LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
**MP — Physique-chimie**
Année 2026-2027

FICHE RÉSUMÉ

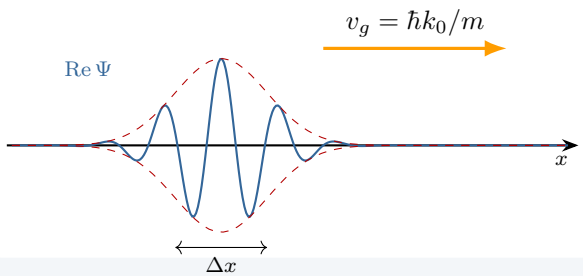
# Q2

## PHYSIQUE QUANTIQUE

# Particule libre

Ondes planes progressives — Relation de de Broglie — Dispersion, vitesses de phase et de groupe — Paquet d'ondes — Inégalité de Heisenberg — Courant de probabilité

$$\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2} \qquad p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$$




« *Nous devons nous rappeler que ce que nous observons n'est pas la nature elle-même, mais la nature exposée à notre méthode de questionnement.*

— Werner Heisenberg, *Physique et philosophie* (1958)

physionova
physionova.academy

**Pr. CHARIFI**
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Paquet d'ondes libre »

# Q2 — Fiche résumé

### L'essentiel en trois phrases

Les états stationnaires d'une particule libre sont des **ondes planes** $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$, d'impulsion $p=\hbar k$ (de Broglie) et d'énergie $E=\hbar\omega=\hbar^2k^2/2m$, mais elles ne sont pas normalisables : elles décrivent un faisceau, pas une particule localisée. Une particule réelle est un **paquet d'ondes**, superposition d'ondes planes, qui se déplace à la vitesse de groupe $v_g=\hbar k/m$ et dont la largeur obéit à l'**inégalité de Heisenberg** $\Delta x\,\Delta p_x\geqslant\hbar/2$. La probabilité s'écoule avec la densité de courant $J=|\Psi|^2\hbar k/m$.

## I États stationnaires de la particule libre

### Ondes planes progressives R D

$V=0$ : $\varphi''+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi=0$. Pour $E<0$ (exponentielles divergentes) ou $E=0$ ($\varphi$ affine), pas de solution physique ; pour $E>0$ :

$$\Psi(x,t)=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}+B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)},\qquad E=\hbar\omega=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{p^2}{2m},\qquad p=\hbar k=\frac{h}{\lambda}$$

$\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}$ : propagation vers les $x$ croissants ; $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ : vers les $x$ décroissants (convention $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\omega>0$).

### Définition — Non-normalisation, faisceau R

- $|\Psi|^2=|A|^2$ uniforme, $\int|\Psi|^2\mathrm{d}x=+\infty$ : impulsion parfaitement définie, particule pas du tout localisée ; idéalisation, comme l'onde plane monochromatique de l'optique.
- Sens statistique : faisceau de $N$ particules indépendantes dans le même état ; $\mathrm{d}N=N|A|^2\mathrm{d}x$, densité linéique $\rho=N|A|^2$ et $\Psi_N=\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$.

## II Dispersion, vitesses de phase et de groupe

### Relation de dispersion des ondes de matière R D

$$\omega=\frac{\hbar k^2}{2m},\qquad v_\varphi=\frac{\omega}{k}=\frac{\hbar k}{2m}=\frac{v}{2},\qquad v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\hbar k}{m}=\frac{p}{m}=v$$

Milieu **dispersif** même dans le vide. La vitesse de groupe est la vitesse de la particule : $\vec{p}=\hbar\vec{k}=m\vec{v}_g$ ; la vitesse de phase n'a pas de sens physique (elle dépend de l'origine des énergies).

# III Paquet d'ondes et inégalité de Heisenberg

## Définition — Paquet d'ondes R

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\, \mathrm{d}k$$

$A(k)$ non négligeable sur une largeur $\Delta k$ autour de $k_0$. Normalisable, localisé sur $\Delta x$ ; se déplace à $v_g = \hbar k_0/m$ ($\omega \simeq \omega_0 + v_g(k-k_0) \Rightarrow |\Psi|^2 = |F(x-v_g t)|^2$) et s'étale (dispersion).

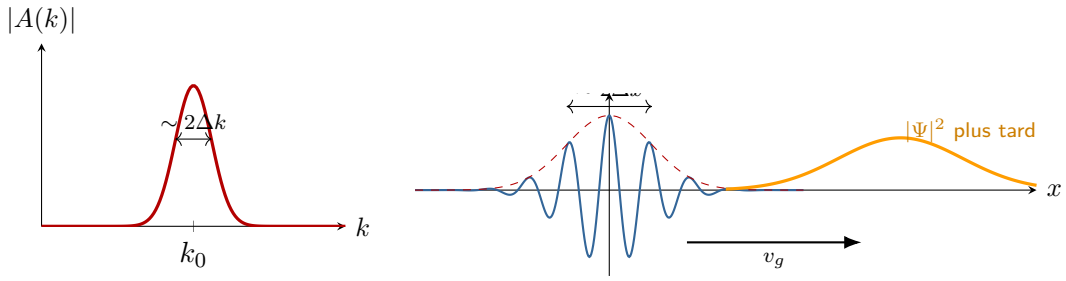



**Fig. 1 :** Distribution des vecteurs d'onde et paquet correspondant (partie réelle) ; le paquet avance à $v_g$ en s'étalant.

## Inégalité de Heisenberg spatiale R

Propriété de toute onde : $\Delta x\, \Delta k \gtrsim 1$ (égalité $\frac{1}{2}$ pour un paquet gaussien ; $\Delta x\, \delta k \sim 2\pi$ pour un spectre rectangulaire de largeur $\delta k$). Avec $p = \hbar k$ :

$$\Delta x\, \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

Localiser exige de superposer des impulsions variées. Ce n'est pas une imprécision de mesure : propriété intrinsèque, plus de trajectoire. Diffraction par une fente de largeur $a$ : $\Delta x \sim a$, $\Delta p_x \sim p\lambda/a = h/a$.

## Conséquences R M

- **Énergie de confinement** : confinée sur $L$, $\Delta p_x \gtrsim \hbar/L$ donc $\langle E_c \rangle \gtrsim \dfrac{\hbar^2}{2mL^2}$ : jamais au repos.
- **Étalement** : $\Delta v \sim \hbar/(m\Delta x_0)$, la largeur double en $\tau \sim 2m\Delta x_0^2/\hbar$.
- Inégalité temps-énergie : $\tau\, \Delta E \gtrsim \hbar/2$ (un état stationnaire n'évolue pas).

# IV Densité de courant de probabilité

## Courant de probabilité (expression fournie) R

$$\vec{J} = |\Psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m} = |\Psi|^2\, \vec{v}_g, \qquad \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

- Analogie : $|\Psi|^2 \leftrightarrow \rho$, $\vec{v}_g \leftrightarrow \vec{v}$, $\vec{J} \leftrightarrow \vec{j} = \rho\vec{v}$ ; en $\mathrm{s}^{-1}$ à une dimension (débit de probabilité).
- Faisceau : $J_N = \rho v =$ nombre de particules par seconde ($= I/e$ pour des électrons).

▶ État stationnaire : $\partial_x J = 0$, courant uniforme. Pour $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ : $J = \frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2)$, sans terme croisé (base de $R$ et $T$ en Q3).

**★ À retenir**

| | Onde plane | Paquet d'ondes |
|---|---|---|
| Forme | $Ae^{i(kx-\omega t)}$ | $\int A(k)e^{i(kx-\omega t)}dk$ |
| Impulsion | $p = \hbar k$ exacte ($\Delta p_x = 0$) | $\hbar k_0$ à $\hbar\Delta k$ près |
| Position | $\Delta x = \infty$, $\lvert\Psi\rvert^2$ uniforme | localisée sur $\Delta x \gtrsim 1/\Delta k$ |
| Normalisable | non (sens de faisceau) | oui (particule réelle) |
| Énergie | $E = \hbar\omega$ exacte, état stationnaire | dispersée, état non stationnaire |
| Vitesse | $v_\varphi = v/2$ (porteuse) | enveloppe à $v_g = v$, étalement |

**Ordres de grandeur**

▶ Électron de $10\,\mathrm{eV}$ : $v = 1{,}9 \times 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\lambda = 0{,}39\,\mathrm{nm}$, $\omega = 1{,}5 \times 10^{16}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

▶ Électron localisé à $0{,}1\,\mathrm{nm}$ : $\Delta v \gtrsim 6 \times 10^5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $E_c \sim 1\,\mathrm{eV}$ ; grain de $10^{-15}\,\mathrm{kg}$ à $1\,\mu\mathrm{m}$ près : $\Delta v \gtrsim 5 \times 10^{-14}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

▶ Étalement : $\tau \simeq 2 \times 10^{-16}\,\mathrm{s}$ pour un électron localisé à $0{,}1\,\mathrm{nm}$ ; plus que l'âge de l'Univers pour une bille de $1\,\mathrm{g}$ localisée au micromètre.

▶ Faisceau de $1\,\mu\mathrm{A}$ à $100\,\mathrm{eV}$ : $\simeq 6 \times 10^{12}$ électrons par seconde, un électron par micromètre de faisceau.

## V Méthodes et pièges

**☞ Méthode — Estimer avec Heisenberg** M

1. Identifier la région de confinement : $\Delta x \sim L$ (atome, noyau, fente, piège).
2. En déduire $\Delta p_x \sim \hbar/L$ (ou $\hbar/2L$), puis $\Delta v = \Delta p_x/m$ et $E_c \sim \Delta p_x^2/2m$.
3. Comparer à l'échelle du problème (vitesse, énergie de liaison, $k_BT$) pour conclure sur le caractère quantique.

**✗ Attention, erreurs fréquentes**

▶ La vitesse de la particule est $v_g = \hbar k/m$, *pas* $v_\varphi = \hbar k/2m$ ; de même, $J = |\Psi|^2\hbar k/m$ (et non $\hbar k/2m$).

▶ Une onde plane n'est pas normalisable : ne pas écrire $\int |A|^2 dx = 1$ ; on la normalise en densité de particules d'un faisceau.

▶ $E > 0$ pour une particule libre : les solutions en $e^{\pm qx}$ sont rejetées car elles divergent sur un axe infini.

▶ $J$ est un débit (en $\mathrm{s^{-1}}$), $|\Psi|^2$ une densité linéique (en $\mathrm{m^{-1}}$).

▶ Heisenberg n'est pas une erreur de mesure, et la notion de trajectoire perd son sens à l'échelle quantique.

### Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais établir les états stationnaires de la particule libre et justifier $E > 0$.
- ☐ Je relie $E$, $\omega$, $k$, $p$ et $\lambda$ (de Broglie, Planck-Einstein) et je calcule ces grandeurs.
- ☐ J'explique pourquoi une onde plane n'est pas normalisable et je l'interprète pour un faisceau.
- ☐ J'établis la relation de dispersion, $v_\varphi$ et $v_g$, et j'identifie $v_g$ à la vitesse de la particule.
- ☐ J'explique la construction d'un paquet d'ondes et le lien $\Delta x\,\Delta k \gtrsim 1 \Rightarrow$ Heisenberg.
- ☐ Je sais faire une estimation d'ordre de grandeur avec l'inégalité de Heisenberg.
- ☐ J'exploite $J = |\Psi|^2 \hbar k/m$ par analogie avec $\vec{j} = \rho\vec{v}$ (faisceau, conservation).