LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

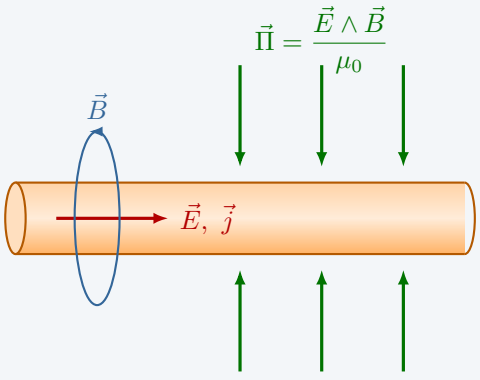
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

EM5

ÉLECTROMAGNÉTISME

Énergie du champ électromagnétique

Force et puissance volumiques — Loi d'Ohm locale et effet Joule — Densité d'énergie électromagnétique — Vecteur de Poynting — Identité de Poynting — Transport de l'énergie



la puissance Joule entre par la surface latérale

Depuis Maxwell, la réalité physique est pensée comme représentée par des champs continus, régis par des équations aux dérivées partielles. Ce changement dans la conception de la réalité est le plus profond et le plus fécond que la physique ait connu depuis Newton.

— Albert Einstein, « L'influence de Maxwell sur l'évolution de la conception de la réalité physique » (1931)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Condensateur en charge et vecteur de Poynting »

EM5 — Énergie électromagnétique

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Exprimer la force électromagnétique volumique et la puissance volumique $\vec{j}\cdot\vec{E}$ cédée par le champ aux porteurs de charge.
- Utiliser la loi d'Ohm locale ; exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule et la résistance d'un conducteur.
- Connaître la densité volumique d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting ; donner des ordres de grandeur de flux énergétiques.
- Établir l'identité de Poynting sous forme locale et intégrale, et interpréter chacun de ses termes.
- Mener un bilan d'énergie sur un conducteur, un condensateur, une bobine ou un câble, en calculant un flux du vecteur de Poynting.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Ce chapitre s'appuie sur les équations de Maxwell (EM4) et prépare les aspects énergétiques des ondes (W1 à W3). La simulation PhysioNova « Condensateur en charge et vecteur de Poynting » visualise le vecteur de Poynting qui **entre** par la surface latérale d'un condensateur en charge.
Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Action du champ électromagnétique sur la matière . . . 3
I.1 Force électromagnétique volumique . . . 3
I.2 Puissance cédée par le champ aux porteurs . . . 3
I.3 Conducteur ohmique et effet Joule . . . 3
II Énergie électromagnétique et vecteur de Poynting . . . 4
II.1 Densité volumique d'énergie . . . 5
II.2 Vecteur de Poynting . . . 5
III Bilan d'énergie : identité de Poynting . . . 6
III.1 Forme locale . . . 6
III.2 Forme intégrale . . . 7
III.3 Moyennes temporelles en régime sinusoïdal . . . 7
IV Exemples de transport d'énergie . . . 8
IV.1 Établissement du courant dans un solénoïde . . . 8
IV.2 Câble coaxial : l'énergie voyage dans l'isolant . . . 8
IV.3 Onde plane dans le vide . . . 9
V Synthèse . . . 10
VI Exercices d'approfondissement . . . 10
VII Classiques des concours . . . 11

I Action du champ électromagnétique sur la matière

I.1 Force électromagnétique volumique

Considérons plusieurs types de porteurs de charge q_k, de densités particulaires n_k et de vitesses moyennes $\vec{v}_k$. Un volume $\mathrm{d}\tau$ en contient $n_k \mathrm{d}\tau$ de chaque type, et chacun subit la force de Lorentz $q_k(\vec{E} + \vec{v}_k \wedge \vec{B})$.

Force électromagnétique volumique R D

La force exercée par le champ sur la matière contenue dans $\mathrm{d}\tau$ est $\mathrm{d}\vec{F} = \vec{f}_v \, \mathrm{d}\tau$ avec

$$\vec{f}_v = \rho \, \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \qquad (\mathrm{N \cdot m^{-3}})$$

Démonstration. $\mathrm{d}\vec{F} = \sum_k n_k \mathrm{d}\tau \, q_k(\vec{E} + \vec{v}_k \wedge \vec{B}) = (\sum_k n_k q_k) \, \vec{E} \, \mathrm{d}\tau + (\sum_k n_k q_k \vec{v}_k) \wedge \vec{B} \, \mathrm{d}\tau$, et l'on reconnaît $\rho = \sum_k n_k q_k$ et $\vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$.

Dans un conducteur neutre ($\rho = 0$), il ne reste que la **densité volumique de force de Laplace** $\vec{j} \wedge \vec{B}$; pour un fil, $\vec{j} \, \mathrm{d}\tau = I \, \mathrm{d}\vec{\ell}$ redonne $\mathrm{d}\vec{F} = I \mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ (chapitre EM2).

I.2 Puissance cédée par le champ aux porteurs

Puissance volumique R D

La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge est

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} \qquad (\mathrm{W \cdot m^{-3}})$$

La force magnétique, perpendiculaire à chaque vitesse, ne travaille pas.

Démonstration. La puissance reçue par les porteurs de $\mathrm{d}\tau$ vaut $\sum_k n_k \mathrm{d}\tau \, q_k(\vec{E} + \vec{v}_k \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_k = (\sum_k n_k q_k \vec{v}_k) \cdot \vec{E} \, \mathrm{d}\tau$ car $(\vec{v}_k \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_k = 0$.

> **Remarque**
>
> Si $p > 0$, le champ fournit de l'énergie à la matière (conducteur ohmique, faisceau de particules accélérées). Si $p < 0$, la matière cède de l'énergie au champ : c'est le cas dans un générateur, où des forces non électromagnétiques (chimiques, mécaniques) font circuler les charges « à contre-champ ».

I.3 Conducteur ohmique et effet Joule

Définition — Loi d'Ohm locale R

Dans un conducteur ohmique, homogène et isotrope, en régime permanent ou lentement variable, la densité de courant est proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{j} = \sigma \, \vec{E}$$

où σ est la **conductivité** du matériau $(\mathrm{S \cdot m^{-1}})$; $\frac{1}{\sigma}$ est sa résistivité $(\Omega \cdot \mathrm{m})$. C'est une loi **phénoménologique**, qui n'est valable que pour des fréquences faibles devant l'inverse de la durée moyenne entre deux collisions des porteurs ($\approx 10^{-14}\,\mathrm{s}$ dans un métal).

Ordres de grandeur

Conductivités ($\mathrm{S\cdot m^{-1}}$) : cuivre 6×10^{7} ; aluminium $3{,}8\times10^{7}$; eau de mer 4 à 5 ; eau pure 5×10^{-6} ; verre 10^{-12} environ. La conductivité varie sur plus de vingt ordres de grandeur d'un matériau à l'autre.

Effet Joule et résistance R D

La puissance volumique cédée par le champ à un conducteur ohmique est toujours positive ; elle est dissipée sous forme thermique (**effet Joule**) :

$$p_J = \vec{j}\cdot\vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} \geq 0$$

Un conducteur cylindrique de longueur L et de section S, parcouru par un courant uniforme, a pour résistance $R = \frac{L}{\sigma S}$ et dissipe $\mathcal{P}_J = RI^2$.

Démonstration. Le champ est uniforme et axial : $U = EL$ et $I = jS = \sigma ES$, d'où $U = \frac{L}{\sigma S}I$. La puissance totale vaut $\iiint p_J\,\mathrm{d}\tau = \sigma E^2 SL = \frac{U^2}{R} = RI^2$: on retrouve la loi d'Ohm intégrale et la loi de Joule de l'électrocinétique.

Remarque

Modèle microscopique (non exigible). Un électron libre subit $-e\vec{E}$ et une force de frottement $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$ modélisant les collisions. En régime permanent, $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$, d'où $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$: modèle de Drude, $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Un câble domestique ✦✧✧✧✧

Un conducteur en cuivre de longueur $L = 10\,\mathrm{m}$ et de section $S = 1{,}5\,\mathrm{mm^2}$ est parcouru par $I = 10\,\mathrm{A}$.

Q-1) Calculer j, E, la résistance R et la puissance dissipée.

Q-2) Calculer la puissance volumique dissipée et vérifier la cohérence des résultats.

EXERCICE 2 — Résistance de fuite entre deux cylindres ✦✦✧✧✧

L'espace compris entre deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons $a < b$ et de hauteur h est rempli d'un matériau de conductivité σ faible. On impose la tension $U = V(a) - V(b) > 0$.

Q-1) En régime permanent, justifier que l'intensité I qui traverse un cylindre de rayon r ne dépend pas de r. En déduire $\vec{j}(r)$ puis $\vec{E}(r)$.

Q-2) Exprimer U et en déduire la résistance de fuite R.

Q-3) Calculer la puissance dissipée par intégration de p_J et vérifier qu'elle vaut $\frac{U^2}{R}$.

II Énergie électromagnétique et vecteur de Poynting

II.1 Densité volumique d'énergie

Définition — Densité volumique d'énergie électromagnétique R

Le champ électromagnétique stocke de l'énergie, répartie dans tout l'espace avec la densité volumique

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\mathrm{J \cdot m^{-3}})$$

L'énergie contenue dans un volume V est $U_{em} = \iiint_V u_{em}\,\mathrm{d}\tau$.

Cette expression est affirmée. On la vérifie sur deux exemples classiques de l'électrocinétique.

Condensateur plan et solénoïde D

- **Condensateur plan** (armatures de surface S distantes de e, tension U, effets de bord négligés) : $E = \frac{U}{e}$ uniforme entre les armatures, nul ailleurs ; $U_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{e^2}Se = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e}U^2 = \frac{1}{2}CU^2$.
- **Solénoïde long** (N spires, longueur ℓ, section S, courant i) : $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ à l'intérieur, nul à l'extérieur ; $U_{em} = \frac{B^2}{2\mu_0}S\ell = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}i^2 = \frac{1}{2}Li^2$.

Dans l'ARQS, l'énergie du condensateur est purement électrique et celle de la bobine purement magnétique : le champ magnétique d'un condensateur qui se charge lentement, comme le champ électrique induit dans une bobine, n'apportent que des corrections négligeables.

II.2 Vecteur de Poynting

Définition — Vecteur de Poynting R

Le transport de l'énergie électromagnétique est décrit par le **vecteur de Poynting**

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (\mathrm{W \cdot m^{-2}})$$

La puissance électromagnétique qui traverse une surface orientée S est son flux, $\mathcal{P} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Sa direction est celle de l'écoulement de l'énergie : c'est une densité de « courant d'énergie », comme $\vec{j}$ est une densité de courant de charge.

Ordres de grandeur

Source	Flux surfacique moyen de puissance $\langle \Pi \rangle$
Rayonnement solaire hors atmosphère (constante solaire)	$1{,}36\,\mathrm{kW \cdot m^{-2}}$
Rayonnement solaire au sol, Soleil au zénith	$\approx 1\,\mathrm{kW \cdot m^{-2}}$
Pointeur laser de $1\,\mathrm{mW}$, faisceau de $1\,\mathrm{mm^2}$	$\approx 1\,\mathrm{kW \cdot m^{-2}}$
Laser de découpe de $1\,\mathrm{kW}$ focalisé sur $0{,}1\,\mathrm{mm^2}$	$\approx 10^{10}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$
Téléphone portable à $10\,\mathrm{cm}$	$1\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ à $10\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$
Valeur limite d'exposition du public à $900\,\mathrm{MHz}$	$\approx 4{,}5\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$

> **Remarque**
>
> Le vecteur de Poynting n'est défini qu'à un champ de divergence nulle près : seul son **flux à travers une surface fermée** a un sens indiscutable. En pratique, on l'interprète localement comme le courant d'énergie, ce qui conduit toujours à des bilans corrects.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 — **Où stocker de l'énergie : champ électrique ou magnétique ?** ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer la densité d'énergie électrique pour $E = 3\,\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$ (champ disruptif de l'air) et la densité d'énergie magnétique pour $B = 1\,\mathrm{T}$.

Q-2) Commenter. Quelle énergie stocke une bobine supraconductrice de volume utile $1\,\mathrm{m^3}$ où règne $5\,\mathrm{T}$?

EXERCICE 4 — **Champ électrique de la lumière solaire** ✦✧✧✧✧

On admet (chapitre W1) que pour une onde plane progressive sinusoïdale dans le vide, $\langle \Pi \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$ et $B_0 = \frac{E_0}{c}$.

Q-1) Calculer E_0 et B_0 pour la lumière solaire au sol $(1{,}0\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}})$.

Q-2) Même calcul pour un pointeur laser de $1{,}0\,\mathrm{mW}$ dont le faisceau a un diamètre de $1{,}0\,\mathrm{mm}$. Pourquoi est-il dangereux de le regarder ?

III Bilan d'énergie : identité de Poynting

III.1 Forme locale

Identité de Poynting (forme locale) R D

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

C'est une équation de conservation, de même structure que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$, avec un terme de source : l'énergie électromagnétique locale varie parce qu'elle est transportée $(\operatorname{div}\vec{\Pi})$ et parce qu'elle est échangée avec la matière $(\vec{j}\cdot\vec{E})$.

Démonstration. On multiplie scalairement MA par $\frac{\vec{E}}{\mu_0}$ et MF par $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$:

$$\frac{\vec{E}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j}\cdot\vec{E} + \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right), \qquad \frac{\vec{B}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}}{\mu_0} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right).$$

L'identité $\operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}$ donne, en retranchant la première relation de la seconde :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E}.$$

III.2 Forme intégrale

Bilan de puissance sur un volume fixe R D

Pour un volume V fixe limité par la surface fermée Σ orientée vers l'extérieur :

$$\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} = -\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S} - \iiint_{V} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

Démonstration. On intègre la forme locale sur V ; la dérivée temporelle sort de l'intégrale (volume fixe) et le théorème de Green-Ostrogradski transforme $\iiint \operatorname{div}\vec{\Pi}\,\mathrm{d}\tau$ en flux sortant.

Terme	Interprétation
$\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t}$	variation par unité de temps de l'énergie stockée dans le champ, à l'intérieur de V
$\oiint_{\Sigma} \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$	puissance électromagnétique **sortant** de V à travers Σ (puissance rayonnée) ; un flux entrant est un gain
$\iiint_{V} \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$	puissance cédée par le champ à la matière contenue dans V (effet Joule, énergie cinétique des porteurs…)

Tab. 1 : Interprétation des termes du bilan d'énergie électromagnétique.

☞ Méthode — Mener un bilan de Poynting M

1. Déterminer $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (symétries, Gauss, Ampère, Faraday) dans la région étudiée et sur sa frontière.
2. Calculer $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ sur la surface ; pour un cylindre, $\vec{E}$ axial et $\vec{B}$ orthoradial donnent $\vec{\Pi}$ **radial** : seule la surface latérale contribue.
3. Calculer le flux **entrant** et le comparer à $\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} + \iiint \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$.
4. Contrôles : dimension $[\Pi] = \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$; sens de $\vec{\Pi}$ cohérent avec le transfert d'énergie attendu.

III.3 Moyennes temporelles en régime sinusoïdal

Les détecteurs mesurent des valeurs moyennes. Pour deux grandeurs sinusoïdales $a(t) = \mathrm{Re}(\underline{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ et $b(t) = \mathrm{Re}(\underline{b}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ de même pulsation :

$$\langle a\,b\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{a}\,\underline{b}^{*}\right) \qquad \left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^{*}\right)$$

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Calculer $\vec{\Pi}$ ou u_{em} directement avec les champs complexes : les grandeurs énergétiques sont **quadratiques**, il faut revenir aux champs réels ou utiliser les formules de moyenne.
- Se tromper de signe : le flux **sortant** de $\vec{\Pi}$ est une **perte** pour le volume.
- Croire que l'énergie électrique circule « dans les fils » : elle est transportée par le champ qui les entoure ; les fils la guident.
- Oublier que la force magnétique ne travaille pas : seul $\vec{E}$ intervient dans la puissance cédée.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 **L'énergie entre dans un fil résistif par ses côtés** ✦✦✧✧✧

Un fil cylindrique de rayon a, de longueur ℓ, de conductivité σ, est parcouru par un courant continu I uniformément réparti, selon $+\vec{u}_z$.

Q-1) Exprimer $\vec{j}$ et $\vec{E}$ dans le fil, puis $\vec{E}$ et $\vec{B}$ juste à l'extérieur de la surface latérale.

Q-2) Calculer $\vec{\Pi}$ sur la surface latérale et son flux entrant. Comparer à la puissance Joule.

Q-3) Que vaut $\dfrac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t}$? Commenter le trajet de l'énergie.

EXERCICE 6 **Charge d'un condensateur : d'où vient l'énergie ?** ✦✦✧✧✧

Un condensateur plan à armatures circulaires de rayon a, distantes de $e \ll a$, se charge lentement : la tension $U(t)$ croît. On oriente $\vec{u}_z$ de l'armature positive vers la négative et on néglige les effets de bord.

Q-1) Exprimer $\vec{E}$ entre les armatures puis, par le théorème d'Ampère généralisé, $\vec{B}(r)$ pour $r \leq a$.

Q-2) Calculer $\vec{\Pi}$ en $r = a$ et son flux entrant à travers la surface latérale du cylindre de rayon a et de hauteur e. Comparer à $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}CU^2\right)$.

Q-3) Comparer les énergies magnétique et électrique entre les armatures et justifier l'approximation faite.

IV Exemples de transport d'énergie

IV.1 Établissement du courant dans un solénoïde

L'énergie magnétique entre par la surface du solénoïde D

Un solénoïde infini (rayon a, n spires par mètre) est parcouru par un courant $i(t)$ croissant. À l'intérieur, $\vec{B} = \mu_0 n i\,\vec{u}_z$ et le champ électrique induit vaut $\vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$ (EM4). En $r = a$:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\mu_0 n a}{2}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)\mu_0 n i\,(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z) = -\frac{\mu_0 n^2 a}{2}\,i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_r.$$

Le flux entrant à travers un cylindre de rayon a et de hauteur h vaut $\frac{\mu_0 n^2 a}{2} i\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times 2\pi a h = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\pi a^2 h\right)$: c'est exactement la variation de l'énergie magnétique. L'énergie que fournit le générateur pour vaincre la f.é.m. d'auto-induction est stockée dans le champ.

IV.2 Câble coaxial : l'énergie voyage dans l'isolant

Un câble coaxial idéal (âme de rayon R_1 au potentiel U, gaine de rayon R_2 au potentiel 0, conducteurs parfaits) alimente une charge qui consomme le courant I. Entre les conducteurs (chapitres EM1 et EM3) :

$$\vec{E} = \frac{U}{r\ln(R_2/R_1)}\vec{u}_r, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta, \qquad \vec{\Pi} = \frac{UI}{2\pi r^2\ln(R_2/R_1)}\vec{u}_z.$$

Puissance guidée par un câble R D

La puissance traversant une section droite du câble est

$$\mathcal{P} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{UI}{2\pi r^2\ln(R_2/R_1)}\,2\pi r\,\mathrm{d}r = UI.$$

Toute la puissance transmise à la charge circule **dans l'isolant**, entre l'âme et la gaine : les conducteurs ne font que la guider.

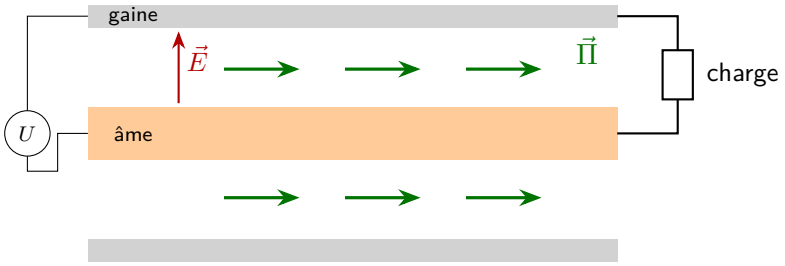


Fig. 1 : Dans un câble coaxial, le flux d'énergie circule dans l'isolant, du générateur vers la charge.

IV.3 Onde plane dans le vide

Pour une onde plane progressive dans le vide (chapitre W1), $\vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$: les énergies électrique et magnétique sont égales, $u_{em} = \varepsilon_0 E^2$, et $\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u} = c\,u_{em}\,\vec{u}$. L'énergie se déplace à la célérité c dans la direction de propagation ; il n'y a pas de matière, donc pas de terme $\vec{j}\cdot\vec{E}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 **Bilan d'énergie d'une bobine réelle** ✦✦✧✧✧

Une bobine longue ($N = 500$ spires, longueur $\ell = 40\,\mathrm{cm}$, rayon $a = 2\,\mathrm{cm}$) est alimentée par un générateur qui fait croître le courant de 0 à $I = 3\,\mathrm{A}$.

Q-1) Calculer l'inductance L et l'énergie magnétique finale par deux méthodes ($\frac{1}{2}LI^2$ et intégrale de u_{em}).

Q-2) Le fil de la bobine a une résistance $r = 2\,\Omega$. Écrire l'équation électrique et le bilan de puissance du générateur. Où va chaque terme du point de vue du vecteur de Poynting ?

V Synthèse

★ À retenir

- Force volumique $\vec{f_v} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$; puissance volumique cédée à la matière $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$.
- Loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (phénoménologique) ; effet Joule $p_J = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}$; $R = \frac{L}{\sigma S}$.
- $u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ (retrouve $\frac{1}{2}CU^2$ et $\frac{1}{2}Li^2$) ; $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$, puissance $= \iint \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.
- Identité de Poynting : $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$; $\dfrac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} = -\oiint \vec{\Pi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \iiint \vec{j} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau$.
- L'énergie est transportée par le champ : elle entre latéralement dans un fil résistif, un condensateur ou une bobine, et circule dans l'isolant d'un câble.
- Moyennes : $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$; ordres de grandeur : $1\,\mathrm{kW \cdot m^{-2}}$ (Soleil au sol).

Grandeur	Charge électrique	Énergie électromagnétique	Unités
Densité volumique	ρ	$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$	$\mathrm{C \cdot m^{-3}}$; $\mathrm{J \cdot m^{-3}}$
Densité de courant	$\vec{j}$	$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$	$\mathrm{A \cdot m^{-2}}$; $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$
Bilan local	$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$	$\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$	
Terme de source	aucun (conservation stricte)	échange avec la matière	

Tab. 2 : Analogie entre conservation de la charge et bilan d'énergie électromagnétique.

VI Exercices d'approfondissement

EXERCICE 8 Condensateur à fuites : un bilan purement local

✦✦✦✧✧

L'espace entre les armatures d'un condensateur plan (surface S, épaisseur e, effets de bord négligés) est rempli d'un milieu faiblement conducteur, de conductivité σ et de permittivité ε_0. Isolé, le condensateur porte à $t = 0$ la charge Q_0.

Q-1) Exprimer $\vec{E}$ en fonction de la charge $Q(t)$ de l'armature positive, puis $\vec{j}$. Établir et résoudre l'équation vérifiée par Q.

Q-2) Montrer que $\vec{B} = \vec{0}$ entre les armatures.

Q-3) Vérifier l'identité de Poynting en tout point. Interpréter.

Q-4) Calculer l'énergie totale dissipée par effet Joule. Montrer que le dispositif équivaut à un condensateur en parallèle avec une résistance, et vérifier $RC = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$. Application : $\sigma = 10^{-10}\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$.

EXERCICE 9 Énergie d'une sphère chargée et rayon classique de l'électron

✦✦✦✧✧

Une sphère de rayon R porte la charge Q répartie uniformément en surface.

Q-1) Calculer l'énergie électromagnétique contenue dans tout l'espace à l'aide de u_{em}.

Q-2) Même question pour une boule uniformément chargée en volume (on admettra $E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ à l'intérieur).

Q-3) En modélisant l'électron par une sphère chargée en surface et en égalant son énergie électrostatique à son énergie de masse $m_e c^2$, estimer son « rayon ». Commenter ($e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$).

EXERCICE 10 Courants de Foucault dans un disque ✦✦✦✧✧

Un disque conducteur de rayon a, d'épaisseur $e \ll a$, de conductivité σ, est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\,\vec{u}_z$ parallèle à son axe. On néglige le champ créé par les courants induits.

Q-1) Montrer que le champ électrique induit dans le disque vaut $\vec{E} = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$. En déduire $\vec{j}$.

Q-2) Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le disque.

Q-3) Application : disque d'acier inoxydable amagnétique ($\sigma = 1{,}4 \times 10^6\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$), $a = 5\,\mathrm{cm}$, $e = 1\,\mathrm{mm}$, $B_0 = 50\,\mathrm{mT}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Vérifier l'hypothèse en comparant le champ créé par les courants induits, d'ordre $\mu_0 j_{\max} e$, à B_0.

Q-4) Le disque est remplacé par N petits disques isolés de même épaisseur, de surface totale identique. Comment varie la puissance ? Application aux transformateurs.

VII Classiques des concours

EXERCICE 11 Câble coaxial : transport d'énergie et pertes en ligne ✦✦✦✦✧

Un câble coaxial de longueur $\Lambda = 100\,\mathrm{m}$ est formé d'une âme cylindrique en cuivre de rayon $R_1 = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ et d'une gaine de rayon $R_2 = 2\,\mathrm{mm}$, supposée parfaitement conductrice. Il alimente sous $U = 230\,\mathrm{V}$ (continu) une charge qui consomme $I = 10\,\mathrm{A}$.

Q-1) On néglige d'abord la résistance de l'âme. Rappeler $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans l'isolant. Calculer $E(R_1)$ et comparer au champ disruptif de l'air ($3\,\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$).

Q-2) Calculer $\vec{\Pi}$, sa valeur en $r = R_1$, et la puissance transportée.

Q-3) L'âme a la conductivité $\sigma = 6\times10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$. Calculer le champ électrique axial dans l'âme, la composante radiale de $\vec{\Pi}$ à sa surface et la puissance qui y pénètre par mètre de câble. Comparer à la puissance Joule.

Q-4) Calculer la puissance perdue sur toute la longueur et le rendement de la ligne. Comment évolue la puissance axiale transportée le long du câble ?

EXERCICE 12 Pression de radiation et voile solaire ✦✦✦✦✧

Un conducteur parfait occupe le demi-espace $x > 0$. Dans le vide, juste à l'extérieur de sa surface, règnent le champ électrique normal $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$ et le champ magnétique tangentiel $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$, lentement variables.

Q-1) Rappeler les champs dans un conducteur parfait et, à l'aide des relations de passage $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$ et $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$, exprimer σ et $\vec{j}_s$.

Q-2) On admet que la force surfacique sur la surface s'obtient avec la moyenne des champs de part et d'autre : $\vec{f}_s = \sigma\frac{\vec{E}}{2} + \vec{j}_s \wedge \frac{\vec{B}}{2}$. Montrer que $\vec{f}_s = \left(-\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0}\right)\vec{u}_x$. Interpréter.

Q-3) Une onde plane d'intensité $\langle \Pi_i \rangle$ arrive en incidence normale sur un miroir parfait. Au contact du miroir, le champ électrique total est nul et le champ magnétique total vaut $2B_i \cos\omega t$ (chapitre W2), avec $\langle \Pi_i \rangle = \frac{cB_i^2}{2\mu_0}$. Montrer que la pression moyenne vaut $P_{\text{rad}} = \frac{2\langle \Pi_i \rangle}{c}$.

Q-4) Une voile solaire parfaitement réfléchissante de $200\,\mathrm{m}\times200\,\mathrm{m}$, de masse totale (sonde comprise) $50\,\mathrm{kg}$, est orientée face au Soleil à la distance Terre-Soleil ($\langle \Pi_i \rangle = 1{,}4\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}}$). Calculer la pression, la force et l'accélération. Comparer à l'attraction solaire en ce point ($GM_S = 1{,}33\times10^{20}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$, distance $1{,}5\times10^{11}\,\mathrm{m}$). Quel gain de vitesse obtient-on en une journée ?