LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

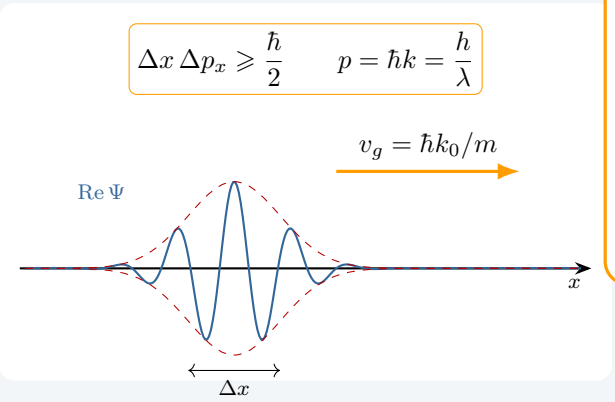
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

Q2

PHYSIQUE QUANTIQUE

Particule libre

Ondes planes progressives — Relation de de Broglie — Dispersion, vitesses de phase et de groupe — Paquet d'ondes — Inégalité de Heisenberg — Courant de probabilité



> *Nous devons nous rappeler que ce que nous observons n'est pas la nature elle-même, mais la nature exposée à notre méthode de questionnement.*
>
> — Werner Heisenberg, *Physique et philosophie* (1958)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Paquet d'ondes libre »

Q2 — Particule libre

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Établir les états stationnaires d'une particule libre et reconnaître des ondes planes progressives harmoniques.
- Relier l'énergie de la particule et le vecteur d'onde de l'onde plane associée ; retrouver la relation de de Broglie.
- Interpréter la difficulté de normalisation d'une onde plane et lui donner un sens pour un faisceau de particules.
- Établir la relation de dispersion des ondes de matière et calculer les vitesses de phase et de groupe ; identifier la vitesse de groupe à la vitesse de la particule.
- Expliquer, en s'appuyant sur l'inégalité de Heisenberg spatiale, que la localisation d'une particule s'obtient par superposition d'ondes planes (paquet d'ondes).
- Interpréter et exploiter l'expression fournie de la densité de courant de probabilité $J = |\Psi|^2 \hbar k/m$ par analogie avec la densité de courant électrique.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. On s'appuie sur le chapitre Q1 (fonction d'onde, équation de Schrödinger, états stationnaires) et sur la physique des ondes (dispersion, vitesse de groupe). Conformément au programme, le paquet d'ondes est présenté de façon heuristique, sans en développer la théorie. La simulation PhysioNova « Paquet d'ondes libre » permet de construire un paquet en superposant des ondes planes, de régler sa largeur et de le voir se déplacer et s'étaler.
Des **exercices d'application corrigés** sont placés juste après les notions qu'ils illustrent ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I États stationnaires d'une particule libre . . . 3
I.1 Équation à résoudre . . . 3
I.2 Ondes planes progressives . . . 3
II Difficulté de normalisation et interprétation en faisceau . . . 4
II.1 Une onde plane n'est pas normalisable . . . 4
II.2 Faisceau de particules . . . 4
III Relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe . . . 5
IV Paquet d'ondes et inégalité de Heisenberg . . . 6
IV.1 Localiser par superposition . . . 6
IV.2 Inégalité de Heisenberg spatiale . . . 7
IV.3 Mouvement du paquet : vitesse de groupe . . . 8
V Densité de courant de probabilité . . . 9
V.1 Définition par analogie . . . 10
VI Synthèse . . . 11
VII Exercices d'approfondissement . . . 11
VIII Classiques des concours . . . 13

I États stationnaires d'une particule libre

I.1 Équation à résoudre

Une particule est **libre** si elle n'est soumise à aucune interaction : son énergie potentielle est constante, choisie nulle, $V(x) = 0$. Elle peut se trouver n'importe où sur l'axe (Ox) et son énergie est purement cinétique. L'équation de Schrödinger s'écrit

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

On cherche ses états stationnaires $\Psi(x,t) = \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$, où φ vérifie

$$\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\,\varphi(x) = 0.$$

Seules les énergies positives sont acceptables D

- Si $E < 0$: $\varphi = A\mathrm{e}^{qx} + B\mathrm{e}^{-qx}$ avec $q = \sqrt{-2mE}/\hbar$. Le premier terme diverge en $+\infty$, le second en $-\infty$: il faut $A = B = 0$, ce qui n'a pas de sens physique.
- Si $E = 0$: $\varphi = Ax + B$; la non-divergence impose $A = 0$, et une constante n'est pas plus normalisable qu'une onde plane : ce cas limite ne décrit pas de particule.
- Si $E > 0$: $\varphi = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ avec $k = \sqrt{2mE}/\hbar$; ces fonctions oscillent et restent bornées.

C'est cohérent avec Q1 : l'énergie d'une particule ne peut être inférieure au minimum du potentiel, ici nul.

I.2 Ondes planes progressives

États stationnaires de la particule libre R

Les états stationnaires d'énergie $E > 0$ s'écrivent

$$\Psi(x,t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)}, \qquad E = \hbar\omega, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

C'est la superposition de deux **ondes planes progressives harmoniques** se propageant l'une vers les x croissants, l'autre vers les x décroissants. Une particule se déplaçant dans le sens $+\vec{u}_x$ est décrite par le seul premier terme, $\Psi = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$.

Énergie, vecteur d'onde et relation de de Broglie R D

L'énergie de la particule libre est cinétique, $E = \dfrac{p^2}{2m}$. En comparant à $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$:

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{h}{p} \ \text{(de Broglie)}, \qquad E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

L'onde plane $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ décrit une particule d'impulsion $p = \hbar k$ parfaitement déterminée ($\Delta p_x = 0$) et d'énergie $E = \hbar\omega$ parfaitement déterminée.

Remarque

En mécanique quantique, on écrit toujours la dépendance temporelle sous la forme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ avec $\omega = E/\hbar$. Le sens de propagation est donc lu sur le signe devant kx : $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}$ vers les x croissants, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ vers les x décroissants. À trois dimensions, $\Psi = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ et $\vec{p} = \hbar\vec{k}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Onde associée à un électron et à un neutron ✦✧✧✧✧

Q-1) Un électron libre a une énergie cinétique de $10\,\mathrm{eV}$. Calculer sa vitesse, le vecteur d'onde k, la longueur d'onde et la pulsation ω de l'onde plane associée.

Q-2) Mêmes questions pour un neutron ($m_n = 1{,}675 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) de même énergie. Quelle grandeur est commune aux deux ondes ?

Correction

Q-1) $v = \sqrt{2E/m_e} = 1{,}88\times10^{6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $k = \sqrt{2m_eE}/\hbar = 1{,}62\times10^{10}\,\mathrm{m^{-1}}$; $\lambda = 2\pi/k = 0{,}388\,\mathrm{nm}$; $\omega = E/\hbar = 1{,}52\times10^{16}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Q-2) $v = 4{,}37\times10^{4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $k = 6{,}95\times10^{11}\,\mathrm{m^{-1}}$, $\lambda = 9{,}0\,\mathrm{pm}$ (plus courte d'un facteur $\sqrt{m_n/m_e} = 43$) ; la pulsation $\omega = E/\hbar$ ne dépend que de l'énergie : elle est la même.

II Difficulté de normalisation et interprétation en faisceau

II.1 Une onde plane n'est pas normalisable

Particule non localisée R

Pour $\Psi = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$, la densité de probabilité $|\Psi|^2 = |A|^2$ est **uniforme** sur tout l'axe : la particule n'est pas localisée du tout (Δx infini), et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

L'onde plane ne peut donc pas décrire à elle seule une particule physique. C'est, comme l'onde plane monochromatique de l'optique, une **idéalisation** : la limite d'un état d'impulsion de mieux en mieux déterminée et de moins en moins localisé.

C'est l'illustration extrême de l'inégalité de Heisenberg : $\Delta p_x = 0$ impose $\Delta x = \infty$. On la lève de deux façons : en superposant des ondes planes pour former un **paquet d'ondes** localisé (§ IV), ou en donnant un sens statistique à l'onde plane, ce que l'on fait maintenant.

II.2 Faisceau de particules

Onde plane et faisceau R

On considère un faisceau de N particules libres, identiques, indépendantes, toutes dans l'état décrit par $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$. Le nombre moyen de particules détectées entre x et $x+\mathrm{d}x$ vaut $\mathrm{d}N = N|A|^2\mathrm{d}x$: la

quantité $\rho = N|A|^2$ est la **densité linéique de particules** du faisceau. On décrit alors le faisceau par

$$\Psi_N(x,t) = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \qquad \int_{\mathcal{D}} |\Psi_N|^2 \mathrm{d}x = \text{nombre de particules dans le domaine } \mathcal{D}.$$

Remarque

Pour un faisceau, l'onde plane est un très bon modèle : un faisceau d'électrons de largeur spectrale faible, sur une longueur macroscopique, se comporte comme une onde plane à l'échelle des dispositifs (cristal, marche de potentiel). C'est en ce sens qu'on l'utilisera en Q3 pour définir les coefficients de réflexion et de transmission.

III Relation de dispersion, vitesses de phase et de groupe

Relation de dispersion des ondes de matière R D

En reportant $\Psi = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ dans l'équation de Schrödinger libre : $\hbar\omega\Psi = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}\Psi$, d'où

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}, \qquad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}, \qquad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}.$$

v_φ dépend de k : la propagation des ondes de matière est **dispersive**, même dans le vide.

Vitesse de la particule R

La vitesse de groupe est égale à la vitesse classique de la particule, $v_g = p/m = v$, alors que la vitesse de phase en vaut la moitié :

$$v_g = v = \frac{p}{m} = 2\,v_\varphi, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k} = m\vec{v}_g.$$

La vitesse de phase n'a pas de sens physique direct (elle dépend d'ailleurs du choix de l'origine des énergies). C'est l'enveloppe d'un paquet d'ondes, qui se déplace à v_g, qui transporte la probabilité de présence (§ IV.3).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 **Vitesses de phase et de groupe** ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer v_φ et v_g pour l'électron de $10\,\mathrm{eV}$ de l'exercice 1.

Q-2) Montrer que v_φ dépend de l'origine des énergies potentielles, mais pas v_g (on prendra un potentiel constant V_0 et la relation $\hbar\omega = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + V_0$).

Correction

Q-1) $v_g = v = 1{,}88 \times 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_\varphi = v/2 = 9{,}4 \times 10^5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Q-2) $v_\varphi = \dfrac{\hbar k}{2m} + \dfrac{V_0}{\hbar k}$ dépend de V_0, alors que $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{\hbar k}{m}$ n'en dépend pas : seule v_g est une grandeur physique.

IV Paquet d'ondes et inégalité de Heisenberg

IV.1 Localiser par superposition

L'équation de Schrödinger étant linéaire, toute superposition d'ondes planes est encore solution. Superposons N ondes planes de même amplitude, de vecteurs d'onde régulièrement répartis sur un intervalle de largeur δk centré sur k_0. À $t = 0$, elles sont toutes en phase en $x = 0$ et interfèrent constructivement ; ailleurs, leurs phases se dispersent et elles se détruisent.

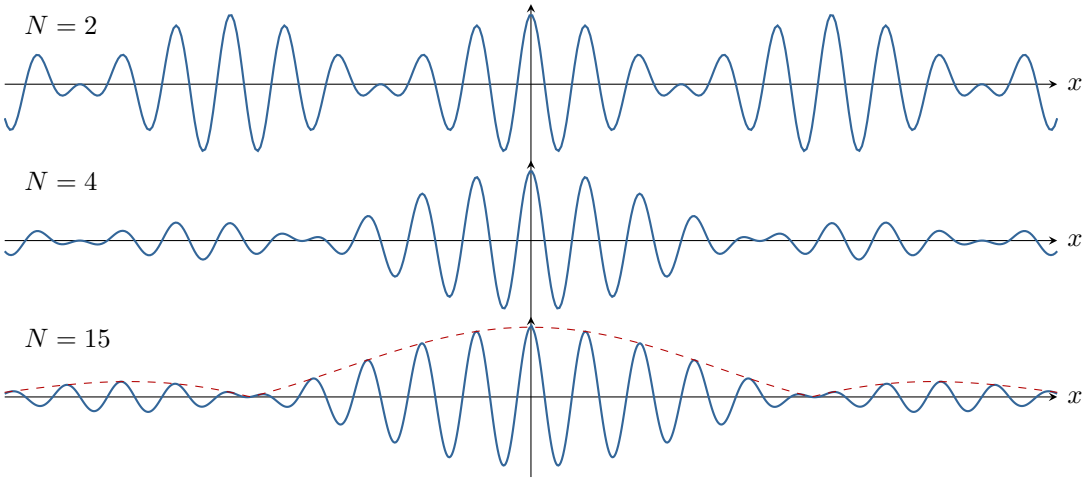


Fig. 1 : Partie réelle de la superposition de N ondes planes de vecteurs d'onde régulièrement répartis entre $k_1 = 5$ et $k_2 = 6$ (unités arbitraires), à $t = 0$. Plus N est grand, plus les répliques du maximum central s'éloignent : à la limite d'une distribution continue, il ne reste qu'un paquet localisé, dont l'enveloppe est tracée en tirets.

Définition — Paquet d'ondes R

Un **paquet d'ondes** est une superposition continue d'ondes planes de vecteurs d'onde voisins de k_0 :

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega(k)t)}\,\mathrm{d}k, \qquad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m},$$

où l'amplitude $A(k)$ est non négligeable sur une largeur Δk autour de k_0. Contrairement à l'onde plane, un paquet d'ondes est **normalisable** : il décrit une particule réelle, localisée dans une région de largeur Δx.

Paquet à spectre rectangulaire D

Prenons $A(k) = A_0$ pour $k \in [k_0 - \delta k/2,\, k_0 + \delta k/2]$ et 0 ailleurs. À $t = 0$:

$$\Psi(x,0) = A_0 \int_{k_0-\delta k/2}^{k_0+\delta k/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = A_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta k\,x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta k\,x/2}}{\mathrm{i}x} = A_0\,\delta k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\delta k\,x}{2}\right).$$

L'onde porteuse e^{ik_0x} est modulée par une enveloppe en sinus cardinal, dont le pic central s'étend entre les zéros $x = \pm 2\pi/\delta k$. La largeur du paquet est donc $\Delta x \sim 2\pi/\delta k$:

$$\Delta x \cdot \delta k \sim 2\pi \qquad \text{: plus le paquet est étroit, plus son spectre en } k \text{ est large.}$$

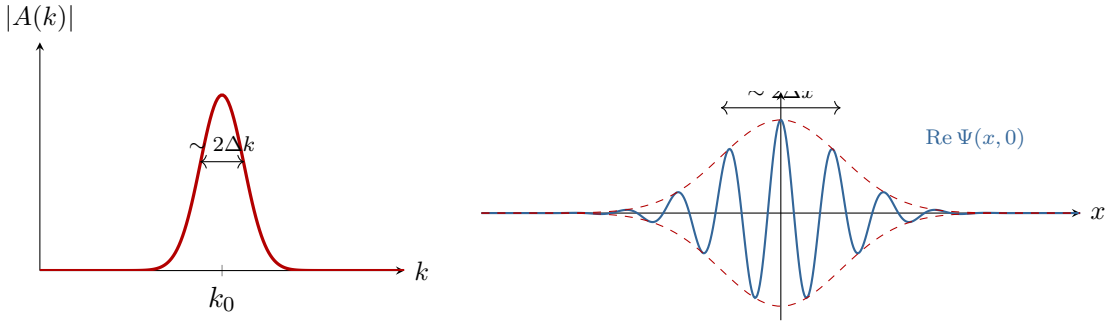


Fig. 2 : Paquet d'ondes gaussien : la distribution $A(k)$ des vecteurs d'onde (à gauche) et le paquet correspondant à $t = 0$ (à droite). Rendre le paquet deux fois plus étroit exige une distribution deux fois plus large.

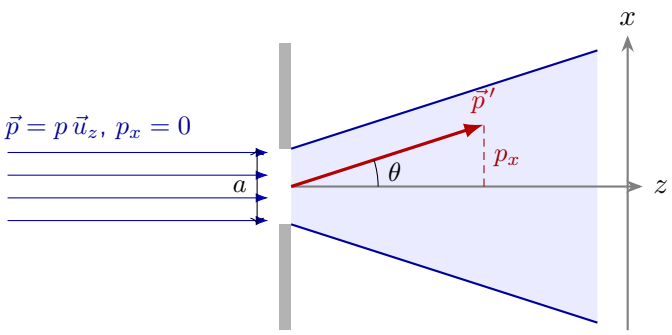
IV.2 Inégalité de Heisenberg spatiale

La relation $\Delta x\,\Delta k \gtrsim 1$ est une propriété mathématique de toute onde, déjà rencontrée en traitement du signal : un signal de durée Δt a un spectre de largeur $\Delta\nu \sim 1/\Delta t$. Pour un paquet gaussien, avec les écarts-types, on obtient exactement $\Delta x\,\Delta k = \frac{1}{2}$; aucune autre forme ne fait mieux. En multipliant par $\hbar$ et avec $p = \hbar k$:

Inégalité de Heisenberg spatiale R

$$\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

- Pour **localiser** une particule (réduire Δx), il faut superposer des ondes planes de vecteurs d'onde, donc d'impulsions, de plus en plus variés : Δp_x augmente.
- À la limite $\Delta p_x \to 0$ (onde plane), $\Delta x \to \infty$: particule non localisée.
- Il ne s'agit pas d'une imprécision des mesures, mais d'une propriété intrinsèque de l'état : position et impulsion ne sont jamais simultanément déterminées. La notion de trajectoire perd son sens.



$$\Delta x \simeq a$$
$$\Delta p_x \simeq p\sin\theta \simeq p\,\frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}$$
$$\Rightarrow\ \Delta x\,\Delta p_x \sim h$$

Fig. 3 : Diffraction par une fente : localiser la particule à a près disperse son impulsion transverse sur $\Delta p_x \sim h/a$, en accord avec l'inégalité de Heisenberg.

Énergie de confinement R M

Une particule confinée dans une région de taille L a $\Delta x \lesssim L$, donc $\Delta p_x \gtrsim \hbar/L$. Comme $\langle p_x^2\rangle \geqslant \Delta p_x^2$, son énergie cinétique moyenne vérifie

$$\langle E_c\rangle \gtrsim \frac{\hbar^2}{2mL^2} \qquad \text{(en ordre de grandeur).}$$

Une particule quantique confinée ne peut pas être au repos : c'est l'**énergie de confinement**, étudiée précisément en Q3 (puits infini).

Remarque

Il existe une inégalité **temps-énergie**, $\tau\,\Delta E \gtrsim \hbar/2$, où τ est la durée caractéristique d'évolution du système. Pour un état stationnaire, rien n'évolue ($\tau \to \infty$) et l'énergie est parfaitement définie ($\Delta E = 0$) ; un état qui évolue a nécessairement une énergie dispersée (Q4). Elle n'a pas le même statut que l'inégalité spatiale, le temps n'étant pas une grandeur mesurée sur la particule.

IV.3 Mouvement du paquet : vitesse de groupe

Le paquet se déplace à la vitesse de la particule D

Pour un paquet étroit en k, on développe la relation de dispersion autour de k_0 : $\omega(k) \simeq \omega_0 + v_g\,(k-k_0)$ avec $v_g = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0} = \frac{\hbar k_0}{m}$. Alors

$$\Psi(x,t) \simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x-\omega_0 t)} \int A(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k_0)(x-v_g t)}\,\mathrm{d}k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x-\omega_0 t)}\; F(x-v_g t).$$

L'enveloppe F, donc $|\Psi|^2 = |F(x-v_g t)|^2$, se translate en bloc à la vitesse $v_g = \hbar k_0/m = p_0/m$: le maximum de probabilité de présence suit le mouvement de la particule classique. La porteuse, elle, avance à $v_\varphi = v_g/2$.

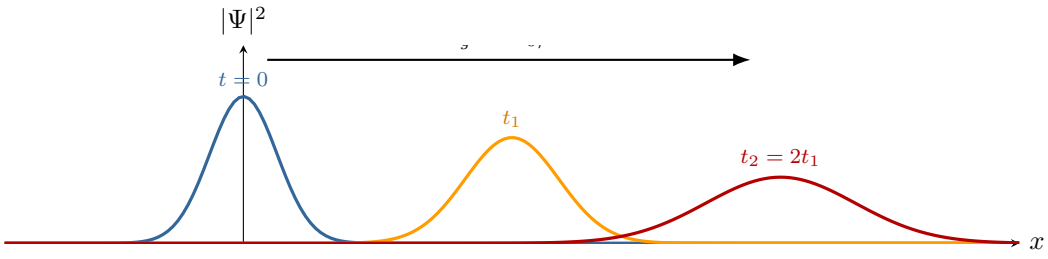


Fig. 4 : Le paquet se déplace à la vitesse de groupe et s'étale, l'aire sous la courbe restant égale à 1 : c'est l'effet de la dispersion.

Remarque

Étalement du paquet. Les composantes de vecteurs d'onde différents ont des vitesses de groupe différentes : leur dispersion $\Delta v \sim \hbar\Delta k/m \sim \hbar/(m\Delta x_0)$ fait croître la largeur du paquet. Il double environ au bout d'une durée $\tau \sim m\Delta x_0^2/\hbar$: 10^{-16} s pour un électron localisé à l'échelle atomique, des milliards d'années pour un objet macroscopique (approfondissement °2).

Ordres de grandeur

- Électron localisé à $\Delta x = 0{,}1\,\text{nm}$: $\Delta v \geqslant \hbar/(2m_e\Delta x) \simeq 6\times10^{5}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: énorme, d'où l'impossibilité de parler d'orbite dans l'atome.
- Grain de poussière de $10^{-15}\,\text{kg}$ localisé au micromètre : $\Delta v \geqslant 5\times10^{-14}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: imperceptible ; la mécanique classique est la limite des objets massifs.
- Faisceau d'électrons de $100\,\text{eV}$ à $\pm0{,}5\,\text{eV}$: longueur des paquets $\sim 25\,\text{nm}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Indéterminations : de l'atome au grain de poussière

Q-1) Un électron est localisé à $\Delta x = 0{,}10\,\text{nm}$ près. Estimer l'indétermination minimale sur sa quantité de mouvement et sur sa vitesse, puis l'ordre de grandeur de son énergie cinétique en eV. Conclure.

Q-2) Mêmes questions (sauf l'énergie) pour un grain de masse $10^{-15}\,\text{kg}$ localisé à $1\,\mu\text{m}$ près.

Correction

Q-1) $\Delta p_x \geqslant \hbar/(2\Delta x) = 5{,}3\times10^{-25}\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\Delta v \geqslant 5{,}8\times10^{5}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $E_c \sim \Delta p_x^2/(2m_e) = 1{,}5\times10^{-19}\,\text{J} \simeq 1\,\text{eV}$: c'est l'ordre de grandeur des énergies atomiques, qui sont donc des énergies de confinement.

Q-2) $\Delta p_x \geqslant 5{,}3\times10^{-29}\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\Delta v \geqslant 5{,}3\times10^{-14}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: totalement indécelable.

EXERCICE 4 Longueur d'un paquet électronique

Un canon à électrons délivre des électrons d'énergie $E_0 = 100\,\text{eV}$, avec une dispersion en énergie de largeur totale $\delta E = 1{,}0\,\text{eV}$.

Q-1) Exprimer la largeur δk correspondante en fonction de k_0, δE et E_0 (on différenciera $E = \hbar^2k^2/2m$). Calculer k_0 et δk.

Q-2) En déduire l'ordre de grandeur de la longueur $\Delta x \sim 2\pi/\delta k$ des paquets d'ondes du faisceau. Comparer à la longueur d'onde et à la taille d'un cristal de nickel de $1\,\mu\text{m}$. Le modèle d'onde plane est-il justifié pour décrire la diffraction ?

Correction

Q-1) $\text{d}E = \frac{\hbar^2k}{m}\text{d}k$, donc $\frac{\delta k}{k_0} = \frac{\delta E}{2E_0} = 5\times10^{-3}$. $k_0 = \sqrt{2m_eE_0}/\hbar = 5{,}12\times10^{10}\,\text{m}^{-1}$ et $\delta k = 2{,}6\times10^{8}\,\text{m}^{-1}$.

Q-2) $\Delta x \sim 25\,\text{nm}$, soit environ deux cents longueurs d'onde ($\lambda = 0{,}12\,\text{nm}$) et une centaine de distances interatomiques : à l'échelle de la cellule de diffraction, le paquet se comporte comme une onde plane (onde quasi monochromatique), bien qu'il soit petit devant le cristal.

V Densité de courant de probabilité

V.1 Définition par analogie

Pour une onde plane ou un paquet quasi monochromatique de vecteur d'onde moyen k, la probabilité de présence se déplace à la vitesse $v_g = \hbar k/m$. La probabilité de trouver la particule entre x et $x + \mathrm{d}x$, $|\Psi|^2 \mathrm{d}x$, est donc celle qu'elle franchisse l'abscisse x pendant $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v_g$: il s'écoule par unité de temps une probabilité $|\Psi|^2 v_g$. En électromagnétisme, la densité de courant d'un ensemble de charges de densité ρ et de vitesse $\vec{v}$ est $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

Définition — Densité de courant de probabilité (expression fournie) R

$$\vec{J}(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 \frac{\hbar\vec{k}}{m} = |\Psi(x,t)|^2 \vec{v}_g.$$

- Analogie : $|\Psi|^2 \leftrightarrow \rho$ (densité de charge), $\vec{v}_g = \hbar\vec{k}/m \leftrightarrow \vec{v}$, $\vec{J} \leftrightarrow \vec{j}$.
- À une dimension, J s'exprime en s^{-1} : c'est une probabilité de passage par unité de temps.
- Pour un faisceau décrit par $\Psi_N = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$, $J_N = \rho\, v$ est le **nombre de particules** franchissant un point par unité de temps (débit).

Conservation de la probabilité R

Comme la charge électrique, la probabilité est conservée localement :

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \qquad \left(\text{à 3D : } \frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0\right).$$

Pour un état stationnaire, $|\Psi|^2$ ne dépend pas du temps, donc $\partial J/\partial x = 0$: le courant de probabilité est **uniforme** (à 3D, son flux à travers toute surface fermée est nul).

Remarque

Dans le cas général (hors programme), $J = \dfrac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left(\Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\dfrac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)$, expression établie en Q1 (approfondissement °1) ; elle redonne $|A|^2\hbar k/m$ pour une onde plane. Pour deux ondes de sens opposés, $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$, elle donne $J = \frac{\hbar k}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right)$: les courants incident et réfléchi s'ajoutent algébriquement, sans terme d'interférence. C'est ce qui permettra en Q3 de définir les coefficients de réflexion et de transmission.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $J = |\Psi|^2\hbar k/m$ et non $|\Psi|^2\hbar k/(2m)$: c'est la vitesse de groupe $v = p/m$ qui intervient, pas la vitesse de phase. (Une version du poly de référence comporte cette coquille.)
- J est un débit de probabilité, pas une densité de probabilité : à une dimension, il est en s^{-1}, $|\Psi|^2$ en m^{-1}.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Faisceau d'électrons ✦✦✧✧✧

Un canon délivre un faisceau d'électrons d'intensité $I = 1{,}0\,\mu\text{A}$, accélérés depuis le repos sous $U = 100\,\text{V}$. On le modélise par $\Psi_N = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$.

Q-1) Calculer le nombre d'électrons émis par seconde, leur vitesse et la densité linéique ρ. Combien d'électrons y a-t-il en moyenne par micromètre de faisceau ?

Q-2) Le faisceau entre dans une région où les électrons sont ralentis (état stationnaire). En utilisant la conservation de la probabilité, montrer que ρv est uniforme. Comment évolue la densité linéique ?

Correction

Q-1) $J_N = I/e = 6{,}2\times10^{12}\,\text{s}^{-1}$; $v = \sqrt{2eU/m_e} = 5{,}9\times10^{6}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\rho = J_N/v = 1{,}05\times10^{6}\,\text{m}^{-1}$, soit environ un électron par micromètre : les électrons du faisceau sont très éloignés les uns des autres, ce qui justifie de les traiter comme indépendants.

Q-2) En régime stationnaire, $\partial J/\partial x = 0$: $J = \rho v$ est le même partout. Si v diminue, ρ augmente : les électrons « s'accumulent » comme des voitures qui ralentissent sur une autoroute à débit constant.

VI Synthèse

★ À retenir

- Particule libre ($V = 0$) : états stationnaires $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kx+\omega t)}$, avec $E > 0$.
- $E = \hbar\omega = \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$, $p = \hbar k = h/\lambda$ (de Broglie).
- Onde plane : $|\Psi|^2$ uniforme, non normalisable, impulsion parfaitement définie ; sens statistique pour un faisceau : $|\Psi_N|^2 = \rho$ densité linéique de particules.
- Dispersion : $\omega = \hbar k^2/(2m)$; $v_g = \hbar k/m = v$, $v_\varphi = v/2$.
- Paquet d'ondes $\int A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\mathrm{d}k$: normalisable, localisé, se déplace à v_g et s'étale ; $\Delta x\,\Delta k \gtrsim 1$.
- Heisenberg : $\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \hbar/2$; confinement sur $L \Rightarrow E_c \gtrsim \hbar^2/(2mL^2)$.
- Courant de probabilité : $J = |\Psi|^2\hbar k/m$; $\partial_t|\Psi|^2 + \partial_x J = 0$; J uniforme en régime stationnaire.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 6 Le paquet le plus simple : deux ondes ✦✦✦✧✧

On superpose deux ondes planes de même amplitude : $\Psi = A\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega_1t)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2x-\omega_2t)}\right]$, avec $k_2 = k_1 + \delta k$, $\delta k \ll k_1$.

Q-1) Calculer $|\Psi|^2$. Décrire la figure obtenue (période spatiale, vitesse de déplacement des maxima).

Q-2) Montrer que les maxima se déplacent à $\frac{\omega_2-\omega_1}{k_2-k_1}$ et que cette vitesse tend vers v_g quand $\delta k \to 0$. Que vaut la vitesse de la porteuse ?

Q-3) Cette fonction est-elle normalisable ? Que faut-il faire pour obtenir un unique maximum ?

Correction

Q-1) $|\Psi|^2 = |A|^2\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta k\,x-\delta\omega\,t)}\right|^2 = 2|A|^2\left[1+\cos(\delta k\,x-\delta\omega\,t)\right]$: des « battements spatiaux » de période $2\pi/\delta k$, qui se translatent.

Q-2) Les maxima vérifient $\delta k\,x-\delta\omega\,t = 2n\pi$, donc avancent à $\delta\omega/\delta k = \frac{\hbar(k_1+k_2)}{2m} \to \frac{\hbar k_1}{m} = v_g$. La porteuse avance à $\bar\omega/\bar k \simeq \hbar k_1/(2m) = v_g/2$.

Q-3) Non : $|\Psi|^2$ est périodique. Il faut superposer une infinité d'ondes de vecteurs d'onde répartis continûment (§ IV) pour repousser les répliques à l'infini.

EXERCICE 7 Étalement d'un paquet gaussien

★★★☆☆

On admet qu'un paquet gaussien libre de largeur initiale Δx_0 (minimale, à $t=0$) a pour largeur $\Delta x(t) = \Delta x_0\sqrt{1+\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ avec $\tau = \dfrac{2m\,\Delta x_0^2}{\hbar}$.

Q-1) Justifier l'ordre de grandeur de τ à partir de l'inégalité de Heisenberg. Quelle est la loi d'étalement pour $t \gg \tau$?

Q-2) Calculer τ pour un électron avec $\Delta x_0 = 0{,}1\,\mathrm{nm}$, pour un grain de $10^{-15}\,\mathrm{kg}$ avec $\Delta x_0 = 1\,\mu\mathrm{m}$, et pour une bille de $1\,\mathrm{g}$ avec la même Δx_0. Comparer à l'âge de l'Univers ($4\times10^{17}\,\mathrm{s}$).

Q-3) L'aire sous $|\Psi|^2$ varie-t-elle au cours de l'étalement ? Et la hauteur du pic ?

Correction

Q-1) $\Delta v = \Delta p/m \gtrsim \hbar/(2m\Delta x_0)$; la largeur double quand $\Delta v\,t \sim \Delta x_0$, soit $t \sim 2m\Delta x_0^2/\hbar = \tau$. Pour $t \gg \tau$, $\Delta x \simeq \Delta x_0\,t/\tau = \frac{\hbar}{2m\Delta x_0}\,t$: étalement linéaire à la vitesse Δv.

Q-2) Électron : $\tau = 1{,}7\times10^{-16}\,\mathrm{s}$, un électron libre localisé à l'échelle atomique se délocalise presque instantanément. Grain : $\tau = 1{,}9\times10^{7}\,\mathrm{s}$, environ sept mois. Bille : $\tau = 1{,}9\times10^{19}\,\mathrm{s}$, cinquante fois l'âge de l'Univers.

Q-3) L'aire reste égale à 1 (conservation de la probabilité) ; la hauteur du pic décroît comme $1/\Delta x(t)$.

EXERCICE 8 Le microscope de Heisenberg

★★★☆☆

On veut mesurer la position x d'un électron au repos en l'éclairant avec des photons de longueur d'onde λ et en observant la lumière diffusée avec un microscope d'ouverture angulaire 2α (demi-angle α autour de l'axe du microscope, perpendiculaire à x).

Q-1) La résolution d'un microscope est limitée par la diffraction : $\Delta x \simeq \dfrac{\lambda}{2\sin\alpha}$. Comment améliorer la précision sur la position ?

Q-2) Un photon diffusé entre dans le microscope en faisant un angle compris entre $-\alpha$ et α avec l'axe. Par conservation de la quantité de mouvement, montrer que l'impulsion de recul de l'électron selon x est indéterminée d'environ $\Delta p_x \simeq \dfrac{2h\sin\alpha}{\lambda}$.

Q-3) Conclure. Pourquoi cet argument ne suffit-il pas à justifier l'inégalité de Heisenberg ?

Correction

Q-1) Diminuer λ (rayons X, γ) ou augmenter α.

Q-2) Le photon diffusé, d'impulsion $\simeq h/\lambda$, a une composante selon x comprise entre $-\frac{h}{\lambda}\sin\alpha$ et $+\frac{h}{\lambda}\sin\alpha$; on ignore laquelle, puisqu'il suffit qu'il entre dans l'objectif. L'électron reçoit l'impulsion opposée, à $\Delta p_x \simeq \frac{2h\sin\alpha}{\lambda}$ près.

Q-3) $\Delta x\,\Delta p_x \simeq h$, indépendamment de λ et α : on ne peut améliorer l'une des précisions qu'au détriment de l'autre. Cet argument décrit une perturbation due à la mesure ; l'inégalité de Heisenberg est plus profonde : elle vaut pour l'état lui-même, avant toute mesure, comme le montre l'analyse en paquet d'ondes.

EXERCICE 9 Courant de probabilité de deux ondes opposées

On considère l'état stationnaire $\varphi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$, avec A et $B = |B|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ complexes, A réel.

Q-1) Calculer $|\varphi|^2$ et commenter la présence d'un terme d'interférence. Préciser la période spatiale des oscillations.

Q-2) Avec l'expression générale $J = \dfrac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left(\varphi^*\varphi' - \varphi\varphi^{*\prime}\right)$, montrer que $J = \dfrac{\hbar k}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right)$.

Q-3) Que vaut J si $|B| = |A|$? Décrire alors $|\varphi|^2$ (lien avec les ondes stationnaires) et interpréter.

Correction

Q-1) $|\varphi|^2 = A^2 + |B|^2 + 2A|B|\cos(2kx - \beta)$: les ondes incidente et « réfléchie » interfèrent ; la densité oscille avec la période $\pi/k = \lambda/2$.

Q-2) $\varphi^*\varphi' = \mathrm{i}k\left(A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + B^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) = \mathrm{i}k\left(A^2 - |B|^2 - AB\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx} + AB^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\right)$. Les deux derniers termes forment un imaginaire pur $2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(AB^*\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx})$, donc leur contribution à $\varphi^*\varphi'$ est réelle et disparaît dans $\varphi^*\varphi' - \text{c.c.} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\varphi^*\varphi')$. Il reste $2\mathrm{i}\,k(A^2 - |B|^2)$ et $J = \frac{\hbar k}{m}(A^2 - |B|^2)$.

Q-3) $J = 0$ et $|\varphi|^2 = 2A^2[1 + \cos(2kx - \beta)]$ présente des zéros fixes : c'est une onde stationnaire au sens usuel. Autant de probabilité part vers la droite que vers la gauche : c'est la situation d'une réflexion totale (Q3).

VIII Classiques des concours

EXERCICE 10 Longueur d'onde thermique : quand un gaz devient-il quantique ?

Dans un gaz à l'équilibre à la température T, on associe à chaque particule de masse m la longueur d'onde thermique $\lambda_{\text{th}} = \dfrac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$, longueur d'onde de de Broglie typique. On note n la densité volumique de particules et $d = n^{-1/3}$ la distance moyenne entre voisines.

Q-1) Justifier que λ_{th} est bien de l'ordre de h/p pour une particule d'énergie cinétique $\sim k_B T$.

Q-2) Interpréter le critère : le gaz est classique si $\lambda_{\text{th}} \ll d$, quantique (on dit « dégénéré ») si $\lambda_{\text{th}} \gtrsim d$.

Q-3) Appliquer au diazote de l'air à $300\,\mathrm{K}$ et $1\,\mathrm{bar}$ ($m = 28$ u), puis aux électrons de conduction du cuivre ($n = 8{,}5 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$) à $300\,\mathrm{K}$.

Q-4) Un nuage d'atomes de rubidium 87 de densité $n = 1 \times 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$ devient un condensat de Bose-Einstein lorsque $n\lambda_{\text{th}}^3 = 2{,}61$. Calculer la température de transition.

Correction

Q-1) $p \sim \sqrt{2mk_BT}$, d'où $h/p \sim h/\sqrt{2mk_BT}$; le facteur $\sqrt{\pi}$ vient d'une moyenne précise sur la distribution des vitesses.

Q-2) Si $\lambda_{\text{th}} \ll d$, les paquets d'ondes des particules ne se recouvrent pas : chaque particule est localisable et suit une trajectoire, le gaz est classique. Si $\lambda_{\text{th}} \gtrsim d$, les fonctions d'onde se recouvrent : les effets quantiques collectifs dominent.

Q-3) Air : $\lambda_{\text{th}} = 19\,\mathrm{pm}$ et $d = (k_BT/P)^{1/3} = 3{,}5\,\mathrm{nm}$, $d/\lambda_{\text{th}} \simeq 180$: gaz parfaitement classique. Électrons du cuivre : $\lambda_{\text{th}} = 4{,}3\,\mathrm{nm}$ et $d = 0{,}23\,\mathrm{nm}$: $\lambda_{\text{th}} \simeq 19\,d$, le gaz d'électrons est fortement quantique, même à température ambiante (ce qui explique la faible contribution des électrons à la capacité thermique des métaux).

Q-4) $\lambda_{\text{th}} = (2{,}61/n)^{1/3} = 0{,}30\,\mu\mathrm{m}$ et $T = \dfrac{h^2}{2\pi m k_B \lambda_{\text{th}}^2} = 0{,}40\,\mu\mathrm{K}$: il faut des techniques de refroidissement par laser puis par évaporation (condensats obtenus en 1995).

EXERCICE 11 Ondes de matière relativistes et microscope électronique

Pour une particule relativiste de masse m, l'énergie totale vérifie $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. On admet que les relations $E = \hbar\omega$ et $p = \hbar k$ restent valables.

Q-1) Établir la relation de dispersion $\omega(k)$. Calculer v_φ et v_g ; montrer que $v_\varphi v_g = c^2$ et que v_g est la vitesse $v = pc^2/E$ de la particule. La vitesse de phase supérieure à c pose-t-elle problème ?

Q-2) Montrer que, pour $pc \ll mc^2$, on retrouve à une constante près la relation de dispersion non relativiste. Que représente cette constante, et pourquoi n'a-t-elle pas d'effet physique ?

Q-3) Dans un microscope électronique, les électrons ($m_ec^2 = 511\,\mathrm{keV}$) sont accélérés sous $U = 200\,\mathrm{kV}$. Calculer leur longueur d'onde en tenant compte de la relativité, puis avec la formule non relativiste. Quelle erreur relative commet-on ? ($hc = 1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}$)

Q-4) Calculer la vitesse des électrons en fraction de c.

Correction

Q-1) $\hbar^2\omega^2 = \hbar^2k^2c^2 + m^2c^4$, soit $\omega = \sqrt{c^2k^2 + \omega_0^2}$ avec $\omega_0 = mc^2/\hbar$. $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2k}{\omega} = \frac{pc^2}{E}$, et $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$: $v_\varphi v_g = c^2$. Comme $E = \gamma mc^2$ et $p = \gamma mv$, $v_g = v < c$. La vitesse de phase, supérieure à c, ne transporte ni énergie ni information : aucun problème.

Q-2) $E = mc^2\sqrt{1 + p^2/(m^2c^2)} \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m}$, soit $\hbar\omega \simeq mc^2 + \frac{\hbar^2k^2}{2m}$. La constante mc^2 (énergie de masse) décale toutes les énergies de la même quantité : elle multiplie la fonction d'onde par un facteur de phase global $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mc^2t/\hbar}$, sans effet sur $|\Psi|^2$ ni sur v_g (exercice d'application de Q1).

Q-3) $E = m_ec^2 + eU = 711\,\mathrm{keV}$ et $pc = \sqrt{E^2 - (m_ec^2)^2} = 494\,\mathrm{keV}$, d'où $\lambda = hc/(pc) = 2{,}51\,\mathrm{pm}$. Non relativiste : $pc = \sqrt{2m_ec^2\,eU} = 452\,\mathrm{keV}$ et $\lambda = 2{,}74\,\mathrm{pm}$: erreur de $9\,\%$, inacceptable pour l'étalonnage d'un microscope.

Q-4) $v/c = pc/E = 0{,}695$.