LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

FICHE RÉSUMÉ

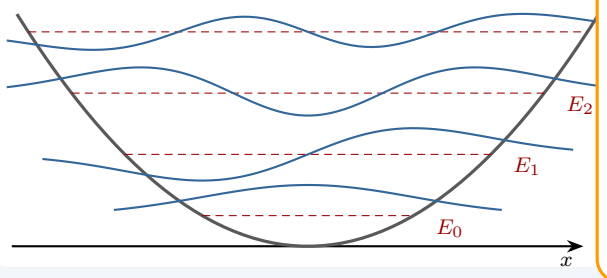
Q1

PHYSIQUE QUANTIQUE

Équation de Schrödinger

Fonction d'onde et probabilité de présence — Équation de Schrödinger — Principe de superposition — États stationnaires — Régions classiquement interdites

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$



« Les lois physiques fondamentales nécessaires à la théorie mathématique d'une grande partie de la physique et de la chimie tout entière sont ainsi complètement connues ; la difficulté est seulement que leur application exacte conduit à des équations beaucoup trop compliquées pour être résolues.

— Paul Dirac, « Quantum Mechanics of Many-Electron Systems », *Proc. R. Soc. A* (1929)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Puits de potentiel »

Q1 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

L'état d'une particule est décrit par une **fonction d'onde** complexe $\Psi(x,t)$ dont le module au carré est une densité de probabilité de présence. Son évolution est régie par l'**équation de Schrödinger**, linéaire et du premier ordre en temps : principe de superposition et évolution déterministe. Dans un potentiel indépendant du temps, les **états stationnaires** $\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$ ont une énergie bien définie $E = \hbar\omega$ et une densité de probabilité figée.

I Dualité onde-corpuscule : rappels

Planck-Einstein et de Broglie R

$$E = h\nu = \hbar\omega, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \qquad \lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{p}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1{,}05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$$

☞ Méthode — Quantique ou classique ? M

- **Action** : former S = énergie × durée = quantité de mouvement × distance (ou S^2 = énergie × masse × distance^2). Si $S \sim \hbar$: quantique ; si $S \gg \hbar$: classique.
- **de Broglie** : si $\lambda_{\mathrm{dB}} \sim D$ (taille caractéristique), effets ondulatoires ; si $\lambda_{\mathrm{dB}} \ll D$, trajectoire classique.

II Fonction d'onde et probabilités

Définition — Fonction d'onde R

- $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}$: **amplitude de probabilité** (postulat de Born) ; $\mathrm{d}\mathcal{P} = |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$;
- $|\Psi|^2 = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x}$: densité de probabilité de présence ; Ψ en $\mathrm{m}^{-1/2}$ à une dimension ;
- normalisation : $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1$ (fonction de carré sommable).

Moyenne et indétermination R

$$\langle x\rangle = \int x\,|\Psi|^2 \mathrm{d}x, \qquad \Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}, \qquad \Delta x\,\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

Pour accéder à $|\Psi|^2$: mesurer la position de $N \gg 1$ particules identiques préparées dans le même état et tracer l'histogramme.

III Équation de Schrödinger

Équation de Schrödinger à une dimension R

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x,t)\,\Psi$$

- $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi$: terme d'**énergie cinétique** ($p^2/2m$, $p=\hbar k$) ; $V\Psi$: énergie potentielle.
- **Postulat** (justification heuristique : $\hbar\omega = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + V$ pour une onde plane).
- **Linéaire** : principe de superposition $\lambda_1\Psi_1+\lambda_2\Psi_2$; **premier ordre en** t : $\Psi(x,0)$ détermine $\Psi(x,t)$; conserve la normalisation.
- Non relativiste, sans spin. V défini à une constante près (facteur de phase $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_0t/\hbar}$).

IV États stationnaires

Séparation des variables D

$\Psi = \varphi(x)f(t) \Rightarrow \mathrm{i}\hbar\dfrac{f'}{f} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\varphi''}{\varphi} + V(x) = E$ (constante) :

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}, \qquad E=\hbar\omega, \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + V(x)\varphi = E\varphi$$

★ À retenir

Propriété	Contenu
Énergie	$E=\hbar\omega$ (Planck-Einstein), réelle, bien définie ($\Delta E=0$)
Densité	$\lvert\Psi\rvert^2 = \lvert\varphi(x)\rvert^2$ indépendante de t ; $\int\lvert\varphi\rvert^2\mathrm{d}x = 1$
Conditions sur φ	univaluée ; normalisable (bornée à l'infini) ; continue ; φ' continue si V continu ou à saut fini ; $\varphi=0$ au bord d'une région où $V=+\infty$
$E>V$ (permise)	$\varphi''=-k^2\varphi$, $k=\sqrt{2m(E-V)}/\hbar$: oscillations $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}$
$E<V$ (interdite)	$\varphi''=q^2\varphi$, $q=\sqrt{2m(V-E)}/\hbar$: exponentielles $\mathrm{e}^{\pm qx}$, décroissante dans une région infinie

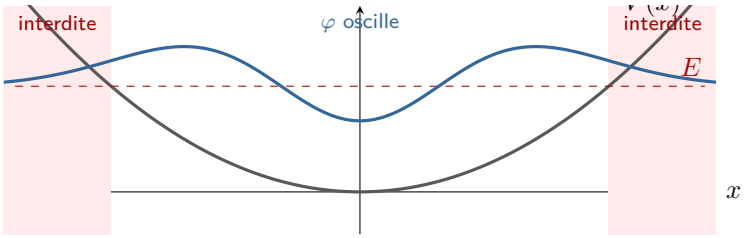


Fig. 1 : État stationnaire : oscillant là où $E>V$, évanescent (mais non nul) là où $E<V$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

État stationnaire ≠ onde stationnaire. Une onde stationnaire est réelle, de la forme $F(x)G(t)$, avec des nœuds fixes ; un état stationnaire est complexe, de module constant dans le temps, et peut être une onde progressive (particule libre $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$).

Ordres de grandeur

- $h = 6{,}63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$, $\hbar = 1{,}05\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$, $m_e = 9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{eV} = 1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{J}$, $hc \simeq 1240\,\mathrm{eV\cdot nm}$, $\hbar^2/(2m_e) \simeq 0{,}0381\,\mathrm{eV\cdot nm^2}$.
- Électron sous $100\,\mathrm{V}$: $\lambda_{\mathrm{dB}} \simeq 0{,}12\,\mathrm{nm}$; neutron thermique : $0{,}15\,\mathrm{nm}$.
- Atome d'hydrogène (fondamental) : $\varphi \propto \mathrm{e}^{-r/a_0}$, $a_0 = 53\,\mathrm{pm}$, $E = -13{,}6\,\mathrm{eV}$; oscillateur harmonique : $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, fondamental gaussien de largeur $\sqrt{\hbar/m\omega}$.

V Exemples d'états stationnaires à connaître

Système	$V(x)$	$\varphi(x)$	E
Particule libre (Q2)	0	$A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$	$\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}$
Puits infini $[0,L]$ (Q3)	0 dans le puits, $+\infty$ ailleurs	$\sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\dfrac{n\pi x}{L}$	$n^2\dfrac{h^2}{8mL^2}$
Oscillateur	$\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$	$(\pi\sigma^2)^{-1/4}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$, $\sigma=\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$	$\dfrac{1}{2}\hbar\omega$
Puits en $1/\mathrm{ch}^2$	$-\dfrac{\hbar^2}{ma^2\,\mathrm{ch}^2(x/a)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}\,\mathrm{ch}(x/a)}$	$-\dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$
Atome H (3D, $1s$)	$-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-r/a_0}}{\sqrt{\pi a_0^3}}$	$-\dfrac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} = -13{,}6\,\mathrm{eV}$

Dans chaque cas, E est strictement supérieure au minimum de V (énergie de confinement) et, pour les états liés, la fonction d'onde déborde dans les régions classiquement interdites : pour l'oscillateur, la particule est détectée hors de $[-\sigma,\sigma]$ avec une probabilité de $16\,\%$; pour l'hydrogène, au-delà de $2a_0$ avec une probabilité de $24\,\%$.

VI Méthodes et pièges

☞ Méthode — Exploiter une fonction d'onde donnée M

1. Normaliser : $\int|\Psi|^2\mathrm{d}x = 1$ (penser aux symétries et à $\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-x/b}\mathrm{d}x = n!\,b^{n+1}$).
2. Probabilité sur un intervalle : $\int_a^b|\Psi|^2\mathrm{d}x$; position la plus probable : maximum de $|\Psi|^2$; $\langle x\rangle$, Δx.
3. Vérifier qu'une φ est un état stationnaire : calculer φ''/φ et identifier E (et éventuellement V) dans $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi''}{\varphi}+V=E$ pour tout x.
4. Prévoir l'allure : tracer V et la droite E, repérer régions permises et interdites, raccorder (φ, φ' continues).

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\mathrm{d}\mathcal{P} = |\Psi|^2 \mathrm{d}x$, pas $\Psi\,\mathrm{d}x$; $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$ (et non l'inverse).
- $\langle x\rangle$ n'est ni la position la plus probable, ni forcément une position possible (densité nulle au milieu pour $n = 2$ dans un puits).
- La dépendance temporelle est $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$ (signe moins, $\hbar$ et non h).
- L'équation de Schrödinger est réversible ($\Psi^*(x,-t)$ est solution), contrairement à l'équation de diffusion.
- Une combinaison d'états stationnaires d'énergies *différentes* n'est pas stationnaire (Q4).

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais décider, par une action ou par λ_{dB}, si un traitement quantique est nécessaire.
- ☐ Je sais normaliser une fonction d'onde et calculer une probabilité, $\langle x\rangle$ et Δx.
- ☐ Je connais l'équation de Schrödinger, le rôle de chaque terme et ses propriétés (linéarité, déterminisme).
- ☐ Je sais refaire la séparation des variables et écrire l'équation indépendante du temps.
- ☐ Je relie E à la pulsation de Ψ (Planck-Einstein) et je distingue état stationnaire et onde stationnaire.
- ☐ Je connais les conditions de continuité et l'allure de φ selon le signe de $E - V$.
- ☐ Je sais vérifier qu'une fonction donnée est un état stationnaire et en déduire son énergie.