LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

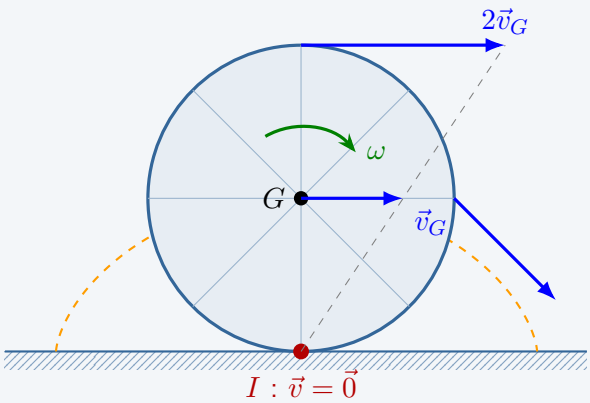
FICHE RÉSUMÉ

S1

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Cinématique et éléments cinétiques du solide

Système fermé et centre de masse — Référentiel barycentrique — Champ des vitesses d'un solide — Translation et rotation autour d'un axe fixe — Vitesse de glissement, roulement sans glissement — Quantité de mouvement, moment cinétique, moment d'inertie, énergie cinétique



roulement sans glissement : $v_G = R\omega$

> *S'il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.*
>
> — Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, chap. IV (1902)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Roulement sur un plan incliné »

S1 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Un système fermé se résume, pour son mouvement d'ensemble, à son centre de masse G : $\vec{p} = m\vec{v}_G$. Le mouvement d'un solide est entièrement décrit par la vitesse d'un de ses points et par son vecteur rotation $\vec{\Omega}$ ($\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$) ; au programme : translation ($\vec{\Omega} = \vec{0}$) et rotation autour d'un axe fixe ($v = r\omega$, $L_\Delta = J_\Delta \omega$, $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$). Deux solides en contact glissent l'un sur l'autre si $\vec{v}_g = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2) \neq \vec{0}$; sinon ils roulent sans glisser.

I Système fermé, centre de masse

Définition — Centre de masse et référentiel barycentrique R

- Système fermé : masse $m = \sum m_i = \int \mathrm{d}m$ constante.
- Centre de masse : $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \iff m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} = \int \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m$. Il appartient aux éléments de symétrie d'un système homogène ; associativité : $m\overrightarrow{OG} = \sum m_k \overrightarrow{OG_k}$.
- Référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$: en translation par rapport à $\mathcal{R}$, G y est fixe ; $\vec{p}^\star = \vec{0}$.

Objet homogène	demi-disque	quart de disque	cône plein (depuis le sommet)
Position de G	$\frac{4R}{3\pi}$ du diamètre	$x_G = y_G = \frac{4R}{3\pi}$	$\frac{3}{4}H$

II Cinématique du solide

Champ des vitesses R

Solide : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \text{cte}$ pour tous $A, B \in S$.

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Équiprojectivité : $\vec{v}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$. Le vecteur rotation est celui du référentiel lié au solide. (Notation manuscrite équivalente : $\vec{v}(A) = \vec{v}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}$.)

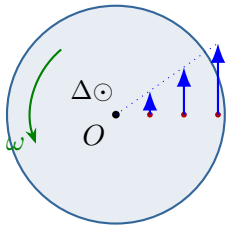


Fig. 1 : Rotation : $v = r\omega$.

★ À retenir

Mouvement	Caractérisation	Vitesses
Translation rectiligne	$\vec{\Omega}=\vec{0}$, trajectoires droites	$\vec{v}(M)=\vec{v}_G$ pour tout M
Translation circulaire	$\vec{\Omega}=\vec{0}$, cercles de même rayon, centres différents	$\vec{v}(M)=\vec{v}_G$ (nacelle, plaque bifilaire)
Rotation autour de Δ fixe	points de Δ immobiles, cercles de même axe	$\vec{v}(M)=r\omega\,\vec{u}_\theta$, $\vec{a}=-r\omega^2\vec{u}_r+r\dot{\omega}\vec{u}_\theta$

III Contact entre deux solides

Définition — Vitesse de glissement R

Contact ponctuel en I ; $I_1\in S_1$, $I_2\in S_2$ coïncident avec I :

$$\vec{v}_g(S_1/S_2)=\vec{v}(I_1/\mathcal{R})-\vec{v}(I_2/\mathcal{R})$$

indépendante de $\mathcal{R}$, contenue dans le plan tangent ; $\vec{v}_g(S_2/S_1)=-\vec{v}_g(S_1/S_2)$.

- $\vec{v}_g\neq\vec{0}$: glissement ; $\vec{v}_g=\vec{0}$: roulement sans glissement.
- Rotation relative $\vec{\Omega}(S_1/S_2)$: composante tangente = roulement, normale = pivotement.

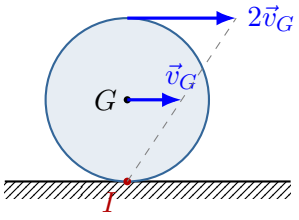


Fig. 2 : Roue sur sol fixe sans glissement : $v_G=R\omega$, $\vec{v}(I_1)=\vec{0}$.

IV Éléments cinétiques

Quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique R

$$\vec{p}=\sum m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_G \qquad \vec{L}_A=\sum \overrightarrow{AM_i}\wedge m_i\vec{v}_i \qquad E_c=\sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2$$

- Changement de point : $\vec{L}_B=\vec{L}_A+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{p}$; moment par rapport à un axe : $L_\Delta=\vec{L}_A\cdot\vec{u}_\Delta$ ($A\in\Delta$, indépendant de A).
- Solide en rotation autour de Δ fixe : $\boxed{L_\Delta=J_\Delta\omega}$, $\boxed{E_c=\tfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2}$, avec $J_\Delta=\int r^2\mathrm{d}m$ (distance à l'**axe**), toujours donné.
- Solide en translation : $E_c=\tfrac{1}{2}mv_G^2$.
- Kœnig (complément, non exigible) : $\vec{L}_O=\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}_G+\vec{L}^\star$, $E_c=\tfrac{1}{2}mv_G^2+E_c^\star$.

Solide homogène	anneau (axe)	disque (axe)	boule	sphère creuse	tige (milieu)	tige (bout)
J_Δ	mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{2}{3}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$	$\frac{1}{3}mL^2$

Théorème de Huygens (hors programme, rappelé par l'énoncé) : $J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2$, minimal pour l'axe passant par G.

Ordres de grandeur

Disque dur ($7200\,\mathrm{tr/min}$) : $\omega = 754\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, bord à $36\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; vélo à $21{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, roue de $34\,\mathrm{cm}$: $\omega \approx 18\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; rotation propre de la Terre : $L \approx 6\times10^{33}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$, $E_c \approx 2\times10^{29}\,\mathrm{J}$; volant de stockage ($100\,\mathrm{kg}$, $10\,000\,\mathrm{tr/min}$) : $\approx 2\,\mathrm{kWh}$. Conversion : N tr/min $\to \omega = 2\pi N/60$.

V Méthodes et pièges

☞ Méthode — Écrire une condition de roulement sans glissement M

1. Orienter les angles, écrire $\vec{\Omega}$ de chaque solide (signe !).
2. Calculer $\vec{v}(I_1)$ et $\vec{v}(I_2)$ à partir d'un point de vitesse simple (centre, point de l'axe) par $\vec{v}(I) = \vec{v}(C) + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{CI}$.
3. Écrire $\vec{v}_g = \vec{0}$, puis contrôler le signe sur un cas évident (roue qui avance : $v_G = +R\omega$).

Exemples : roue sur sol fixe $v_G = R\omega$; sur un tapis de vitesse u : $v_G - R\omega = u$; cylindre de rayon a dans une gouttière de rayon R_0 : $(R_0-a)\dot\theta + a\dot\varphi = 0$; courroie : $R_1\omega_1 = R_2\omega_2$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Translation circulaire $\neq$ rotation : la nacelle d'une grande roue ne tourne pas sur elle-même.
- $\vec{v} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$ seulement si O est un point **fixe de l'axe**.
- Glissement $\neq$ frottement ; la vitesse de glissement n'est pas la vitesse du point géométrique I.
- $E_c \neq \frac{1}{2}mv_G^2$ dès qu'il y a rotation ; $\vec{p} = \vec{0}$ pour un solide tournant autour d'un axe passant par G, alors que $E_c \neq 0$.
- Le calcul de J_Δ est hors programme ; ne pas confondre la distance à l'axe et la distance à un point.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais situer G par symétrie et calculer sa position pour une plaque ou un volume simple.
- ☐ Je sais démontrer la relation du champ des vitesses et utiliser l'équiprojectivité.
- ☐ Je distingue translation rectiligne, translation circulaire et rotation autour d'un axe fixe.
- ☐ Je sais calculer une vitesse de glissement et écrire une condition de roulement sans glissement.
- ☐ Je sais établir $\vec{p} = m\vec{v}_G$, $L_\Delta = J_\Delta\omega$ et $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$.
- ☐ Je connais l'ordre de grandeur et le sens physique d'un moment d'inertie.