LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

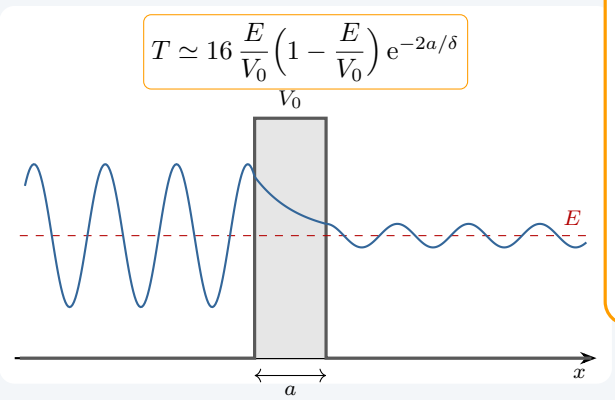
FICHE RÉSUMÉ

Q3

PHYSIQUE QUANTIQUE

États stationnaires dans des potentiels constants par morceaux

Marche de potentiel — Coefficients de réflexion et de transmission — Onde évanescente — Barrière et effet tunnel — Puits infini et quantification — Énergie de confinement



« *Les choses à très petite échelle ne se comportent comme rien de ce dont vous avez une expérience directe. Elles ne se comportent pas comme des ondes, elles ne se comportent pas comme des particules.*

— Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. III, chap. 1 (1965)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Puits de potentiel »

Q3 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Dans un potentiel constant par morceaux, la fonction d'onde stationnaire est, dans chaque région, une onde progressive ($E > V$) ou une exponentielle réelle ($E < V$), et l'on raccorde par continuité de φ et φ'. Il en résulte des effets sans équivalent classique : réflexion partielle au-dessus d'une marche, pénétration évanescente et **effet tunnel** à travers une barrière. Confinée dans un puits, la particule n'a accès qu'à des **énergies quantifiées** par les conditions aux limites, la plus basse étant l'énergie de confinement $\sim \hbar^2/(mL^2)$.

I Cadre et méthode

Définition — Modèles et exemples R

Variation de V sur une distance $d \ll \lambda_{\text{dB}} \Rightarrow$ discontinuité. **Marche** : électron à la surface d'un métal, neutron entrant dans un noyau, hétérojonction. **Barrière** : oxyde entre deux métaux, vide pointe-surface du STM, barrière coulombienne d'un noyau. **Puits** : électron dans une molécule conjuguée ou une boîte quantique, nucléon dans un noyau.

☞ Méthode — Résolution type M

1. Par région : $E > V_j$: $A_j e^{ik_j x} + B_j e^{-ik_j x}$, $k_j = \frac{\sqrt{2m(E-V_j)}}{\hbar}$; $E < V_j$: $C_j e^{q_j x} + D_j e^{-q_j x}$, $q_j = \frac{\sqrt{2m(V_j-E)}}{\hbar}$.
2. Éliminer les exponentielles divergentes dans une région infinie et l'onde venant de $+\infty$ s'il n'y a pas de source.
3. Raccorder (admis) : φ et φ' continues aux sauts finis ; $\varphi = 0$ au bord d'un mur infini (φ' discontinue).
4. Conclure : $R = |J_r|/|J_i|$, $T = |J_t|/|J_i|$ avec $J = |A|^2\hbar k/m$ (diffusion) ou quantification de E (états liés).

II Marche de potentiel

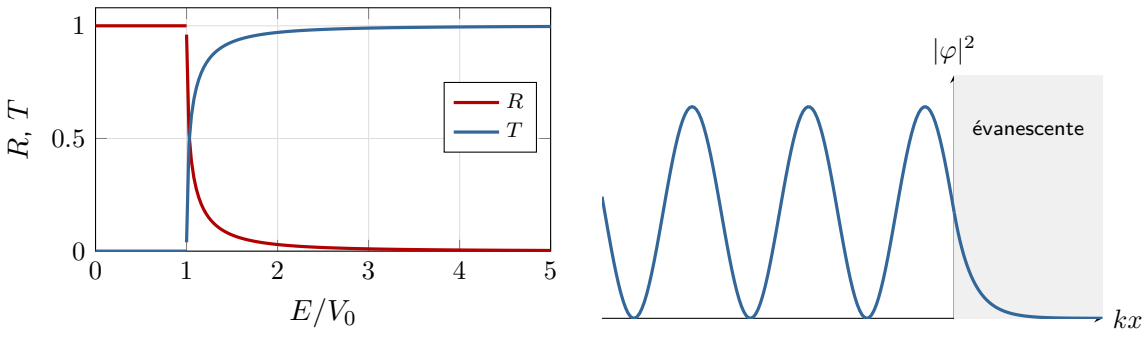


Fig. 1 : À gauche : R et T d'une marche (classiquement : $R = 1$ puis $R = 0$). À droite : densité pour $E = V_0/2$; onde stationnaire devant la marche, onde évanescente dans la marche.

Cas $E > V_0$: réflexion partielle R D

$\varphi_{\mathrm{I}} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x}$, $\varphi_{\mathrm{II}} = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x}$; $A + B = C$, $k_1(A - B) = k_2 C$:

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \qquad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \qquad R + T = 1$$

$$R = r^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}}\right)^2, \qquad T = \frac{k_2}{k_1}\, t^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

Réflexion même si $E > V_0$ (aussi pour une marche descendante) ; notable près du seuil ; $R \to 0$ si $E \gg V_0$. Région I : $|\varphi|^2 = |A|^2[1 + R + 2\sqrt{R}\cos(2k_1 x)]$, période $\lambda_1/2$; état de diffusion.

Cas $E < V_0$: réflexion totale, onde évanescente R D

$\varphi_{\mathrm{II}} = C\mathrm{e}^{-qx}$; $r = \dfrac{k - \mathrm{i}q}{k + \mathrm{i}q} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $t = \dfrac{2k}{k + \mathrm{i}q}$, $R = 1$, $T = 0$:

$$|\varphi_{\mathrm{I}}|^2 = 2|A|^2\,[1 + \cos(2kx + \theta)]\,, \qquad |\varphi_{\mathrm{II}}|^2 = |A|^2 \frac{4E}{V_0}\mathrm{e}^{-2qx}, \qquad \delta = \frac{1}{q} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Présence non nulle dans la région interdite, sur une profondeur δ, sans courant de probabilité. Analogies : réflexion totale en optique, plasma, effet de peau. Limite classique : $\delta \to 0$ si $m \to \infty$.

III Barrière de potentiel et effet tunnel

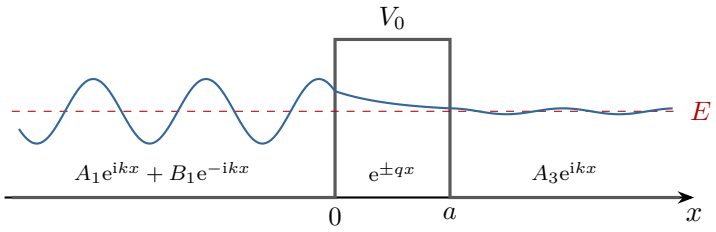


Fig. 2 : Effet tunnel : l'onde évanescente atteint $x = a$ et se raccorde à une onde transmise.

Coefficient de transmission (fourni) R

$$T = \left[1 + \frac{V_0^2 \,\mathrm{sh}^2(qa)}{4E(V_0 - E)}\right]^{-1} \underset{qa \gg 1}{\simeq} 16\,\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)\mathrm{e}^{-2a/\delta}$$

T décroît **exponentiellement** avec la largeur a, et décroît quand $V_0 - E$ ou m augmente : effet notable pour des électrons et $a \sim 1\,\mathrm{nm}$. Pour $E > V_0$: $T < 1$ sauf aux résonances $k_2 a = n\pi$.

Applications R

- **Microscope à effet tunnel** : $I \propto \mathrm{e}^{-2d/\delta}$, $\delta \simeq 0{,}09\,\mathrm{nm}$ pour $W \simeq 4{,}5\,\mathrm{eV}$; I divisé par ~ 10 quand d augmente de $0{,}1\,\mathrm{nm}$; résolution verticale picométrique.

- **Radioactivité** α (Gamow) : $E_\alpha = 4$ à $9\,\mathrm{MeV}$ sous une barrière coulombienne de 25 à $30\,\mathrm{MeV}$; $\tau \simeq 1/(fT)$ avec $f \sim 10^{21}\,\mathrm{s}^{-1}$; dépendance exponentielle de T en $E_\alpha \Rightarrow$ demi-vies de 10^{-7} à 10^{17} s (loi de Geiger-Nuttall).
- Aussi : fusion stellaire, inversion de NH_3, mémoires flash, diode tunnel.

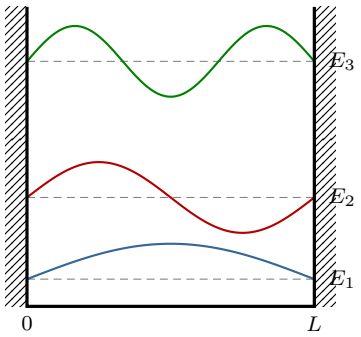
IV Puits infini et énergie de confinement

Puits infini $[0, L]$ R D

$\varphi = A\sin kx + B\cos kx$; $\varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$; $\varphi(L) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$; normalisation $A = \sqrt{2/L}$:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$n \in \mathbb{N}^*$; $n-1$ nœuds ; $L = n\lambda_n/2$ comme les modes d'une corde vibrante, mais $E_n \propto n^2$ (et non $\nu_n \propto n$).



Énergie de confinement R M

$E_1 > 0$: particule confinée jamais au repos ; $\Delta x \sim L \Rightarrow \Delta p \gtrsim \hbar/L \Rightarrow E \sim \dfrac{\hbar^2}{mL^2}$. **Puits non rectangulaire** : minimiser $E(\ell) = \dfrac{\hbar^2}{2m\ell^2} + V(\ell)$ (à un facteur ~ 2 près). Oscillateur : $E_{\min} \sim \hbar\omega$, exact : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Limite classique : écart relatif $\sim 2/n \to 0$, densité moyenne uniforme $1/L$.

★ À retenir

Situation	Classique	Quantique
Marche, $E > V_0$	toujours transmise	$R = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 \neq 0$, $R+T=1$
Marche, $E < V_0$	réfléchie, absente de $x > 0$	$R = 1$, onde évanescente sur $\delta = \hbar/\sqrt{2m(V_0-E)}$
Barrière, $E < V_0$	toujours réfléchie	effet tunnel, $T \simeq 16\frac{E}{V_0}(1-\frac{E}{V_0})\mathrm{e}^{-2a/\delta}$
Puits	toute énergie $\geqslant 0$, densité uniforme	$E_n = n^2h^2/(8mL^2)$, $E_1 > 0$, nœuds

Ordres de grandeur

- $\delta(\text{électron}) = 0{,}195\,\mathrm{nm}/\sqrt{(V_0-E)/\mathrm{eV}}$; proton : 43 fois moins.
- Électron, $E = 2\,\mathrm{eV}$, $V_0 = 5\,\mathrm{eV}$: $T \simeq 3\times10^{-3}$ pour $a = 0{,}4\,\mathrm{nm}$, 3×10^{-6} pour $0{,}8\,\mathrm{nm}$; proton : $\sim 10^{-132}$.
- E_1 : $0{,}38\,\mathrm{eV}$ pour un électron sur $1\,\mathrm{nm}$; quelques MeV pour un nucléon sur $10\,\mathrm{fm}$.

V Méthodes et pièges

☞ Méthode — Calculer R et T M

1. Écrire les ondes incidente (A), réfléchie (B), transmise (C), sans onde venant de $+\infty$.
2. Deux équations de raccordement par discontinuité ; résoudre pour $r = B/A$ et $t = C/A$.
3. Passer aux courants : $R = |r|^2$ (même milieu), $T = \frac{k_t}{k_i}|t|^2$ (milieux différents) ; vérifier $R + T = 1$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $T \neq |t|^2$ si les vecteurs d'onde diffèrent ; $|t| > 1$ est possible ; $r + t \neq 1$.
- Classiquement $v = \sqrt{2(E-V)/m}$ (et non $\sqrt{(E-V)/2m}$).
- Barrière épaisse : ne pas oublier le facteur $(1 - E/V_0)$ dans le préfacteur ; $\delta = 1/q$ caractérise φ, la densité décroît sur $\delta/2$.
- Puits infini : $n \geqslant 1$ ($n = 0$ donne $\varphi = 0$) ; $E_n \propto n^2$, pas n.
- φ' n'est pas continue au bord d'un mur infini.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je cite des exemples physiques de marche, barrière et puits et je justifie la modélisation.
- ☐ J'écris les solutions par région et j'applique les conditions de raccordement.
- ☐ J'établis r, t, R, T pour une marche $(E > V_0)$ et je vérifie $R + T = 1$.
- ☐ Je caractérise l'onde évanescente $(R = 1,\ \delta)$ et je compare au comportement classique.
- ☐ Je décris l'influence de a, $V_0 - E$ et m sur T ; j'explique le STM et la radioactivité α.
- ☐ J'établis φ_n et E_n du puits infini et je fais l'analogie avec la corde vibrante.
- ☐ J'estime une énergie de confinement par Heisenberg, y compris pour un puits non rectangulaire.