LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

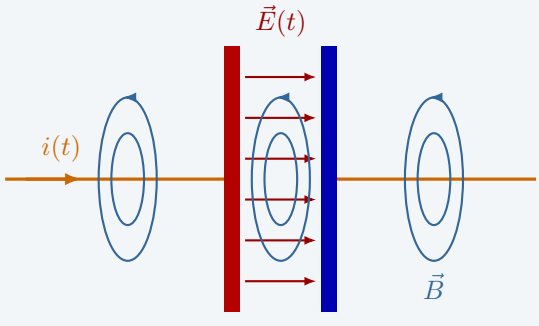
FICHE RÉSUMÉ

EM4

ÉLECTROMAGNÉTISME

Équations de Maxwell

Postulats de l'électromagnétisme — Formes locales et intégrales — Courant de déplacement — Conservation de la charge — Régimes statiques — ARQS — Relations de passage



$\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t$ prolonge $i(t)$

> *Était-ce un dieu qui a tracé ces signes ?*
>
> — Ludwig Boltzmann, citant le *Faust* de Goethe en exergue de ses leçons sur la théorie de Maxwell (1891)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Condensateur en charge et vecteur de Poynting »

EM4 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Les quatre équations de Maxwell sont les postulats de l'électromagnétisme : les charges et les courants créent les champs, et les champs variables se créent l'un l'autre (induction, courant de déplacement). Elles contiennent la conservation de la charge, redonnent l'électrostatique, la magnétostatique et la loi de Faraday, et annoncent la propagation à la célérité c. Quand le système est petit devant la longueur d'onde (ARQS), on néglige le courant de déplacement, ce qui justifie la loi des nœuds de l'électrocinétique.

I Les équations de Maxwell dans le vide

Formes locales (référentiel galiléen) R

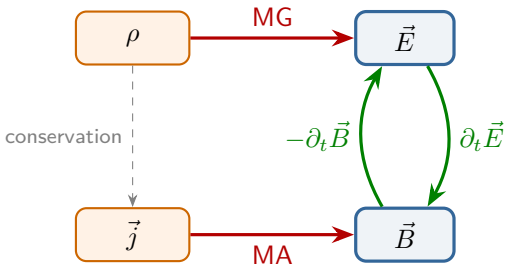
$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div}\vec{B}=0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$, $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$. Courant de déplacement : $\vec{j}_D=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (existe dans le vide, ce n'est pas un mouvement de charges).

Équation	Forme intégrale (Ostrogradski ou Stokes)	Contenu physique
Maxwell-Gauss	$\oiint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	les charges sont sources de $\vec{E}$
Maxwell-Thomson	$\oiint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$	pas de charge magnétique, lignes fermées
Maxwell-Faraday	$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$	induction
Maxwell-Ampère	$\oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\mu_0\left(I_{\text{enl}}+\varepsilon_0\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right)$	Ampère généralisé

Conséquences R D

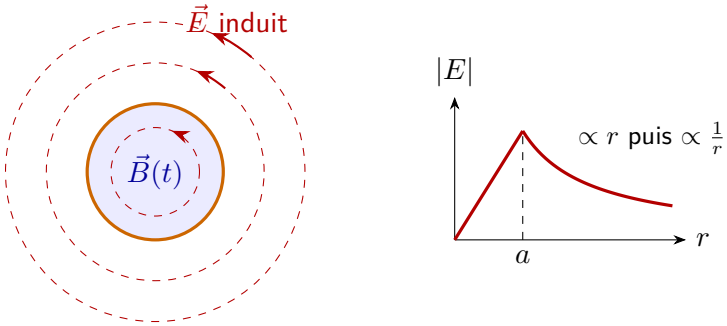
- $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B})=0$ avec MA et MG : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0$. Sans $\vec{j}_D$, on aurait $\operatorname{div}\vec{j}=0$ même en régime variable : contradiction.
- Linéarité : principe de superposition.
- Couplage MF–MA : propagation à $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.
- Équations à compléter par la force de Lorentz et, dans la matière, par une loi de comportement.



II Statique, induction, potentiels

Ce que contiennent les équations de Maxwell R

- **Statique** : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=\vec{0}$, $\vec{E}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, $\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0$ (Poisson) ; $\mathrm{div}\,\vec{B}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}$; $\vec{E}$ et $\vec{B}$ découplés.
- **Circuit fixe** : MF + Stokes donnent $e=\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ (Neumann). Le champ induit existe même là où $\vec{B}=\vec{0}$ (extérieur d'un solénoïde).
- **Potentiels** : $\vec{B}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$, $\boxed{\vec{E}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$; non uniques (jauge) ; en régime variable, $\vec{E}$ ne dérive pas d'un potentiel.



Solénoïde à courant variable : MF intégrale sur un cercle donne $2\pi rE=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

III Approximation des régimes quasi stationnaires

Définition — ARQS R

Retards de propagation négligeables :

$$\boxed{L\ll\lambda=cT}$$

En ARQS magnétique, on néglige $\vec{j}_D$ devant $\vec{j}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\mathrm{div}\,\vec{B}=0\qquad\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}\ \Rightarrow\ \mathrm{div}\,\vec{j}=0.$$

Flux de $\vec{j}$ conservatif : **loi des nœuds**, intensité **uniforme** dans une branche ; $\vec{B}$ calculé à chaque instant comme en magnétostatique ; induction conservée.

Condensateur : le courant de déplacement prolonge le courant R D

Entre les armatures (rayon R), $\iint\vec{j}_D\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=i$: le théorème d'Ampère généralisé donne le même résultat pour toutes les surfaces s'appuyant sur un contour. Pour $r<R$: $\vec{B}=\frac{\mu_0 ir}{2\pi R^2}\vec{u}_\theta$. Correction au champ uniforme : $E\approx E_0\left(1-\frac{\omega^2r^2}{4c^2}\right)$, négligeable si $a\ll\lambda$; au-delà, cavité résonante.

Ordres de grandeur

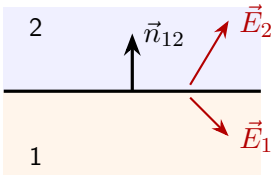
$50\,\text{Hz} : \lambda = 6000\,\text{km}$ (ARQS valable sauf pour les très longues lignes) ; $1\,\text{MHz} : 300\,\text{m}$; $100\,\text{MHz} : 3\,\text{m}$; $2{,}4\,\text{GHz} : 12{,}5\,\text{cm}$. Dans un métal, $\frac{j_D}{j} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \approx 10^{-18}\, f$ (cuivre) : négligeable. Temps de relaxation de la charge $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$: $10^{-19}\,\text{s}$ (cuivre), $2 \times 10^{-12}\,\text{s}$ (eau de mer).

IV Relations de passage

Interface $(\sigma, \vec{j}_s)$, normale $\vec{n}_{12}$ de 1 vers 2 R

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$E_{\text{tangentiel}}$ et B_{normal} continus. Admises, rappelées par les énoncés ; elles remplacent Maxwell pour une modélisation surfacique.



Définition — Conducteur parfait R

$\sigma \to \infty$: $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$ à l'intérieur en régime variable ; charges et courants surfaciques. Juste à l'extérieur : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{\text{ext}}$ (normal), $\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{\text{ext}}$ (tangent).

V Méthodes et pièges

☞ Méthode — Choisir l'équation M

- $\vec{E}$ créé par des charges symétriques : Gauss. $\vec{E}$ induit : circulation de MF sur un cercle ou un rectangle adapté.
- $\vec{B}$: Ampère généralisé (courant enlacé + flux de $\varepsilon_0 \partial_t \vec{E}$).
- ρ et $\vec{j}$ à partir de champs donnés : MG et MA locales ; vérifier ensuite $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.
- Justifier l'ARQS : comparer la taille du dispositif à $\frac{c}{f}$.
- Relation de passage : orienter $\vec{n}_{12}$ de 1 vers 2, projeter sur la normale et le plan tangent.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ sont faux en régime variable.
- Oublier $\vec{j}_D$ entre les armatures d'un condensateur ; à l'inverse, le garder dans un métal (il y est négligeable).
- Confondre ARQS (variations instantanées partout) et régime permanent.
- Symétries : $\vec{E}$ (polaire) est contenu dans les plans de symétrie des charges, $\vec{B}$ (axial) leur est perpendiculaire.
- Le nom « Maxwell-flux » désigne $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, pas l'équation de Faraday.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ J'écris les quatre équations sous forme locale et intégrale, et je passe de l'une à l'autre (Ostrogradski, Stokes).
- ☐ Je démontre que les équations de Maxwell contiennent la conservation de la charge.
- ☐ Je retrouve les lois de la statique et la loi de Faraday pour un circuit fixe.
- ☐ Je calcule un champ électrique induit (solénoïde) et le champ magnétique dans un condensateur qui se charge.
- ☐ J'énonce la condition de l'ARQS et j'en déduis la loi des nœuds.
- ☐ J'utilise une relation de passage et je décris le conducteur parfait.