LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

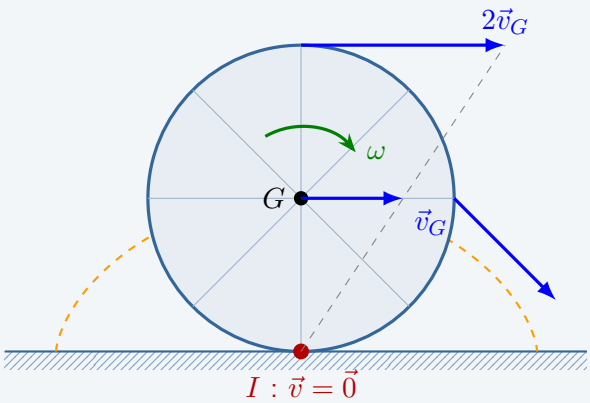
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

S1

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Cinématique et éléments cinétiques du solide

Système fermé et centre de masse — Référentiel barycentrique — Champ des vitesses d'un solide — Translation et rotation autour d'un axe fixe — Vitesse de glissement, roulement sans glissement — Quantité de mouvement, moment cinétique, moment d'inertie, énergie cinétique



roulement sans glissement : $v_G = R\omega$

> *S'il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.*
>
> — Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, chap. IV (1902)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Roulement sur un plan incliné »

S1 — Cinématique du solide

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Définir un système fermé, sa masse, son centre de masse G ; prévoir la position de G par les symétries et la calculer dans des cas simples ; définir le référentiel barycentrique.
- Distinguer un solide d'un système déformable ; écrire la relation du champ des vitesses d'un solide.
- Décrire une translation (rectiligne, circulaire) et une rotation autour d'un axe fixe : trajectoires, vitesse $v = r\omega$ d'un point à la distance r de l'axe.
- Définir et calculer la vitesse de glissement entre deux solides en contact ponctuel ; écrire une condition de roulement sans glissement.
- Établir $\vec{p} = m\vec{v}(G)$; définir le moment cinétique en un point et par rapport à un axe orienté ; établir $L_\Delta = J_\Delta \omega$ et $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Ce chapitre est purement **descriptif** : on ne parle pas encore des forces (chapitre S2) ni de l'énergie (chapitre S3). La simulation PhysioNova « Roulement sur un plan incliné » permet de comparer un objet qui glisse et un objet qui roule : on y vérifie la condition de roulement sans glissement $v_G = R\omega$ et on visualise la vitesse nulle du point de contact.
Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, corrigés, terminent le chapitre. **Tout calcul de moment d'inertie est hors programme** : les valeurs de J_Δ sont toujours données.

Table des matières

I Système fermé de points matériels . . . 3
I.1 Masse d'un système fermé . . . 3
I.2 Centre de masse (barycentre) . . . 3
I.3 Référentiel barycentrique . . . 4
II Cinématique du solide . . . 4
II.1 Définition d'un solide . . . 4
II.2 Champ des vitesses d'un solide . . . 5
II.3 Mouvement de translation . . . 6
II.4 Rotation autour d'un axe fixe . . . 6
III Contact entre deux solides . . . 7
III.1 Vitesse de glissement . . . 7
III.2 Glissement, roulement, pivotement . . . 8
III.3 Roue qui roule sans glisser . . . 8
IV Éléments cinétiques d'un système et d'un solide . . . 10
IV.1 Quantité de mouvement (résultante cinétique) . . . 10
IV.2 Moment cinétique en un point et par rapport à un axe . . . 10
IV.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe : moment d'inertie . . . 10
IV.4 Énergie cinétique . . . 11
V Synthèse . . . 12
VI Exercices d'approfondissement . . . 13
VII Classiques des concours . . . 14

I Système fermé de points matériels

En MPSI, tout objet était modélisé par un point matériel. Un ballon qui tourne sur lui-même, une roue, une porte, une échelle ne peuvent pas être décrits ainsi : il faut tenir compte de la **répartition de la masse** et du fait que les différents points n'ont pas la même vitesse. On commence par un ensemble quelconque de points, puis on spécialise au solide.

I.1 Masse d'un système fermé

Définition — Système fermé, masse R

Un système Σ est **fermé** s'il est constitué toujours des mêmes points matériels : il n'échange pas de matière avec l'extérieur. Sa masse

$$m = \sum_i m_i \qquad \text{ou} \qquad m = \iiint_\Sigma \rho \, \mathrm{d}\tau$$

est alors **constante** (conservation de la masse). Pour une répartition continue, l'élément de masse s'écrit $\mathrm{d}m = \rho \, \mathrm{d}\tau$ (volumique), $\mathrm{d}m = \sigma \, \mathrm{d}S$ (surfacique) ou $\mathrm{d}m = \lambda \, \mathrm{d}\ell$ (linéique).

Toutes les lois de ce thème sont écrites pour des systèmes fermés : une fusée qui éjecte des gaz ou un tapis qui reçoit du sable sont des systèmes ouverts, dont l'étude n'est pas exigible.

I.2 Centre de masse (barycentre)

Définition — Centre de masse R

Le centre de masse G (ou barycentre, ou centre d'inertie) est l'unique point tel que

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \iff m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \quad \forall O$$

Pour un système continu : $\displaystyle\int_\Sigma \overrightarrow{GM} \, \mathrm{d}m = \vec{0}$ et $m\overrightarrow{OG} = \displaystyle\int_\Sigma \overrightarrow{OM} \, \mathrm{d}m$.

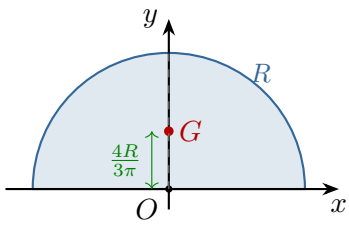


Fig. 1 : Demi-disque homogène : G est sur l'axe de symétrie.

Propriétés utiles R

- **Symétries** : si un système homogène admet un plan, un axe ou un centre de symétrie, G lui appartient (centre d'une sphère, milieu de l'axe d'un cylindre, axe d'un cône, centre d'un anneau…). G n'est pas forcément un point matériel du système (anneau, fer à cheval).
- **Associativité** : si Σ est la réunion de sous-systèmes Σ_k de masses m_k et de centres de masse G_k, alors $m\overrightarrow{OG} = \sum_k m_k \overrightarrow{OG_k}$.

☞ Méthode — Calculer la position de G M

1. Utiliser les symétries pour réduire le calcul à une seule coordonnée.

2. Découper le système en éléments simples (tranches, anneaux, secteurs) de masse $\mathrm{d}m$ exprimée avec la densité (ρ, σ ou λ) et une coordonnée adaptée.
3. Calculer $z_G = \frac{1}{m}\int z\,\mathrm{d}m$; vérifier que G est bien du côté où la masse est la plus abondante.

I.3 Référentiel barycentrique

Définition — Référentiel barycentrique R

Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^\star$ associé à un système Σ étudié dans $\mathcal{R}$ est le référentiel **en translation** par rapport à $\mathcal{R}$ dans lequel G est **fixe**. On le repère souvent par $(G, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, les axes gardant des directions fixes dans $\mathcal{R}$.

Exemples : le référentiel géocentrique est le référentiel barycentrique de la Terre dans le référentiel héliocentrique ; pour un ballon lancé, $\mathcal{R}^\star$ accompagne son centre sans tourner. $\mathcal{R}^\star$ n'est galiléen que si G est en mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — **Centre de masse d'un cône plein** ✦✦✧✧✧

Un cône plein homogène a pour sommet O, pour axe (Oz), pour hauteur H et pour rayon de base R. Déterminer la position de son centre de masse.

EXERCICE 2 — **Quart de disque homogène** ✦✦✧✧✧

Une plaque homogène de masse m a la forme d'un quart de disque de centre O et de rayon R, situé dans le quadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Q-1) Exprimer sa densité surfacique σ.

Q-2) Calculer x_G et y_G, puis la distance OG. Comparer avec le demi-disque.

EXERCICE 3 — **Barycentre du système Terre–Lune** ✦✧✧✧✧

La masse de la Terre vaut 81 fois celle de la Lune et la distance entre leurs centres est $D = 3{,}84 \times 10^5\,\mathrm{km}$. Le rayon terrestre est $R_T = 6{,}37 \times 10^3\,\mathrm{km}$. Situer le centre de masse du système.

II Cinématique du solide

II.1 Définition d'un solide

Définition — Solide indéformable R

Un **solide** est un système matériel dont les distances entre points restent constantes :

$$\forall A, B \in S, \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \text{cte} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Un système qui ne vérifie pas cette propriété est **déformable** (corps humain, ressort, chaîne, gaz). Un solide peut servir de solide de référence pour définir un référentiel : le référentiel $\mathcal{R}_S$ « lié au solide ».

Un point matériel possède 3 degrés de liberté (ses trois coordonnées). Un solide libre en possède **6** : 3 pour la position d'un de ses points (translation) et 3 angles pour son orientation (rotation). Les contacts et les liaisons réduisent ce nombre.

II.2 Champ des vitesses d'un solide

Relation du champ des vitesses R D

Il existe un vecteur $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$, le **vecteur rotation instantané** du solide (c'est le vecteur rotation de $\mathcal{R}_S$ par rapport à $\mathcal{R}$), tel que pour tous points A et B du solide :

$$\vec{v}(B \in S/\mathcal{R}) = \vec{v}(A \in S/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le mouvement du solide à l'instant t est entièrement connu par $\vec{v}(A)$ et $\vec{\Omega}$.

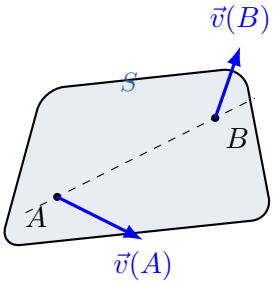


Fig. 2 : Équiprojectivité : $\vec{v}(A)$ et $\vec{v}(B)$ ont même projection sur (AB).

Démonstration D. Les points A et B sont fixes dans $\mathcal{R}_S$, donc $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_S} = \vec{0}$. La formule de dérivation d'un vecteur dans deux référentiels (MPSI, chapitre M8) donne

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB},$$

et $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(B/\mathcal{R}) - \vec{v}(A/\mathcal{R})$. □

Remarque

- En multipliant scalairement par $\overrightarrow{AB}$, le produit mixte s'annule : $\vec{v}(B) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v}(A) \cdot \overrightarrow{AB}$. C'est l'**équiprojectivité**, qui traduit directement la constance de AB. Elle permet souvent de trouver une vitesse sans connaître $\vec{\Omega}$.
- On dit que le champ des vitesses a une structure de **torseur** (torseur cinématique) de résultante $\vec{\Omega}$ et de moment $\vec{v}(A)$. Ce vocabulaire n'est pas exigible.
- En dérivant une fois de plus : $\vec{a}(B) = \vec{a}(A) + \dfrac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$.

II.3 Mouvement de translation

Définition — Translation R

Un solide est en **translation** dans $\mathcal{R}$ si tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ lié au solide garde une direction fixe, c'est-à-dire si $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) = \vec{0}$. Alors, à chaque instant, **tous les points ont la même vitesse et la même accélération** :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(G) \quad \text{et} \quad \vec{a}(M) = \vec{a}(G) \qquad \forall M \in S$$

Les trajectoires des différents points se déduisent l'une de l'autre par translation. On distingue :

- la **translation rectiligne** : chaque point décrit une droite (tiroir, ascenseur, piston) ;
- la **translation circulaire** : chaque point décrit un cercle de même rayon, mais de centres différents (nacelle d'une grande roue, plaque suspendue à deux fils parallèles de même longueur, bielle d'accouplement des roues d'une locomotive).

Une translation circulaire n'est **pas** une rotation : la nacelle d'une grande roue ne tourne pas sur elle-même, les passagers restent assis à l'endroit.

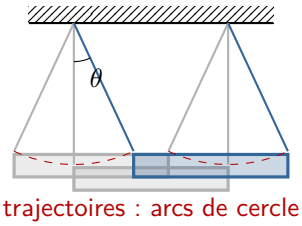


Fig. 3 : Plaque à deux fils parallèles : translation circulaire.

II.4 Rotation autour d'un axe fixe

Définition — Rotation autour d'un axe fixe R

Un solide est en rotation autour de l'axe $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ fixe dans $\mathcal{R}$ si tous les points de Δ liés au solide restent immobiles. On repère l'orientation du solide par un angle $\theta(t)$; la **vitesse angulaire** $\omega = \dot{\theta}$ est la même pour tous les points et $\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u}_z$.

Un point M du solide, à la distance $r = HM$ de l'axe (H projeté de M sur Δ), décrit un **cercle** d'axe Δ et de rayon r. Avec $\vec{v}(M) = \vec{v}(H) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} = \omega\vec{u}_z \wedge r\vec{u}_r$:

$$\vec{v}(M) = r\omega\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{a}(M) = -r\omega^2\,\vec{u}_r + r\dot{\omega}\,\vec{u}_\theta$$

La norme de la vitesse est **proportionnelle à la distance à l'axe**.

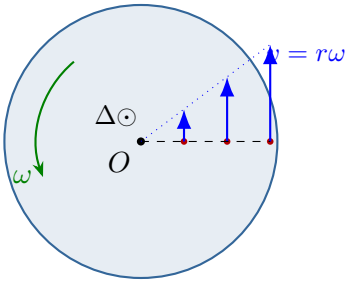


Fig. 4 : Les extrémités des vitesses sont alignées avec O.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- ω s'exprime en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$: N tours par minute correspondent à $\omega = 2\pi N/60$.
- Une translation circulaire et une rotation donnent toutes deux des trajectoires circulaires : dans une rotation, les cercles ont le **même axe** et des rayons différents ; dans une translation circulaire, ils ont le **même rayon** et des centres différents.
- La relation $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ n'est valable que si O est un point **fixe de l'axe** (et non un point quelconque du solide).

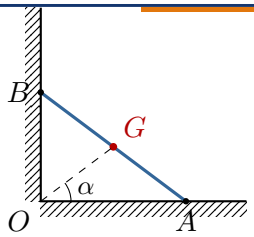
Ordres de grandeur

- Disque dur : $7200\,\mathrm{tr/min}$, $\omega = 754\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; bord à $4{,}8\,\mathrm{cm}$: $v \approx 36\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, accélération centripète $\approx 2{,}7\times10^{4}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
- Rotation propre de la Terre : $\omega = 7{,}29\times10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$; point de l'équateur : $v \approx 465\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
- Éolienne de $2\,\mathrm{MW}$: pales de $45\,\mathrm{m}$ à $15\,\mathrm{tr/min}$, bout de pale à $71\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Échelle qui glisse

Une échelle, assimilée à une barre AB de longueur 2ℓ, glisse avec son extrémité A sur le sol et son extrémité B contre un mur vertical. On repère sa position par l'angle $\alpha = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OG})$, où G est le milieu de AB.



Q-1) Montrer que G décrit un arc de cercle de centre O et exprimer $\vec{v}(G)$.

Q-2) Exprimer $\overrightarrow{AB}$, le dériver et en déduire $\vec{\Omega}$.

Q-3) Vérifier le résultat avec la relation du champ des vitesses entre A et G.

EXERCICE 5 Plaque suspendue à deux fils

Une plaque est suspendue à un plafond horizontal par deux fils parallèles, inextensibles, de même longueur ℓ, attachés en deux points du plafond distants de la longueur de la plaque (figure de la partie II.3). Les fils font l'angle $\theta(t)$ avec la verticale.

Q-1) Quelle est la nature du mouvement de la plaque ? Quelle est la trajectoire de son centre de masse G ?

Q-2) Exprimer la vitesse et l'accélération de G.

EXERCICE 6 Disque dur

Un plateau de disque dur de rayon $R = 4{,}8\,\mathrm{cm}$ démarre et atteint $7200\,\mathrm{tr/min}$ en $4{,}0\,\mathrm{s}$, avec une accélération angulaire constante.

Q-1) Calculer $\dot{\omega}$ puis, à la fin de la phase de démarrage, la vitesse et l'accélération d'un point du bord.

Q-2) Combien de tours le plateau a-t-il faits pendant le démarrage ?

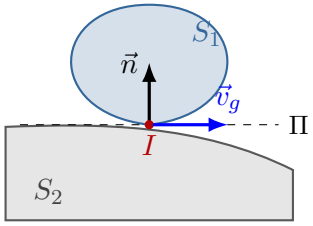
III Contact entre deux solides

III.1 Vitesse de glissement

On considère deux solides S_1 et S_2 en **contact ponctuel** en un point I ; ils admettent en I un plan tangent commun Π et une normale $\vec{n}$. À chaque instant, trois points coïncident :

- I_1, point matériel de S_1 ;
- I_2, point matériel de S_2 ;
- I, point géométrique de contact, qui se déplace en général sur les deux surfaces.

Ces trois points ont la même position mais des vitesses différentes.



Définition — Vitesse de glissement R

La vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 est la vitesse du point $I_1 \in S_1$ dans le référentiel lié à S_2. Elle se calcule dans n'importe quel référentiel $\mathcal{R}$ par

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I_1 \in S_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I_2 \in S_2/\mathcal{R})$$

Propriétés D

- $\vec{v}_g$ **ne dépend pas** du référentiel $\mathcal{R}$ choisi pour la calculer.
- $\vec{v}_g$ est contenue dans le **plan tangent** Π.
- $\vec{v}_g(S_2/S_1) = -\vec{v}_g(S_1/S_2)$.

Démonstration. Notons $\mathcal{R}_2$ le référentiel lié à S_2. La composition des vitesses donne $\vec{v}(I_1/\mathcal{R}) = \vec{v}(I_1/\mathcal{R}_2) + \vec{v}_e(I_1)$, et la vitesse d'entraînement de I_1 est la vitesse dans $\mathcal{R}$ du point coïncident fixe dans $\mathcal{R}_2$, c'est-à-dire de I_2 : $\vec{v}_e(I_1) = \vec{v}(I_2/\mathcal{R})$. Ainsi $\vec{v}(I_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I_2/\mathcal{R}) = \vec{v}(I_1/\mathcal{R}_2)$, qui ne fait intervenir que S_1 et S_2. Pour la direction, on compose de deux façons la vitesse du point géométrique I : $\vec{v}(I/\mathcal{R}) = \vec{v}(I/\mathcal{R}_2) + \vec{v}(I_2/\mathcal{R}) = \vec{v}(I/\mathcal{R}_1) + \vec{v}(I_1/\mathcal{R})$, d'où $\vec{v}_g = \vec{v}(I/\mathcal{R}_2) - \vec{v}(I/\mathcal{R}_1)$. Or I reste sur la surface de S_2 (resp. S_1) : sa vitesse dans $\mathcal{R}_2$ (resp. $\mathcal{R}_1$) est tangente à cette surface, donc contenue dans Π. □

III.2 Glissement, roulement, pivotement

Définition — Modes de mouvement relatif R

- Si $\vec{v}_g \neq \vec{0}$, S_1 **glisse** sur S_2.
- Si $\vec{v}_g = \vec{0}$: il n'y a pas de glissement ; c'est la condition de **roulement sans glissement** (on dit aussi qu'il y a adhérence).
- Le mouvement relatif des deux solides comporte en outre une rotation de vecteur $\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) - \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R})$: sa composante dans le plan tangent correspond au **roulement**, sa composante normale au **pivotement** (toupie qui tourne sur sa pointe).

Les trois mouvements peuvent coexister : une boule de bowling lancée glisse, roule et pivote. Les frottements de roulement et de pivotement sont hors programme ; seul le frottement de glissement sera modélisé (chapitre S2).

III.3 Roue qui roule sans glisser

Condition de roulement sans glissement R D

Une roue de rayon R, de centre G, roule sur un sol plan fixe ; on note x l'abscisse de G et θ l'angle de rotation, compté de sorte que $\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_z$ ($\vec{u}_z$ sortant de la figure, rotation en sens horaire pour $\dot{\theta} > 0$). Alors

$$\vec{v}(I \in \text{roue}) = \dot{x}\,\vec{u}_x + (-\dot{\theta}\vec{u}_z) \wedge (-R\vec{u}_y) = (\dot{x} - R\dot{\theta})\,\vec{u}_x,$$

et le sol étant fixe, le roulement sans glissement s'écrit

$$v_G = \dot{x} = R\dot{\theta} = R\omega$$

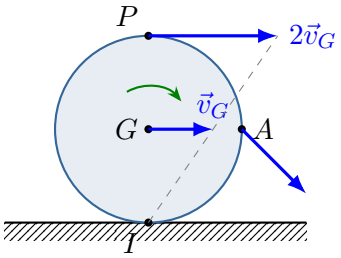


Fig. 5 : Le champ des vitesses est celui d'une rotation instantanée autour de I.

À chaque instant, le point de la roue en contact avec le sol a une **vitesse nulle** : le champ des vitesses est celui d'une rotation autour de l'axe instantané passant par I. Le point le plus haut P va à $2v_G$, un point A à hauteur du moyeu a une vitesse de norme $\sqrt{2}\,v_G$ inclinée à $45°$. Si la roue roule sans glisser sur un support mobile (tapis de vitesse $u\,\vec{u}_x$), la condition devient $\dot{x} - R\dot{\theta} = u$.

☞ Méthode — Écrire une condition de roulement sans glissement M

1. Orienter soigneusement les angles et écrire $\vec{\Omega}$ de chaque solide (attention au signe).
2. Calculer $\vec{v}(I_1)$ et $\vec{v}(I_2)$ par la relation du champ des vitesses à partir d'un point dont la vitesse est simple (centre, point de l'axe).
3. Écrire $\vec{v}_g = \vec{0}$: on obtient une (ou deux) relation(s) entre paramètres cinématiques, qui diminue(nt) le nombre de degrés de liberté. Contrôler le signe sur un cas évident.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Ne pas confondre **glissement** et **frottement** : une roue qui roule sans glisser subit une force de frottement (c'est elle qui la fait avancer ou freiner), et un palet peut glisser sans frottement sur de la glace.
- La vitesse de glissement n'est **pas** la vitesse du point géométrique I : pour une roue qui roule sans glisser, I avance à v_G alors que I_1 est immobile.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 Roue de vélo ✦✧✧✧✧

Un cycliste roule à $21{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ sur une route horizontale ; ses roues, de rayon $R = 34\,\mathrm{cm}$, roulent sans glisser.

Q-1) Calculer la vitesse angulaire des roues.

Q-2) Calculer la vitesse (norme et direction) du point de la jante situé le plus haut, puis du point situé à l'avant, à hauteur du moyeu.

EXERCICE 8 Glisse-t-il ? ✦✦✧✧✧

Un cylindre de rayon $R = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ se déplace sur un tapis roulant qui recule à $u = 0{,}50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Son centre avance à $v_G = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par rapport au sol et il tourne à $\omega = 20\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, dans le sens d'une roue qui avance.

Q-1) Calculer la vitesse de glissement du cylindre sur le tapis.

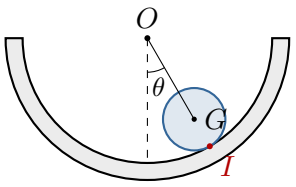
Q-2) Quelle devrait être ω pour qu'il roule sans glisser ?

EXERCICE 9 Transmission par courroie ✦✦✧✧✧

Deux poulies de rayons $R_1 = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ et $R_2 = 12\,\mathrm{cm}$ sont reliées par une courroie qui ne glisse pas sur elles. La première tourne à $1800\,\mathrm{tr/min}$. Calculer la vitesse de la courroie et la vitesse de rotation de la seconde poulie.

EXERCICE 10 Cylindre roulant dans une gouttière ✦✦✦✧✧

Un cylindre de rayon a et d'axe horizontal roule à l'intérieur d'une gouttière cylindrique fixe d'axe O et de rayon $R_0 > a$. On repère $\overrightarrow{OG}$ par l'angle θ avec la verticale descendante, et la rotation propre du cylindre par un angle φ ; θ et φ sont orientés dans le même sens (sens direct, $\vec{u}_z$ sortant).



Q-1) Exprimer $\vec{v}(G)$.

Q-2) Écrire la condition de roulement sans glissement. Le cylindre tourne-t-il dans le sens de θ ?

IV Éléments cinétiques d'un système et d'un solide

IV.1 Quantité de mouvement (résultante cinétique)

Quantité de mouvement d'un système fermé R D

$$\vec{p}(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i m_i\,\vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = m\,\vec{v}(G/\mathcal{R})$$

Démonstration : on dérive par rapport au temps, dans $\mathcal{R}$, la relation $m\,\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$ (O fixe dans $\mathcal{R}$, m et m_i constants car le système est fermé).

La quantité de mouvement d'un système est celle d'un point fictif placé en G et affecté de la masse totale. Dans le référentiel barycentrique, $\vec{v}(G/\mathcal{R}^\star) = \vec{0}$, donc $\vec{p}^\star = \vec{0}$: c'est la propriété caractéristique de $\mathcal{R}^\star$.

IV.2 Moment cinétique en un point et par rapport à un axe

Définition — Moment cinétique d'un système R

Le moment cinétique du système en un point A, dans $\mathcal{R}$, est la somme des moments cinétiques de ses points :

$$\vec{L}_A(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = \int_\Sigma \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m$$

Le moment cinétique par rapport à un axe Δ orienté par $\vec{u}_\Delta$ est le scalaire $L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta$, $A \in \Delta$; il ne dépend pas du point A choisi sur l'axe.

Changement de point D

$$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}$$

Démonstration : $\overrightarrow{BM_i} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_i}$ et $\sum_i m_i\vec{v}_i = \vec{p}$. Si A et B sont sur Δ, $(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ (produit mixte avec deux vecteurs colinéaires), d'où l'indépendance de L_Δ.

IV.3 Solide en rotation autour d'un axe fixe : moment d'inertie

Moment cinétique par rapport à l'axe de rotation R D

Pour un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe fixe Δ :

$$L_\Delta = J_\Delta\,\omega \qquad \text{avec} \qquad J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2 = \int_S r^2\,\mathrm{d}m$$

où r est la distance du point M à l'axe. J_Δ est le **moment d'inertie** du solide par rapport à Δ, en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

Démonstration. Avec H projeté de M sur Δ et les coordonnées cylindriques d'axe Δ : $\overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r$, $\vec{v}(M) = r\omega\vec{u}_\theta$. Le moment cinétique de M par rapport à l'axe vaut (MPSI) $\mathrm{d}L_\Delta = \mathrm{d}m\,r^2\dot{\theta} = r^2\omega\,\mathrm{d}m$. On somme :

$L_\Delta = \omega \int r^2 \mathrm{d}m$, car ω est la même pour tous les points. □

J_Δ mesure la **répartition de la masse autour de l'axe** : à masse égale, il est d'autant plus grand que la masse est éloignée de l'axe. Il joue en rotation le rôle de la masse en translation (inertie de rotation). Pour une même pièce, il dépend de l'axe choisi.
Le vecteur $\vec{L}_O$ ($O \in \Delta$) n'est en général **pas** colinéaire à Δ : il possède une composante perpendiculaire à l'axe. Il l'est si Δ est un axe de symétrie de révolution du solide, ou si le solide est plan et perpendiculaire à Δ ; alors $\vec{L}_O = J_\Delta \vec{\Omega}$. Seul L_Δ est au programme.

Solide homogène, masse m	J_Δ
Anneau, cylindre creux (axe)	mR^2
Disque, cylindre plein (axe)	$\frac{1}{2}mR^2$
Boule (diamètre)	$\frac{2}{5}mR^2$
Sphère creuse (diamètre)	$\frac{2}{3}mR^2$
Tige (milieu, $\perp$)	$\frac{1}{12}mL^2$
Tige (extrémité, $\perp$)	$\frac{1}{3}mL^2$

Tab. 1 : Valeurs usuelles (toujours fournies).

Remarque

Théorème de Huygens (hors programme, souvent rappelé par l'énoncé). Si Δ_G passe par G et Δ lui est parallèle à la distance d : $J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2$. Le moment d'inertie est minimal pour l'axe passant par G. Exemple : tige par une extrémité, $\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$.

IV.4 Énergie cinétique

Définition — Énergie cinétique d'un système R

$$E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \int_\Sigma \tfrac{1}{2} v^2(M/\mathcal{R})\,\mathrm{d}m$$

Deux cas particuliers R D

- Solide en **translation** : tous les points ont la vitesse $\vec{v}_G$, donc $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$.
- Solide en **rotation autour d'un axe fixe** : $v = r\omega$, donc

$$E_c = \int_S \tfrac{1}{2} r^2 \omega^2 \mathrm{d}m = \tfrac{1}{2} J_\Delta\, \omega^2$$

Remarque

Théorèmes de Kœnig (complément utile). En décomposant $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\mathcal{R}^\star) + \vec{v}(G/\mathcal{R})$ (car $\mathcal{R}^\star$ est en translation) et en utilisant $\int \overrightarrow{GM}\mathrm{d}m = \vec{0}$, on obtient

$$\vec{L}_O(\Sigma/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{L}^\star \qquad E_c(\Sigma/\mathcal{R}) = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + E_c^\star,$$

où $\vec{L}^\star$ (indépendant du point de calcul car $\vec{p}^\star = \vec{0}$) et $E_c^\star$ sont le moment cinétique et l'énergie cinétique barycentriques. Le mouvement « orbital » de G et le mouvement « propre » autour de G s'ajoutent. Ces relations ne sont pas exigibles ; l'étude d'un mouvement combinant translation de G et rotation dans $\mathcal{R}^\star$ est hors programme en dynamique.

★ À retenir

	Translation (vitesse v)	Rotation (axe fixe, vitesse ω)
Inertie	masse m	moment d'inertie J_Δ
Quantité « cinétique »	$p = mv$	$L_\Delta = J_\Delta \omega$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ne passant pas par G, $\vec{p} = m\vec{v}_G \neq \vec{0}$; s'il passe par G, $\vec{p} = \vec{0}$ alors que $E_c \neq 0$ et $L_\Delta \neq 0$.
- $E_c \neq \frac{1}{2}mv_G^2$ dès que le solide tourne : $\frac{1}{2}mv_G^2$ ne compte que le mouvement d'ensemble.
- J_Δ se calcule avec la distance à l'**axe** (et non au point O).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 11 — Rotation propre de la Terre

✦✧✧✧✧

On modélise la Terre par une boule de masse $M = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 6{,}37 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$, de moment d'inertie $J = 0{,}33\,MR^2$ par rapport à l'axe des pôles (la densité augmente vers le centre).

Q-1) Calculer le moment cinétique et l'énergie cinétique de rotation propre (jour sidéral : $86\,164\,\mathrm{s}$).

Q-2) Comparer $0{,}33$ à la valeur $0{,}4$ d'une boule homogène et commenter.

EXERCICE 12 — Volant de stockage d'énergie

✦✦✧✧✧

Un volant d'inertie est un cylindre plein de masse $m = 100\,\mathrm{kg}$ et de rayon $R = 0{,}50\,\mathrm{m}$, tournant autour de son axe à $10\,000\,\mathrm{tr/min}$.

Q-1) Calculer J_Δ, L_Δ et l'énergie stockée en kWh.

Q-2) Quelle est la vitesse d'un point de la périphérie ? Pourquoi les volants modernes sont-ils en fibre de carbone ?

EXERCICE 13 — Tige et disque soudés

✦✦✧✧✧

Une tige homogène de masse m_T et de longueur ℓ tourne dans un plan horizontal autour d'un axe vertical Δ passant par son extrémité O, à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$. Un disque de masse m_D et de rayon a, dont le centre D est soudé à l'autre extrémité de la tige, est horizontal. On donne $J_\Delta(\text{tige}) = \frac{1}{3}m_T\ell^2$ et $J_\Delta(\text{disque}) = \frac{1}{2}m_Da^2 + m_D\ell^2$.

Q-1) Situer le centre de masse G de l'ensemble et exprimer sa quantité de mouvement.

Q-2) Exprimer L_Δ et E_c. Vérifier que $E_c \neq \frac{1}{2}(m_T + m_D)v_G^2$.

V Synthèse

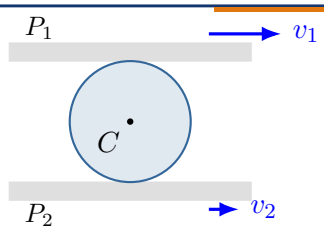
★ À retenir

Notion	Expression	Remarques
Centre de masse	$m\overrightarrow{OG} = \sum m_i \overrightarrow{OM_i}$	sur les éléments de symétrie
Champ des vitesses	$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$	$A, B \in S$; équiprojectivité
Translation	$\vec{\Omega} = \vec{0},\ \vec{v}(M) = \vec{v}(G)$	rectiligne ou circulaire
Rotation (axe fixe)	$\vec{v}(M) = r\omega\,\vec{u}_\theta$	r distance à l'axe
Vitesse de glissement	$\vec{v}_g = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)$	indépendante de $\mathcal{R}$, $\in \Pi$
Roulement sans glissement	$\vec{v}_g = \vec{0},\ v_G = R\omega$	sol fixe
Quantité de mouvement	$\vec{p} = m\vec{v}(G)$	$\vec{p}^{\star} = \vec{0}$
Moment cinétique	$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}$	$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta$
Solide, axe fixe	$L_\Delta = J_\Delta \omega,\ E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$	$J_\Delta = \int r^2 \mathrm{d}m$ (donné)

VI Exercices d'approfondissement

EXERCICE 14 Rouleau entre deux planches

✦✦✦✧✧



Un rouleau de rayon a, d'axe horizontal, est pris entre deux planches horizontales P_1 (au-dessus) et P_2 (au-dessous), animées de translations rectilignes de vitesses $v_1\vec{u}_x$ et $v_2\vec{u}_x$. Il roule sans glisser sur les deux planches.

Q-1) Exprimer la vitesse v_C de son centre et sa vitesse angulaire ω (on pose $\vec{\Omega} = -\omega\vec{u}_z$).

Q-2) Application au déménageur : on fait avancer une armoire posée sur des rouleaux à même le sol ($v_2 = 0$). Montrer que les rouleaux avancent deux fois moins vite que l'armoire. Combien de rouleaux faut-il faire passer de l'arrière à l'avant pour déplacer l'armoire de $6\,\mathrm{m}$, si elle mesure $1{,}0\,\mathrm{m}$ et que l'on dispose de 3 rouleaux ?

Q-3) Dans un roulement à billes, la bague extérieure est fixe et la bague intérieure tourne. Qualitativement, à quelle vitesse tourne la cage qui maintient les billes ?

EXERCICE 15 Cycloïde : trajectoire d'un point de la jante

✦✦✦✧✧

Une roue de rayon R roule sans glisser à vitesse constante $v_G = R\omega$ sur un sol horizontal. Un point M de la jante est en contact avec le sol à $t = 0$, à l'origine.

Q-1) Montrer que $x_M = R(\omega t - \sin\omega t)$ et $y_M = R(1 - \cos\omega t)$.

Q-2) Calculer la norme de la vitesse de M. Vérifier que $\vec{v}(M)$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{IM}$ et que $v = IM \cdot \omega$.

Q-3) Calculer la longueur d'une arche de cycloïde. La comparer au périmètre de la roue.

EXERCICE 16 Haltère et théorèmes de Kœnig

Deux petites masses m sont fixées aux extrémités A et B d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur $2a$. L'ensemble glisse sur une table horizontale : le centre G se déplace à vitesse $\vec{v}_G = v\,\vec{u}_x$ constante, et la tige tourne autour de G à la vitesse angulaire ω constante.

Q-1) Calculer $\vec{p}$, puis les vitesses de A et B dans le référentiel de la table.

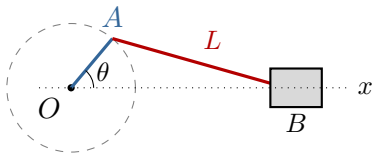
Q-2) Calculer directement E_c et vérifier le théorème de Kœnig.

Q-3) Calculer $\vec{L}_O$ pour un point O fixe de la table situé à la distance b sous la trajectoire de G, et vérifier la relation $\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge 2m\vec{v}_G + \vec{L}^\star$.

VII Classiques des concours

EXERCICE 17 Système bielle-manivelle

Dans un moteur, une manivelle OA de longueur r tourne autour de l'axe fixe $(O, \vec{u}_z)$ à vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$. Une bielle AB de longueur $L > r$ relie A au piston B, qui se déplace sur l'axe (Ox).



Q-1) Quelle est la nature du mouvement de la manivelle, du piston, de la bielle ?

Q-2) Exprimer $x_B(\theta)$, puis v_B.

Q-3) Retrouver v_B pour $\theta = \pi/2$ par équiprojectivité, sans calcul de dérivée.

Q-4) AN : $r = 4{,}0\,\text{cm}$, $L = 14\,\text{cm}$, $3000\,\text{tr/min}$. Vitesse maximale approximative du piston ?

EXERCICE 18 Vitesse de glissement et changement de référentiel

Un palet de centre G est posé sur un plateau horizontal qui tourne à la vitesse angulaire constante Ω_0 autour d'un axe vertical $(O, \vec{u}_z)$ fixe. Le palet ne tourne pas sur lui-même dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ (il est en translation) et son centre est immobile dans $\mathcal{R}$, à la distance d de l'axe.

Q-1) Calculer la vitesse de glissement du palet sur le plateau.

Q-2) Faire le calcul dans le référentiel du plateau, et conclure.

Q-3) Quelle condition faut-il remplir pour que le palet ne glisse pas sur le plateau ? Le palet est-il alors en translation dans $\mathcal{R}$?

EXERCICE 19 Transmission d'une bicyclette

Le plateau d'une bicyclette porte 48 dents et a un rayon $r_p = 10\,\text{cm}$; le pignon arrière, solidaire de la roue, porte 16 dents. La chaîne ne glisse ni sur le plateau ni sur le pignon. Les roues, de rayon $R = 35\,\text{cm}$, roulent sans glisser. Le cycliste pédale à la cadence de $80\,\text{tr/min}$.

Q-1) Justifier que le rapport des rayons du plateau et du pignon est égal au rapport de leurs nombres de dents. Exprimer la vitesse angulaire ω_r de la roue arrière en fonction de celle du pédalier ω_p.

Q-2) Calculer la vitesse de la chaîne par rapport au cadre, puis la vitesse de la bicyclette.

Q-3) Quelle distance parcourt-on pour un tour de pédalier (le « développement ») ?

Q-4) Quelle est, par rapport au sol, la vitesse d'un maillon du brin supérieur de la chaîne ? d'un point du sommet de la roue ?