LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

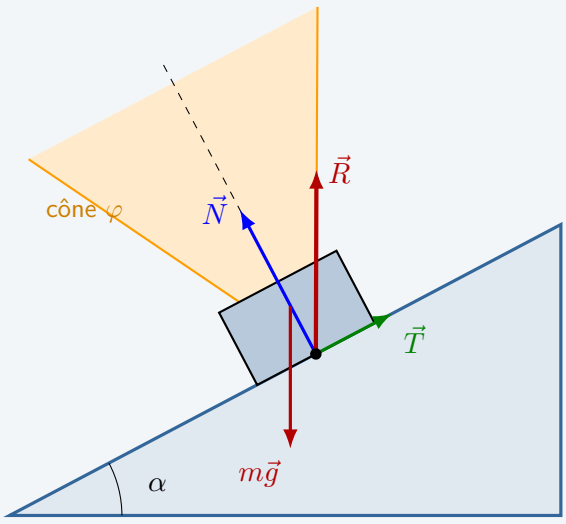
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

S2

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Dynamique du solide, lois de Coulomb du frottement

Forces intérieures et extérieures — Moment d'une force, couple, liaison pivot — Théorème de la résultante cinétique — Lois de Coulomb du frottement de glissement — Théorème scalaire du moment cinétique — Pendule pesant



équilibre tant que $\tan\alpha \leq f_s$

> *L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires.*
>
> — Isaac Newton, *Principia*, loi III (1687), trad. Émilie du Châtelet (1759)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Roulement sur un plan incliné »

S2 — Dynamique du solide

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Distinguer forces intérieures et extérieures ; calculer un moment par le bras de levier ; définir un couple et une liaison pivot parfaite.
- Établir et appliquer le théorème de la résultante cinétique (y compris en référentiel non galiléen) et la conservation de la quantité de mouvement.
- Exploiter les lois de Coulomb (équilibre, mise en mouvement, freinage) en formulant puis en validant une hypothèse ; simuler un changement de mode de glissement.
- Établir et appliquer le théorème scalaire du moment cinétique à un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Étudier le pendule pesant : équation, intégrale première, analogies, portrait de phase, non-isochronisme.

Comment lire ce cours

Étiquettes : R à connaître ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Roulement sur un plan incliné » permet de faire varier l'inclinaison du plan et le coefficient de frottement : le solide reste en équilibre tant que $\tan\alpha \leq f_s$, puis glisse. Exercices d'application corrigés après chaque notion ; approfondissements et classiques des concours, corrigés, en fin de chapitre. Le programme se limite aux solides **en translation** et **en rotation autour d'un axe fixe** ; les lois de Coulomb ne sont appliquées qu'à des solides en translation.

Table des matières

I Actions mécaniques sur un système . . . 4
I.1 Forces intérieures et extérieures . . . 4
I.2 Moment d'une force ; bras de levier . . . 4
I.3 Couple . . . 5
I.4 Liaison pivot . . . 5
I.5 Rappel : forces d'inertie . . . 5
II Théorème de la résultante cinétique . . . 6
II.1 Énoncé . . . 6
II.2 Conservation de la quantité de mouvement . . . 6
III Frottement de glissement : lois de Coulomb . . . 8
III.1 Aspects microscopiques du contact . . . 8
III.2 Énoncé des lois de Coulomb . . . 8
III.3 Méthode de résolution . . . 9
III.4 Les trois situations types . . . 9
III.5 Exemple dans un référentiel non galiléen . . . 10
III.6 Activité numérique : changement de mode de glissement . . . 10
IV Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe . . . 12
IV.1 Théorème du moment cinétique . . . 12
V Le pendule pesant . . . 13
V.1 Équation du mouvement . . . 13
V.2 Intégrale première du mouvement . . . 14
V.3 Petites oscillations ; analogies . . . 14
V.4 Portrait de phase . . . 14
V.5 Non-isochronisme des grandes oscillations . . . 15
VI Synthèse . . . 16

VII Exercices d'approfondissement 16
VIII Classiques des concours 17

I Actions mécaniques sur un système

I.1 Forces intérieures et extérieures

Définition — Forces intérieures et extérieures R

Pour un système Σ donné, une force est **intérieure** si elle est exercée par une partie de Σ sur une autre partie de Σ, **extérieure** si elle est exercée par un objet extérieur à Σ. Ce classement dépend du système choisi : la tension d'un fil entre deux wagons est intérieure au train, extérieure au wagon arrière. On dit indifféremment « forces », « actions » ou « efforts ».

Bilan des forces intérieures R D

D'après la troisième loi de Newton, $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$, et ces forces sont portées par la droite (M_iM_j). Par conséquent :

$$\sum_{i,j} \vec{f}_{j\to i} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i,j} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i} = \vec{0}$$

Démonstration : on regroupe les forces par paires ; pour une paire, $\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{f}_{i\to j} = \overrightarrow{M_jM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i} = \vec{0}$ par colinéarité.

✗ Attention, erreurs fréquentes

La **puissance** des forces intérieures, elle, n'est pas nulle en général (muscles d'un sauteur, ressort qui se détend) : elle sera étudiée au chapitre S3.

I.2 Moment d'une force ; bras de levier

Définition — Moment par rapport à un point et à un axe R

Le moment en A d'une force $\vec{F}$ appliquée en P est $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$. Son moment par rapport à l'axe Δ passant par A et orienté par $\vec{u}_\Delta$ est le scalaire

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_\Delta = \pm F_\perp\, d$$

indépendant de $A \in \Delta$. Pour une force contenue dans un plan perpendiculaire à Δ : $\mathcal{M}_\Delta = \pm Fd$, où d est le **bras de levier** (distance de l'axe à la droite d'action), avec le signe $+$ si $\vec{F}$ tend à faire tourner dans le sens direct autour de $\vec{u}_\Delta$.

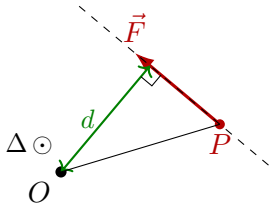


Fig. 1 : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = +Fd$.

Une force dont la droite d'action **rencontre l'axe** ou lui est **parallèle** a un moment nul par rapport à cet axe. Pour une force répartie (poids, réaction d'un support étendu), on somme les moments élémentaires.

Moment du poids R D

Dans un champ de pesanteur uniforme, $\vec{\mathcal{M}}_A(\text{poids}) = \displaystyle\int_\Sigma \overrightarrow{AM} \wedge \vec{g}\,\mathrm{d}m = \left(\int_\Sigma \overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}m\right) \wedge \vec{g} = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}$.

Le poids d'un système équivaut à une force unique $m\vec{g}$ appliquée en G (d'où le nom de centre de gravité).

I.3 Couple

Définition — Couple R

Un **couple** est un ensemble d'actions de résultante nulle et de moment non nul. Son moment $\vec{\Gamma}$ est alors **le même en tout point** : $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \vec{\mathcal{M}}_A$ puisque $\vec{R} = \vec{0}$. Exemple : deux forces opposées $\vec{F}$ et $-\vec{F}$, de droites d'action parallèles distantes de d, forment un couple de moment $\Gamma = Fd$.

Exemples : action d'un moteur sur son arbre, d'un tournevis, d'un volant de voiture tenu à deux mains ; couple de rappel $\Gamma = -C\theta$ d'un fil de torsion ; action d'un champ électrique uniforme sur un dipôle rigide ($\vec{F} = q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$).

I.4 Liaison pivot

Une **liaison pivot** d'axe Δ entre un solide et un support n'autorise que la rotation autour de Δ (gonds d'une porte, roue sur son axe, roulements d'un arbre).

Définition — Liaison pivot parfaite R

Une liaison pivot est **parfaite** si le moment de ses actions par rapport à l'axe est nul : $\mathcal{M}_{\Delta,\text{liaison}} = 0$. Elle peut néanmoins exercer une résultante quelconque et un moment perpendiculaire à Δ.

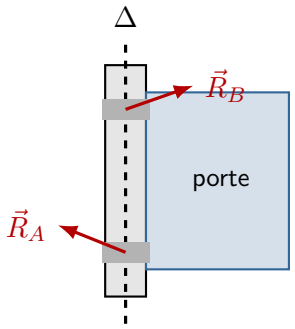


Fig. 2 : Deux gonds sans frottement.

Justification. Réalisons la liaison par deux paliers (gonds) A et B sur l'axe. Sans frottement, chacun exerce une force dont la droite d'action rencontre l'axe : $\mathcal{M}_\Delta = 0$. Mais le moment en A de l'ensemble vaut $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B$, perpendiculaire à Δ et non nul en général : c'est lui qui empêche la porte de basculer. Ces actions ne se réduisent donc pas, en général, à une seule force passant par l'axe. En présence de frottements (paliers secs, graisse), la liaison exerce un **couple de frottement** $\mathcal{M}_\Delta \neq 0$, qui s'oppose à la rotation.

I.5 Rappel : forces d'inertie

Dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen, on ajoute aux forces extérieures les forces d'inertie (MPSI, chapitre M8). Pour un solide de masse m :

- $\mathcal{R}'$ en **translation** d'accélération $\vec{a}_e$ par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$, appliquée en G ; pas de force de Coriolis ;
- $\mathcal{R}'$ en **rotation uniforme** $\vec{\Omega}$ autour d'un axe fixe : force d'inertie d'entraînement $m\Omega^2\overrightarrow{HM}$ (axifuge), et force de Coriolis $-2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}'$, nulle si le système est immobile dans $\mathcal{R}'$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 **Moment du poids d'une tige** ✦✧✧✧✧

Une tige homogène de masse $m = 0{,}60\,\text{kg}$ et de longueur $L = 0{,}80\,\text{m}$ est mobile autour d'un axe horizontal Δ passant par son extrémité O. Elle fait l'angle θ avec la verticale descendante ; Δ est orienté pour que θ croisse dans le sens direct.

Q-1) Exprimer $\mathcal{M}_\Delta$ du poids par le bras de levier. AN pour $\theta = 40°$.

Q-2) Pour quelles valeurs de θ ce moment est-il nul ? Interpréter.

EXERCICE 2 **Dipôle dans un champ uniforme** ✦✦✧✧✧

Une molécule d'eau, de moment dipolaire $p = 6{,}2 \times 10^{-30}\,\text{C}\cdot\text{m}$, est placée dans un champ électrique uniforme $E = 1{,}0 \times 10^{5}\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. Montrer que les actions du champ forment un couple et calculer son moment maximal. Quelles sont les positions d'équilibre ?

II Théorème de la résultante cinétique

II.1 Énoncé

Théorème de la résultante cinétique (TRC) R D

Pour un système fermé Σ de masse m, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = m\,\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où $\vec{F}_{\text{ext}}$ est la résultante des seules forces extérieures.

Démonstration. On écrit la deuxième loi de Newton pour chaque point : $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_{\text{ext}\to i} + \sum_j \vec{f}_{j\to i}$. On somme sur i : la somme des forces intérieures est nulle, et $\sum_i m_i\vec{a}_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i\vec{v}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}(G)$ car m est constante. □

Le centre de masse se déplace **comme un point matériel** de masse m soumis à la résultante des forces extérieures : c'est ce qui justifiait le modèle du point matériel en MPSI. Pour un solide en translation, le TRC suffit à décrire tout le mouvement. Dans un référentiel non galiléen, on ajoute les résultantes des forces d'inertie.

II.2 Conservation de la quantité de mouvement

Système isolé ou pseudo-isolé R

Si $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ (système isolé ou pseudo-isolé) dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement est conservée : $\vec{p} = m\vec{v}_G = \overrightarrow{\text{cte}}$, et G est en mouvement rectiligne uniforme. Le référentiel barycentrique est alors galiléen.

Applications : recul d'une arme, deux patineurs qui se repoussent, propulsion par réaction, éclatement d'un obus (le centre de masse des fragments poursuit la parabole tant qu'aucun ne touche le sol). Les forces intérieures, si intenses soient-elles, ne peuvent pas déplacer G.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Deux patineurs

Deux patineurs, immobiles sur une glace sans frottement, de masses $m_1 = 55\,\mathrm{kg}$ et $m_2 = 75\,\mathrm{kg}$, se repoussent. Le premier part à $2{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Quelle est la vitesse du second ? Que fait le centre de masse ?

EXERCICE 4 Éclatement d'un obus

Un obus de masse m est tiré depuis l'origine avec une vitesse initiale de $200\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ inclinée à $45°$. Au sommet de sa trajectoire, il éclate en deux fragments de même masse ; juste après l'éclatement, l'un des fragments a une vitesse nulle et retombe donc à la verticale du point d'éclatement. On néglige l'air ($g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$). Où tombe l'autre ?

EXERCICE 5 Plaque suspendue à deux fils

On reprend la plaque de masse m suspendue à deux fils parallèles de longueur ℓ (chapitre S1) : elle est en translation circulaire, et G décrit un arc de cercle de rayon ℓ.

Q-1) Appliquer le TRC et établir l'équation du mouvement en θ.

Q-2) Exprimer la somme des tensions des fils lorsque la plaque, lâchée sans vitesse de θ_0, passe en $\theta = 0$.

III Frottement de glissement : lois de Coulomb

III.1 Aspects microscopiques du contact

À l'échelle mésoscopique, deux surfaces apparemment lisses sont **rugueuses** : elles ne se touchent qu'au sommet de leurs aspérités. L'aire réelle de contact est une infime fraction de l'aire apparente, et elle est proportionnelle à la force pressante (les aspérités s'écrasent). Aux points de contact s'exercent des interactions microscopiques de nature **électromagnétique**, difficiles à modéliser, qui s'opposent à l'interpénétration des solides (répulsion) et à leur glissement relatif (adhésion, cisaillement des micro-soudures). Les lois de Coulomb sont des lois **phénoménologiques** qui résument ce comportement à l'échelle macroscopique : elles ont été établies expérimentalement par Léonard de Vinci, Amontons (1699) puis Coulomb (1781).

III.2 Énoncé des lois de Coulomb

On considère un solide S_1 en translation, en contact (ponctuel ou modélisable comme tel) avec un support S_2, au point I, de normale $\vec{n}$ orientée de S_2 vers S_1. L'action de contact de S_2 sur S_1 se décompose en

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}, \qquad \vec{N} = N\,\vec{n} \text{ (réaction normale)}, \qquad \vec{T} \in \Pi \text{ (force de frottement)}.$$

Lois de Coulomb du frottement de glissement R

- **Contact** : $N \geq 0$; le contact cesse si la condition $N > 0$ cesse d'être réalisable ($N = 0$).
- **Non-glissement** ($\vec{v}_g = \vec{0}$) : la direction de $\vec{T}$ est a priori inconnue et

$$\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s\, N$$

- **Glissement** ($\vec{v}_g \neq \vec{0}$) : $\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{v}_g(S_1/S_2)$, de sens opposé, et

$$\left\|\vec{T}\right\| = f_d\, N \qquad \vec{T}\cdot\vec{v}_g < 0$$

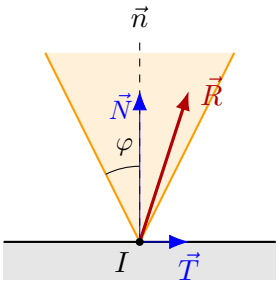


Fig. 3 : Cône de frottement, $\tan\varphi = f$.

f_s (coefficient de frottement **statique**, ou d'adhérence) et f_d (coefficient **dynamique**) sont sans dimension ; ils dépendent de la nature et de l'état des surfaces, mais en première approximation **ni de l'aire apparente de contact, ni de la vitesse de glissement**. En général $f_d \leq f_s$; on prend souvent $f_s = f_d = f$.

Définition — Cône de frottement R

On pose $\tan\varphi = f$. Sans glissement, $\vec{R}$ est **à l'intérieur** du cône de sommet I, d'axe $\vec{n}$ et de demi-angle φ_s ; en glissement, $\vec{R}$ est **sur le bord** du cône (demi-angle φ_d), inclinée vers l'arrière du mouvement relatif.

Ordres de grandeur

Matériaux	f_s	f_d
Pneu sur route sèche	0,8 à 1	0,7
Pneu sur route mouillée	0,5 à 0,6	0,4
Bois sur bois	0,4 à 0,6	0,3
Acier sur acier (sec)	0,2	0,15
Pneu sur verglas, acier sur glace	0,02 à 0,1	
Téflon sur téflon	0,04	0,04

III.3 Méthode de résolution

☞ Méthode — Résoudre un problème avec frottement solide M

1. **Formuler une hypothèse** sur l'état du contact : non-glissement, ou glissement dans un sens donné.
2. **Résoudre** avec la loi correspondante : si $\vec{v}_g = \vec{0}$, les inconnues sont N et $\vec{T}$; si glissement, $\left\|\vec{T}\right\| = f_d N$ et l'inconnue est le mouvement.
3. **Valider** : vérifier $N \geq 0$ et, selon le cas, $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s N$ ou le sens de $\vec{v}_g$ (opposé à $\vec{T}$) sur toute la durée étudiée.
4. En cas de contradiction, **changer d'hypothèse**. Repérer les instants où le régime peut changer : arrêt du glissement ($\vec{v}_g$ s'annule), début du glissement ($\left\|\vec{T}\right\|$ atteint $f_s N$).

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_s N$ est une **inégalité** : en l'absence de glissement, $\vec{T}$ prend la valeur imposée par les autres forces. Écrire $T = f_s N$ sans glissement est une erreur classique.
- $\vec{T}$ s'oppose à la vitesse de glissement, **pas** forcément à la vitesse du solide dans $\mathcal{R}$: un colis posé sur un tapis roulant est entraîné *vers l'avant* par le frottement.
- N n'est pas toujours égal à mg : on le calcule par le TRC (plan incliné, force de traction inclinée, virage relevé…).

III.4 Les trois situations types

Équilibre sur un plan incliné. Un solide de masse m est posé sur un plan d'inclinaison α. Hypothèse : il reste immobile. TRC : $N = mg\cos\alpha$ et $T = mg\sin\alpha$ (vers le haut de la pente). L'hypothèse est valide si $mg\sin\alpha \leq f_s mg\cos\alpha$:

$$\tan\alpha \leq f_s \iff \alpha \leq \varphi_s$$

indépendamment de la masse. On mesure ainsi f_s en inclinant progressivement le plan. Si $\alpha > \varphi_s$, le solide glisse avec $\ddot{x} = g(\sin\alpha - f_d\cos\alpha)$.

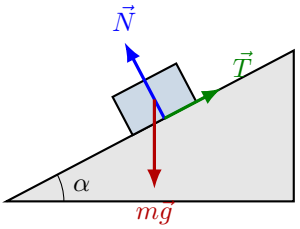


Fig. 4 : Solide au repos sur un plan incliné.

Mise en mouvement. Un palet posé sur un sol horizontal est tiré par une force horizontale F croissante. Tant que $F \leq f_s mg$, il reste immobile et $T = F$: la force de frottement « s'adapte ». Dès que F dépasse $f_s mg$, il glisse et T chute à $f_d mg$: c'est pourquoi on doit pousser plus fort une armoire pour la démarrer que

pour l'entretenir en mouvement.

Freinage. Une voiture roulant à v_0 bloque ses roues : elles glissent sur la route et le TRC donne $m\ddot{x} = -f_d mg$. La distance d'arrêt est

$$d = \frac{v_0^2}{2 f_d g}$$

Avec un système ABS, les roues roulent sans glisser à la limite de l'adhérence : la décélération maximale vaut alors $f_s g > f_d g$, et le conducteur garde le contrôle de la direction.

III.5 Exemple dans un référentiel non galiléen

Une caisse de masse m est posée sur le plateau horizontal d'un camion qui démarre avec une accélération $\vec{a} = a\,\vec{u}_x$ constante. Dans le référentiel du camion (en translation, non galiléen), on ajoute la force d'inertie $-ma\,\vec{u}_x$. Hypothèse de non-glissement : TRC dans $\mathcal{R}'$, $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} - ma\vec{u}_x$, d'où $N = mg$ et $T = ma$ (vers l'avant). Validation : $ma \leq f_s mg$, soit

$$a \leq f_s g$$

Sinon, la caisse glisse vers l'arrière du plateau, avec l'accélération relative $\ddot{x}' = -(a - f_d g)$; dans le référentiel terrestre, elle avance avec l'accélération $f_d g < a$.

III.6 Activité numérique : changement de mode de glissement

Un palet de masse m, relié à un mur fixe par un ressort de raideur k (abscisse x comptée depuis la position où le ressort est au repos), est posé sur un tapis qui avance à vitesse constante u. Le palet est d'abord entraîné par le tapis (adhérence, $\dot{x} = u$, $T = kx$) jusqu'à ce que kx atteigne $f_s mg$; il glisse alors ($T = f_d mg$, opposée à $\dot{x} - u$), revient en arrière, puis peut de nouveau adhérer : c'est le **collé-glissé** (*stick-slip*), responsable du grincement d'une porte, du chant d'un verre frotté ou du son d'un violon.

Programme Python : collé-glissé d'un palet sur un tapis

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m, k, g = 0.20, 20.0, 9.81          # kg, N/m, m/s^2
fs, fd, u = 0.60, 0.40, 0.10        # coefficients, vitesse du tapis (m/s)
dt, n = 1e-4, 60000
x, v, colle = 0.0, u, True          # depart : palet entraine par le tapis
X, V = [], []
for i in range(n):
    if colle:                       # adherence : v = u et T = k x
        v = u
        if abs(k*x) > fs*m*g:       # T devrait depasser fs N : il glisse
            colle = False
    else:                           # glissement : T = fd m g, opposee a v - u
        a = (-k*x + fd*m*g*np.sign(u - v))/m
        v_new = v + a*dt
        if (v - u)*(v_new - u) <= 0 and abs(k*x) <= fs*m*g:
            colle, v_new = True, u  # vg s'annule et l'adherence est possible
        v = v_new
    x += v*dt
    X.append(x); V.append(v)
t = np.arange(n)*dt
plt.plot(t, X); plt.xlabel("t (s)"); plt.ylabel("x (m)"); plt.show()
```

On observe une alternance de rampes (x croît à la vitesse u, phase collée) et de retours rapides (phases glissées) : ce sont des **oscillations de relaxation**. Si l'on prend $f_s = f_d$, le palet quitte l'adhérence pour ne plus jamais y revenir et oscille sinusoïdalement autour de $x = f_d mg/k$: la différence $f_s - f_d$ est essentielle.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Mesure des coefficients de frottement ✦✧✧✧✧

On incline progressivement une planche portant un bloc de bois. Le bloc se met à glisser pour $\alpha_1 = 25°$. Une fois lancé, il descend à vitesse constante lorsqu'on ramène l'inclinaison à $\alpha_2 = 18°$. Déterminer f_s et f_d.

EXERCICE 7 Distance de freinage ✦✧✧✧✧

Comparer les distances de freinage, roues bloquées, d'une voiture roulant à $108\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ sur route sèche ($f_d = 0{,}75$) et sur route mouillée ($f_d = 0{,}45$). Ajouter la distance parcourue pendant un temps de réaction de $1{,}0\,\mathrm{s}$.

EXERCICE 8 Tirer une caisse avec une corde inclinée ✦✦✧✧✧

On tire une caisse de masse m posée sur un sol horizontal (coefficient f) avec une corde faisant l'angle β au-dessus de l'horizontale. Quelle force minimale F faut-il exercer pour la mettre en mouvement ? Pour quel angle est-elle la plus faible ?

EXERCICE 9 Pièce sur un plateau tournant ✦✦✧✧✧

Une pièce est posée à la distance $r = 15\,\mathrm{cm}$ de l'axe d'un plateau horizontal qui tourne à vitesse angulaire constante ; $f_s = 0{,}40$. Jusqu'à quelle vitesse de rotation reste-t-elle immobile sur le plateau ?

IV Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

IV.1 Théorème du moment cinétique

TMC en un point fixe pour un système R D

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, pour un point O fixe dans $\mathcal{R}$ et un système fermé :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Démonstration. Pour chaque point, le TMC (MPSI) donne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}_i\right) = \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{\text{ext}\to i} + \sum_j \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f}_{j\to i}$. En sommant, le moment total des forces intérieures est nul (partie I). □

TMC scalaire pour un solide en rotation autour d'un axe fixe R D

Pour un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel galiléen, de moment d'inertie J_Δ :

$$J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Démonstration : on projette le théorème précédent sur $\vec{u}_\Delta$ (fixe), avec $O \in \Delta$, et $L_\Delta = J_\Delta\omega$ où J_Δ est constant pour un solide.

C'est l'équivalent en rotation de $m\dot{v} = F$: J_Δ joue le rôle de la masse, le moment celui de la force. Si la somme des moments extérieurs par rapport à Δ est nulle, $L_\Delta = J_\Delta\omega$ est conservé : le solide tourne à vitesse angulaire constante. Un solide immobile vérifie $\sum \mathcal{M}_\Delta = 0$ pour **tout** axe fixe, ce qui fournit les équations d'équilibre (avec $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$).

★ À retenir

	Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
Paramètre	position x	angle θ
Inertie	m	J_Δ
Cause	force F	moment $\mathcal{M}_\Delta$ (couple Γ)
Loi d'évolution	$m\ddot{x} = \sum F_x$	$J_\Delta\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta$
Grandeur conservée si cause nulle	$p = m\dot{x}$	$L_\Delta = J_\Delta\dot{\theta}$
Rappel élastique	$-kx$ (ressort)	$-C\theta$ (fil de torsion)

☞ Méthode — Mettre en équation un solide en rotation M

1. Définir le solide, le référentiel (galiléen), l'axe et son orientation, le paramètre angulaire θ.
2. Faire le bilan des actions extérieures et calculer leurs moments par rapport à Δ (bras de levier) : poids (en G), liaison pivot (moment nul si parfaite, $-h\dot{\theta}$ ou couple de frottement sinon), fils, couples moteurs.
3. Écrire $J_\Delta\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta$. Si plusieurs solides sont liés (fil, engrenage), écrire le TRC ou le TMC pour

chacun et la relation cinématique de liaison (non-glissement du fil).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 10 Volant freiné ✦✧✧✧✧

Un volant de moment d'inertie $J = 1{,}5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ tourne à $900\,\mathrm{tr/min}$. On le soumet à un couple de freinage constant $\Gamma = 4{,}0\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. Calculer la durée du freinage et le nombre de tours effectués avant l'arrêt.

EXERCICE 11 Treuil ✦✦✧✧✧

Une charge de masse $m = 10\,\mathrm{kg}$ pend au bout d'un câble inextensible, de masse négligeable, enroulé sur un tambour de rayon $R = 10\,\mathrm{cm}$ et de moment d'inertie $J = 0{,}050\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, monté sur une liaison pivot parfaite d'axe horizontal. Le câble ne glisse pas sur le tambour. On lâche le système.

Q-1) Établir l'accélération de la charge et la tension du câble.

Q-2) AN. Commenter les cas limites.

EXERCICE 12 Machine d'Atwood à poulie pesante ✦✦✧✧✧

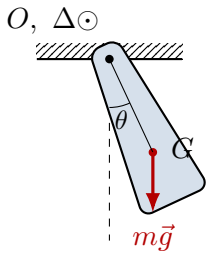
Deux masses $m_1 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ et $m_2 = 1{,}2\,\mathrm{kg}$ sont reliées par un fil inextensible passant sur une poulie de rayon R et de moment d'inertie J, sans glissement du fil. Montrer que $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + J/R^2}$. On mesure $a = 0{,}70\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ avec $R = 5{,}0\,\mathrm{cm}$: en déduire J.

V Le pendule pesant

V.1 Équation du mouvement

Un **pendule pesant** est un solide mobile autour d'un axe horizontal Δ fixe, ne passant pas par son centre de masse G, soumis à son poids. On note m sa masse, J_Δ son moment d'inertie, $a = OG$ la distance de G à l'axe, et θ l'angle entre $\overrightarrow{OG}$ et la verticale descendante. La liaison pivot est supposée parfaite, et l'axe Δ est orienté de sorte que θ croisse dans le sens direct.

Exemples : balancier d'horloge, métronome, cloche, jambe ou bras qui se balance pendant la marche, tige de TP. Deux actions seulement s'exercent : le poids, appliqué en G, et l'action de la liaison.



Équation du pendule pesant R D

Le moment du poids vaut $-mga\sin\theta$ (bras de levier $a|\sin\theta|$, rappel vers $\theta = 0$) et celui de la liaison est nul. Le TMC scalaire donne

$$J_\Delta\ddot{\theta} + mga\sin\theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{mga/J_\Delta}$.

C'est une équation **non linéaire**. Le pendule simple ($J_\Delta = m\ell^2$, $a = \ell$) en est un cas particulier ; le pendule pesant se comporte comme un pendule simple de **longueur équivalente** $\ell_{\text{eq}} = J_\Delta/(ma)$.

V.2 Intégrale première du mouvement

Intégrale première R D

En multipliant l'équation par $\dot{\theta}$ et en intégrant :

$$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = \text{cte} = E$$

C'est la conservation de l'énergie mécanique (chapitre S3) : $\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$ est l'énergie cinétique, $-mga\cos\theta$ l'énergie potentielle de pesanteur ($z_G = -a\cos\theta$).

Elle donne directement $\dot{\theta}$ en fonction de θ : avec $\theta(0) = \theta_m$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_m)$.

V.3 Petites oscillations ; analogies

Pour $|\theta| \ll 1$, $\sin\theta \approx \theta$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$. Le pendule est un **oscillateur harmonique** de période

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$

indépendante de l'amplitude (isochronisme des petites oscillations). Dans le plan de phase $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$, les trajectoires sont des cercles.

Remarque

Analogies. Avec un couple de frottement fluide $-h\dot{\theta}$ exercé par la liaison : $J_\Delta\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + mga\,\theta = 0$, à comparer au circuit RLC série $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$: $J_\Delta \leftrightarrow L$, $h \leftrightarrow R$, $mga \leftrightarrow 1/C$, $\theta \leftrightarrow q$. Facteur de qualité : $Q = \frac{\sqrt{J_\Delta mga}}{h}$. De même, un pendule de torsion ($J_\Delta\ddot{\theta} = -C\theta$) est l'analogue exact d'une masse au bout d'un ressort.

V.4 Portrait de phase

D'après l'intégrale première, $\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J_\Delta}(E + mga\cos\theta)$. On distingue :

- $-mga < E < mga$: θ reste borné, la trajectoire de phase est **fermée** : mouvement **pendulaire** (oscillations) ;
- $E > mga$: $\dot{\theta}$ ne s'annule jamais, le pendule fait des tours complets : mouvement **révolutif** ;
- $E = mga$: **séparatrice**, qui relie les positions d'équilibre instable $\theta = \pm\pi$, atteintes en un temps infini.

Les points $(0, 0)$ et $(\pm\pi, 0)$ sont les équilibres stable et instables. Les trajectoires sont parcourues dans le sens horaire (pour $\dot{\theta} > 0$, θ croît).

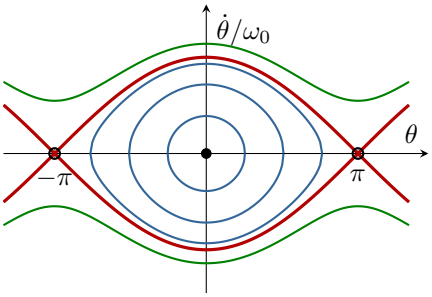


Fig. 5 : Bleu : pendulaire ; rouge : séparatrice ; vert : révolutif.

V.5 Non-isochronisme des grandes oscillations

En séparant les variables dans $\dot{\theta} = -\omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_m)}$ sur un quart de période :

$$T = \frac{4}{\omega_0}\int_0^{\theta_m} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_m)}} \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\right)$$

La période **augmente avec l'amplitude** (formule de Borda à l'ordre 2, démontrée dans les classiques des concours) et tend vers l'infini quand $\theta_m \to \pi$: le pendule s'attarde au voisinage de l'équilibre instable. Pour $\theta_m = 20°$, l'écart est de $0{,}8\,\%$; pour $90°$, il atteint $18\,\%$.

Programme Python : période en fonction de l'amplitude

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

w0 = 2*np.pi                        # T0 = 1 s
def f(t, y):                        # y = [theta, dtheta/dt]
    return [y[1], -w0**2*np.sin(y[0])]
def demi_tour(t, y):                # evenement : dtheta/dt repasse par 0
    return y[1]
demi_tour.direction = 1             # de negatif a positif : demi-periode
def periode(thm):
    sol = solve_ivp(f, [0, 20], [thm, 0], events=demi_tour,
                    rtol=1e-9, atol=1e-11)
    return 2*sol.t_events[0][0]
A = np.radians(np.arange(5, 176, 5))
plt.plot(np.degrees(A), [periode(a) for a in A], "o", label="simulation")
plt.plot(np.degrees(A), 1 + A**2/16, label="Borda")
plt.xlabel("amplitude (deg)"); plt.ylabel("T/T0"); plt.legend(); plt.show()
```

Ordres de grandeur

Pour un pendule de TP (tige de $1\,\mathrm{m}$), $T_0 \approx 1{,}6\,\mathrm{s}$; l'écart à l'isochronisme n'est mesurable au chronomètre (sur 10 périodes) qu'au-delà de 20 à $30°$. Horloge comtoise : amplitude de quelques degrés, d'où une excellente régularité.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 13 Tige pendule ✦✦✧✧✧

Une tige homogène de longueur $L = 0{,}80\,\mathrm{m}$ oscille autour d'un axe horizontal passant par une extrémité ($J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$). Calculer la période des petites oscillations et la longueur du pendule simple de même période.

EXERCICE 14 Vitesse pour faire le tour ✦✦✧✧✧

Quelle vitesse angulaire minimale faut-il communiquer au pendule pesant, à partir de sa position d'équilibre stable, pour qu'il fasse des tours complets ? Que se passe-t-il pour la valeur limite ?

EXERCICE 15 Pendule de torsion : mesure d'un moment d'inertie

★★★☆☆

Une barre horizontale est suspendue en son milieu à un fil de torsion vertical de constante C. Deux masselottes de masse $m = 50\,\mathrm{g}$ peuvent être placées symétriquement à la distance d de l'axe ; J_0 est le moment d'inertie de la barre seule. On mesure la période : $T = 2{,}10\,\mathrm{s}$ pour $d = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ et $T = 3{,}40\,\mathrm{s}$ pour $d = 15{,}0\,\mathrm{cm}$.

Q-1) Établir l'équation du mouvement et la période (on admet $J = J_0 + 2md^2$ pour les masselottes quasi ponctuelles).

Q-2) En déduire C et J_0.

VI Synthèse

★ À retenir

Loi	Expression	Conditions
Forces intérieures	$\sum \vec{f}_{\text{int}} = \vec{0},\ \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,\text{int}} = \vec{0}$	troisième loi de Newton
Moment / axe	$\mathcal{M}_\Delta = \pm Fd$	d : bras de levier
Couple	$\vec{R} = \vec{0},\ \vec{\Gamma}$ indépendant du point	moteur, torsion $-C\theta$
Pivot parfaite	$\mathcal{M}_{\Delta,\text{liaison}} = 0$	résultante quelconque
TRC	$m\vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}$	$\mathcal{R}$ galiléen (sinon $+\vec{F}_i$)
Coulomb, adhérence	$\vec{v}_g = \vec{0},\ \left\|\vec{T}\right\| \le f_s N$	$N \ge 0$
Coulomb, glissement	$\left\|\vec{T}\right\| = f_d N,\ \vec{T}\cdot\vec{v}_g < 0$	$\tan\varphi = f$
TMC scalaire	$J_\Delta \ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$	axe fixe, $\mathcal{R}$ galiléen
Pendule pesant	$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$	$\omega_0^2 = mga/J_\Delta$
Intégrale première	$\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = E$	pendulaire si $E < mga$

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 16 Oscillateur à frottement sec

★★★☆☆

Un palet de masse $m = 0{,}50\,\mathrm{kg}$, posé sur un plan horizontal, est relié à un ressort horizontal de raideur $k = 50\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$; x est l'allongement du ressort. Le coefficient de frottement est $f = f_s = f_d = 0{,}10$. On lâche le palet sans vitesse en $x_0 = 10{,}0\,\mathrm{cm}$.

Q-1) Vérifier que le palet se met en mouvement. Établir l'équation du mouvement pendant la première phase ($\dot{x} < 0$) et la résoudre.

Q-2) Montrer que l'amplitude diminue de $2x_1$ à chaque demi-oscillation, avec $x_1 = fmg/k$, et que la pseudo-période vaut $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Q-3) Quand et où le palet s'arrête-t-il définitivement ?

EXERCICE 17 Colis sur un tapis élévateur

Un monte-charge de déménagement est un tapis roulant incliné de l'angle α, qui monte à vitesse constante v_t. On pose un colis sans vitesse initiale sur le tapis à $t = 0$; le coefficient de frottement est f ($f_s = f_d$).

Q-1) Justifier que le colis glisse au départ et donner le sens de la force de frottement. Établir son accélération.

Q-2) À quelle condition le colis finit-il par être entraîné ? Calculer la durée t_1 de la phase de glissement et la distance parcourue.

Q-3) Que se passe-t-il ensuite ? Vérifier la validité de l'hypothèse.

Q-4) AN : $\alpha = 20°$, $f = 0{,}60$, $v_t = 0{,}80\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

EXERCICE 18 Échelle contre un mur

Une échelle homogène de masse m et de longueur 2ℓ s'appuie sans frottement contre un mur vertical et repose sur un sol horizontal (coefficient f_s) ; elle fait l'angle α avec le sol. À quelle condition reste-t-elle en équilibre ? AN : $f_s = 0{,}40$.

EXERCICE 19 Glisser ou basculer ?

Un pavé homogène, de base $2b$ (le long de la pente) et de hauteur $2h$, est posé sur un plan dont on augmente lentement l'inclinaison α ; coefficient f_s.

Q-1) En supposant qu'il ne glisse pas, montrer qu'il bascule autour de son arête aval lorsque $\tan\alpha > b/h$.

Q-2) Que se passe-t-il en premier pour un cube ? pour une boîte haute et étroite ($h = 2b$) posée sur du caoutchouc ($f_s = 0{,}8$) ?

VIII Classiques des concours

EXERCICE 20 Mesure d'un coefficient de frottement dynamique

Un solide 1, de masse M, est posé sur un support horizontal fixe. Il est relié par un fil inextensible et de masse négligeable, passant sur une poulie idéale, à un solide 2 de masse λM ($\lambda > f_s$), suspendu à la hauteur H_0 au-dessus du sol. On lâche le système sans vitesse ; le solide 2 touche le sol, le fil se détend et le solide 1 poursuit sa course jusqu'à l'arrêt. On mesure la distance totale D parcourue par le solide 1. On note f le coefficient de frottement dynamique.

Q-1) Définir la vitesse de glissement du solide 1 sur le support. Dépend-elle du référentiel ? Pourquoi faut-il $\lambda > f_s$?

Q-2) Établir l'accélération du solide 1 pendant la première phase, puis le carré de sa vitesse V_1 quand le solide 2 touche le sol.

Q-3) Étudier la seconde phase et en déduire f en fonction de λ, H_0 et D.

Q-4) AN : $M = 40\,\mathrm{g}$, $\lambda M = 60\,\mathrm{g}$, $H_0 = 30{,}0\,\mathrm{cm}$, $D = 1{,}20\,\mathrm{m}$.

EXERCICE 21 Formule de Borda

On part de $\ddot\theta + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\theta(0) = \theta_m \in]0, \pi[$ et $\dot\theta(0) = 0$.

Q-1) Montrer que $T = \dfrac{2\sqrt{2}}{\omega_0}\displaystyle\int_0^{\theta_m} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_m}}$.

Q-2) Avec $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$, puis le changement de variable $\sin(\theta/2) = k\sin\psi$ où $k = \sin(\theta_m/2)$, montrer que $T = \dfrac{4}{\omega_0}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$.

Q-3) En déduire, pour $k \ll 1$, $T \approx T_0\left(1+\dfrac{k^2}{4}\right) \approx T_0\left(1+\dfrac{\theta_m^2}{16}\right)$.

EXERCICE 22 Frein à patin

★★★☆☆

Un disque de moment d'inertie $J = 0{,}80\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ tourne à $1200\,\mathrm{tr/min}$ autour d'un axe fixe horizontal (liaison pivot parfaite). Pour le freiner, on presse contre sa tranche, à la distance $R = 15\,\mathrm{cm}$ de l'axe, un patin fixe avec une force normale $F = 200\,\mathrm{N}$; le coefficient de frottement patin–disque est $f = 0{,}40$.

Q-1) Le patin est immobile : appliquer les lois de Coulomb au patin et en déduire l'action exercée par le disque sur le patin, puis par le patin sur le disque.

Q-2) Calculer la durée du freinage et le nombre de tours effectués.

Q-3) Le TRC appliqué au disque donne-t-il une information sur l'action de la liaison pivot ?