}7$ à 1 ; mouillée $0{,}4$ à $0{,}6$; bois/bois $0{,}3$ à $0{,}5$; acier/acier $0{,}2$; verglas $0{,}05$. Freinage à $108\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$: $60\,\mathrm{m}$ (sec), $100\,\mathrm{m}$ (mouillé). Tige de $1\,\mathrm{m}$ en pendule : $T_0 \approx 1{,}6\,\mathrm{s}$; écart de période $0{,}8\,\%$ à $20°$, $18\,\%$ à $90°$.

V Méthodes et pièges

☞ Méthode — Problème avec frottement solide M

1. Hypothèse : non-glissement, ou glissement dans un sens donné.
2. Résolution : TRC (et TMC si nécessaire) avec la loi de Coulomb correspondante.
3. Validation : $N \geq 0$; $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s N$ (adhérence) ou $\vec{T}\cdot\vec{v}_g < 0$ (glissement).
4. Contradiction : changer d'hypothèse ; repérer les instants de changement de régime ($v_g \to 0$, $\left\|\vec{T}\right\| \to f_s N$).

☞ Méthode — Solides liés (treuil, poulie, Atwood) M

TRC pour chaque masse en translation, TMC pour chaque solide en rotation, puis relation de non-glissement du fil ($\ddot{x} = R\ddot{\theta}$). Exemple : treuil, $\ddot{x} = \dfrac{g}{1 + J/(mR^2)}$; Atwood, $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + J/R^2}$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s N$ est une **inégalité** : sans glissement, $\vec{T}$ est imposée par l'équilibre, pas égale à $f_s N$.
- $\vec{T}$ s'oppose à $\vec{v}_g$, pas à $\vec{v}$: un tapis roulant entraîne le colis vers l'avant. Le signe de T change avec celui de $\dot{x}$ (oscillateur à frottement sec : amplitude décroissant linéairement de $2fmg/k$ par demi-période).

- $N \neq mg$ dès qu'une autre force a une composante normale (traction inclinée, plan incliné).
- Une liaison pivot parfaite a un moment nul par rapport à l'axe, mais n'est pas une force nulle.
- Le TMC scalaire n'est valable que pour un axe **fixe** dans un référentiel **galiléen**.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais calculer un moment par rapport à un axe avec le bras de levier et reconnaître un couple.
- ☐ Je sais démontrer et appliquer le TRC, et exploiter la conservation de $\vec{p}$.
- ☐ J'énonce les lois de Coulomb et je sais traiter équilibre, mise en mouvement et freinage par hypothèse–validation.
- ☐ Je sais traiter un exemple dans un référentiel non galiléen (camion, plateau tournant).
- ☐ Je sais programmer une situation de collé-glissé.
- ☐ Je sais établir l'équation du pendule pesant, son intégrale première, sa période, et tracer son portrait de phase.
- ☐ Je sais mettre en évidence numériquement le non-isochronisme.