LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

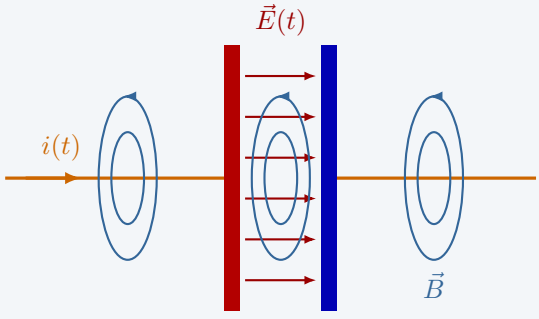
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

EM4

ÉLECTROMAGNÉTISME

Équations de Maxwell

Postulats de l'électromagnétisme — Formes locales et intégrales — Courant de déplacement — Conservation de la charge — Régimes statiques — ARQS — Relations de passage



$\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t$ prolonge $i(t)$

> *Était-ce un dieu qui a tracé ces signes ?*
>
> — Ludwig Boltzmann,
> citant le *Faust* de Goethe en exergue de ses leçons sur la théorie de Maxwell (1891)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Condensateur en charge et vecteur de Poynting »

EM4 — Équations de Maxwell

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Énoncer les quatre équations de Maxwell dans le vide, sous forme locale et sous forme intégrale, et passer de l'une à l'autre.
- Interpréter physiquement chaque équation ; expliquer le rôle du courant de déplacement et la compatibilité avec la conservation de la charge.
- Retrouver les lois locales de l'électrostatique et de la magnétostatique, ainsi que la loi de Faraday pour un circuit fixe.
- Énoncer la condition de l'ARQS, écrire les équations de Maxwell dans ce cadre et en déduire la loi des nœuds.
- Utiliser les relations de passage (rappelées) à la traversée d'une surface chargée ou parcourue par un courant ; décrire un conducteur parfait.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Ce chapitre rassemble en quatre équations tout ce qui a été vu en électrostatique, en magnétostatique et en induction ; il ouvre sur la propagation (chapitre W1). La simulation PhysioNova « Condensateur en charge et vecteur de Poynting » montre le champ magnétique créé entre les armatures d'un condensateur par le seul courant de déplacement.
Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Les équations de Maxwell dans le vide . . . 3
I.1 Sources du champ et conservation de la charge . . . 3
I.2 Énoncé : quatre postulats . . . 3
I.3 Contenu physique . . . 4
I.4 Formes intégrales . . . 4
I.5 Compatibilité avec la conservation de la charge . . . 5
II Régimes statiques, induction et potentiels . . . 6
II.1 Retour aux régimes statiques . . . 6
II.2 Loi de Faraday pour un circuit fixe . . . 7
II.3 Potentiels en régime variable . . . 7
III Approximation des régimes quasi stationnaires . . . 8
III.1 Condition de validité . . . 8
III.2 Équations de Maxwell dans l'ARQS . . . 9
III.3 Le condensateur dans l'ARQS . . . 10
IV Relations de passage . . . 12
IV.1 Énoncé . . . 12
IV.2 Exemples . . . 12
IV.3 Conducteur parfait . . . 13
V Synthèse . . . 14
VI Exercices d'approfondissement . . . 14
VII Classiques des concours . . . 16

I Les équations de Maxwell dans le vide

I.1 Sources du champ et conservation de la charge

Les sources du champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ sont décrites par la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ $(\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-3})$ et le vecteur densité de courant $\vec{j}(M,t)=\sum_k n_k q_k \vec{v}_k$ $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2})$, dont le flux à travers une surface orientée est l'intensité qui la traverse (chapitre EM1).

Conservation de la charge R D

Pour tout volume fixe V limité par la surface fermée Σ, la charge intérieure ne varie que par le courant qui traverse Σ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}\tau = -\oiint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0}$$

Démonstration. Le volume étant fixe, la dérivée passe sous l'intégrale ; le théorème de Green-Ostrogradski transforme le flux en $\iiint_V \operatorname{div}\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$. L'égalité $\iiint_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}\right)\mathrm{d}\tau = 0$ valant pour tout volume V, l'intégrande est nulle.

I.2 Énoncé : quatre postulats

Équations de Maxwell dans le vide (forme locale) R

En tout point M et à tout instant t, dans un référentiel galiléen :

$$\text{(MG)}\quad \operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(M}\Phi\text{)}\quad \operatorname{div}\vec{B}=0$$

$$\text{(MF)}\quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(MA)}\quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

avec $\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ (valeur à 10^{-10} près), $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et

$$\boxed{\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1}$$

Ces équations ne se démontrent pas : ce sont les **postulats** de l'électromagnétisme classique, validés par toutes leurs conséquences expérimentales. Elles doivent être complétées par la force de Lorentz $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$, qui décrit l'action du champ sur la matière, et, dans un milieu, par une loi de comportement (loi d'Ohm locale par exemple).

Définition — Courant de déplacement R

Le terme

$$\boxed{\vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

a la dimension d'une densité de courant. Introduit par Maxwell en 1861–1865, il porte le nom historique de **courant de déplacement**, par opposition au courant de conduction $\vec{j}$. Ce n'est pas un mouvement de charges : c'est un champ électrique variable qui crée un champ magnétique comme le ferait un courant.

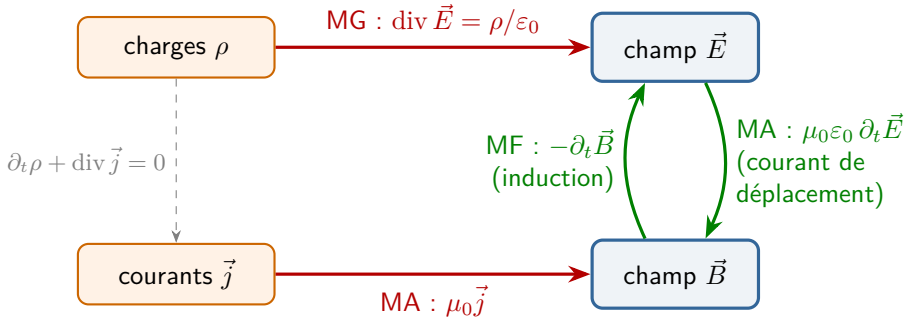


Fig. 1 : Carte des équations de Maxwell : les charges et les courants créent les champs, qui se créent mutuellement lorsqu'ils varient.

I.3 Contenu physique

Interprétation des quatre équations R

- **MG** : les charges sont les sources scalaires de $\vec{E}$; les lignes de champ électrique divergent des charges positives et convergent vers les charges négatives.
- **MΦ** (ou Maxwell-Thomson) : il n'existe pas de charge magnétique isolée ; le flux de $\vec{B}$ est conservatif et ses lignes de champ sont fermées.
- **MF** : un champ magnétique variable crée un champ électrique à circulation non nulle : c'est le phénomène d'**induction** (chapitre EM3).
- **MA** : les courants *et* les variations du champ électrique créent un champ magnétique tourbillonnaire.
- Les équations sont **linéaires** en $(\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{j})$: le **principe de superposition** s'applique.
- Le couplage MF–MA permet à un champ variable d'exister loin de ses sources : c'est l'origine des **ondes électromagnétiques** (chapitre W1).

Remarque

Le problème du référentiel. Les équations sont postulées dans un référentiel galiléen et font apparaître une célérité c unique. Or la loi galiléenne de composition des vitesses ferait dépendre c du référentiel : les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par changement de référentiel galiléen. Einstein (1905) a résolu cette contradiction en conservant Maxwell et en modifiant la mécanique : c'est la relativité restreinte. Dans l'ARQS (partie III) et pour $v \ll c$, la loi de transformation approchée $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}$, $\vec{B}' = \vec{B}$ suffit (champ électromoteur de Lorentz, chapitre EM3).

I.4 Formes intégrales

Équations de Maxwell sous forme intégrale R D

Pour une surface fermée Σ limitant le volume V, et pour un contour fermé orienté Γ (fixe) sur lequel s'appuie une surface S orientée par la règle de la main droite :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \text{ (Gauss)} \qquad \oiint_\Sigma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \text{ (flux conservatif)}$$

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \text{ (Faraday)} \qquad \oint_\Gamma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\left(I_{\text{enl}} + \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\right) \text{ (Ampère généralisé)}$$

Démonstration. On intègre MG et MΦ sur V et on applique le théorème de Green-Ostrogradski $\iiint_V \operatorname{div}\vec{X}\,\mathrm{d}\tau = \oiint_\Sigma \vec{X}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$. On calcule le flux de MF et de MA à travers S et on applique le théorème de Stokes $\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{X}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{X}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$; la surface étant fixe, la dérivée temporelle sort de l'intégrale. Le flux de $\vec{j}$ est l'intensité enlacée I_{enl}.

☞ Méthode — Choisir l'équation utile M

- Champ $\vec{E}$ créé par des charges à haute symétrie : Gauss (MG intégrale).
- Champ électrique **induit** par un $\vec{B}$ variable : circulation de $\vec{E}$ sur un contour adapté aux symétries (MF intégrale).
- Champ $\vec{B}$: théorème d'Ampère généralisé, en ajoutant au courant enlacé le **flux du courant de déplacement**.
- Densités ρ et $\vec{j}$ à partir de champs connus : formes locales MG et MA.

I.5 Compatibilité avec la conservation de la charge

Le courant de déplacement est indispensable R D

La divergence d'un rotationnel étant nulle, la divergence de MA donne, avec MG :

$$0 = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\right) = \mu_0 \operatorname{div}\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E} = \mu_0\left(\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right).$$

Les équations de Maxwell **contiennent** la conservation de la charge. Sans le terme $\vec{j}_D$, MA imposerait $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ à tout instant, ce qui est faux en régime variable (une armature de condensateur se charge). Le vecteur $\vec{j} + \vec{j}_D$ est toujours à flux conservatif.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ ou $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$ en régime variable : c'est faux dès qu'il y a induction.
- Oublier le courant de déplacement entre les armatures d'un condensateur : le théorème d'Ampère conduit alors à une contradiction (partie III).
- Confondre $\vec{j}_D$ avec un déplacement de charges : il existe dans le vide.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Un champ électrique longitudinal ✦✦✧✧✧

Dans une région de l'espace règne le champ $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t - kx)\,\vec{u}_x$, le champ magnétique étant statique.

Q-1) Montrer que $\vec{E}$ est compatible avec MF. Justifier que l'on peut prendre $\vec{B} = \vec{0}$.

Q-2) Déterminer $\rho(x,t)$ et $\vec{j}(x,t)$ compatibles avec les équations de Maxwell, puis vérifier la conservation de la charge.

Q-3) Ce champ peut-il exister dans le vide ? Dans quel milieu le rencontre-t-on ?

Correction

Q-1) E_x ne dépend que de x : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$, donc $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ par MF, ce qui est compatible avec un champ magnétique statique, que l'on choisit nul.

Q-2) MG : $\rho = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = -\varepsilon_0 k E_0 \cos(\omega t - kx)$. MA avec $\vec{B} = \vec{0}$: $\vec{j} = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_0 \omega E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{u}_x$. Alors $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 k \omega E_0 \sin(\omega t - kx)$ et $\dfrac{\partial j_x}{\partial x} = -\varepsilon_0 \omega k E_0 \sin(\omega t - kx)$: leur somme est nulle.

Q-3) Non : il exige $\rho \neq 0$ (dans le vide, $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ impose $k = 0$). Il décrit une **onde de charge longitudinale**, que l'on rencontre dans un plasma (oscillations de plasma, chapitre W1). Courant de conduction et courant de déplacement s'y compensent exactement.

EXERCICE 2 — Une source radioactive : pourquoi Maxwell a modifié la loi d'Ampère

✦✦✧✧✧

Une petite source placée en O émet de façon isotrope des particules chargées ; sa charge $Q(t)$ diminue. On néglige la durée de vol des particules.

Q-1) Exprimer $\vec{j}(M,t)$ à la distance r de O, puis $\vec{E}(M,t)$.

Q-2) Montrer par un argument de symétrie que $\vec{B} = \vec{0}$.

Q-3) Montrer que l'équation $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ conduit à une contradiction et que MA est vérifiée.

Correction

Q-1) L'intensité sortant d'une sphère de rayon r vaut $-\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, répartie uniformément : $\vec{j} = -\frac{1}{4\pi r^2}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_r$. Le théorème de Gauss donne $\vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

Q-2) Tout plan contenant O et M est plan de symétrie de la distribution ; $\vec{B}$, pseudo-vecteur, devrait être perpendiculaire à tous ces plans à la fois : $\vec{B} = \vec{0}$.

Q-3) $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ alors que $\mu_0 \vec{j} \neq \vec{0}$: contradiction. Avec le courant de déplacement, $\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi r^2}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + \frac{1}{4\pi r^2}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r = \vec{0}$: MA est satisfaite.

II Régimes statiques, induction et potentiels

II.1 Retour aux régimes statiques

Lois locales de la statique R D

Si les champs ne dépendent pas du temps, les équations de Maxwell se découplent en deux groupes indépendants :

électrostatique : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ magnétostatique : $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$.

On retrouve les lois locales du chapitre EM1 : $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$ et l'**équation de Poisson** $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, ainsi que le théorème d'Ampère. La conservation de la charge se réduit à $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

Démonstration. On annule les dérivées temporelles dans MF et MA. $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ assure l'existence de V ; en reportant $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$ dans MG, $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V) = \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

II.2 Loi de Faraday pour un circuit fixe

Lien avec l'induction R D

Pour un circuit filiforme **fixe** Γ, la force électromotrice induite est la circulation du champ électrique :

$$e = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

C'est l'induction de Neumann (circuit fixe, champ variable) du chapitre EM3. Le champ électrique induit n'est pas à circulation conservative : la notion de potentiel électrostatique ne suffit plus.

II.3 Potentiels en régime variable

MΦ assure l'existence d'un **potentiel vecteur** $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. MF s'écrit alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$, d'où l'existence d'un potentiel scalaire V :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le terme $-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est le **champ électromoteur de Neumann**. Les potentiels ne sont pas uniques : pour toute fonction $f(M,t)$, le couple $\left(V - \dfrac{\partial f}{\partial t},\ \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right)$ donne les mêmes champs. On lève cette indétermination par une condition supplémentaire, la **jauge** (jauge de Lorentz $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$, qui se réduit en statique à la jauge de Coulomb $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$). Comme $\vec{j}$, le potentiel vecteur est un vecteur polaire : il est contenu dans les plans de symétrie des courants.

> **Remarque**
>
> Les potentiels vecteurs et les jauges ne sont pas exigibles au programme MP ; ils permettent cependant de comprendre l'unité de l'induction : la f.é.m. d'un circuit est la circulation du champ électromoteur $-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$, qui regroupe les cas de Neumann et de Lorentz.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 — **Champ statique ou champ induit ?** ✦✦✧✧✧

On considère, dans une région vide de charges, les deux champs $\vec{E}_1 = K(y\,\vec{u}_x + x\,\vec{u}_y)$ et $\vec{E}_2 = K(y\,\vec{u}_x - x\,\vec{u}_y)$, avec K constante.

Q-1) Lequel peut être un champ électrostatique ? Déterminer alors un potentiel dont il dérive.

Q-2) Montrer que l'autre est compatible avec un champ magnétique uniforme, colinéaire à $\vec{u}_z$ et variant linéairement avec le temps. Préciser $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Q-3) Vérifier MA dans ce second cas : y a-t-il des courants ?

Correction

Q-1) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$: nul pour $\vec{E}_1$ $(K-K)$, égal à $-2K\vec{u}_z$ pour $\vec{E}_2$. Seul $\vec{E}_1$ peut être électrostatique ; $V = -Kxy$ convient ($-\overrightarrow{\text{grad}}\,V = K(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$). On a bien $\text{div}\,\vec{E}_1 = 0$ (pas de charges).

Q-2) MF : $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_2 = 2K\vec{u}_z$. Le champ $\vec{B} = (B_0 + 2Kt)\vec{u}_z$ convient : $\vec{E}_2$ est le champ électrique induit par un champ magnétique uniforme croissant ; il est orthoradial ($\vec{E}_2 = -Kr\,\vec{u}_\theta$ en cylindriques) et s'enroule autour de $\vec{u}_z$ dans le sens qui s'oppose à l'augmentation du flux (loi de Lenz).

Q-3) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ ($\vec{B}$ uniforme) et $\dfrac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} = \vec{0}$: MA donne $\vec{j} = \vec{0}$, sans contradiction. (À grande distance, un tel champ uniforme et croissant ne peut être qu'une approximation locale.)

EXERCICE 4 **Champ électrique induit par un solénoïde** ✦✦✧✧✧

Un solénoïde infini d'axe Oz, de rayon a, comportant n spires par mètre, est parcouru par $i(t) = I_0\cos\omega t$. On se place dans l'ARQS (partie III) : $\vec{B} = \mu_0 n i(t)\,\vec{u}_z$ à l'intérieur et $\vec{0}$ à l'extérieur.

Q-1) Montrer que le champ électrique induit est de la forme $\vec{E} = E(r,t)\,\vec{u}_\theta$.

Q-2) Déterminer $E(r,t)$ pour $r < a$ et pour $r > a$ et tracer l'allure de son amplitude.

Q-3) Une spire circulaire coaxiale de rayon $b > a$ est-elle le siège d'une f.é.m. ? Commenter.

Q-4) Application : $n = 1000$ spires par mètre, $I_0 = 2\,\text{A}$, $f = 50\,\text{Hz}$, $a = 3\,\text{cm}$. Calculer l'amplitude de $E(a,t)$ et de la f.é.m. de la spire.

Correction

Q-1) Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie des courants ; le champ électrique induit, qui a les symétries de $\vec{j}$ (comme $-\partial_t\vec{A}$), lui est perpendiculaire. Les invariances par rotation et translation donnent $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta$.

Q-2) MF intégrale sur le cercle de rayon r orienté par $\vec{u}_\theta$: $2\pi r E = -\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\mu_0 n i\,\pi\min(r,a)^2\right)$, d'où $E = \frac{\mu_0 n\omega I_0 r}{2}\sin\omega t$ pour $r < a$ et $E = \frac{\mu_0 n\omega I_0 a^2}{2r}\sin\omega t$ pour $r > a$. L'amplitude croît linéairement jusqu'à $r = a$ puis décroît en $\frac{1}{r}$.

Q-3) Oui : $e = 2\pi b E(b) = \pi a^2\mu_0 n\omega I_0\sin\omega t \neq 0$, alors que $\vec{B} = \vec{0}$ en tout point de la spire. MF relie localement $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}$ et $\partial_t\vec{B}$, mais $\vec{E}$ peut exister là où $\vec{B}$ est nul ; le flux à travers la spire, lui, n'est pas nul.

Q-4) $E_{\max}(a) = \frac{\mu_0 n\omega I_0 a}{2} = 1{,}2\times10^{-2}\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$; $e_{\max} = \pi a^2\mu_0 n\omega I_0 = 2{,}2\,\text{mV}$.

III Approximation des régimes quasi stationnaires

III.1 Condition de validité

Le couplage MF–MA implique que les champs se propagent à la vitesse finie c : une variation des sources en P n'est ressentie en M qu'avec le retard $\frac{PM}{c}$. Si ce retard est négligeable devant la durée caractéristique T des variations, tout se passe comme si les champs suivaient instantanément les sources.

Définition — ARQS (ou ARQP) R

Un système de dimension caractéristique L, évoluant sur une durée caractéristique T (une période en régime sinusoïdal), est dans l'**approximation des régimes quasi stationnaires** si

$$\frac{L}{c} \ll T \qquad \Longleftrightarrow \qquad L \ll \lambda = cT$$

Dans l'ARQS dite magnétique, qui est celle de l'électrocinétique, on néglige de plus le courant de déplacement devant le courant de conduction.

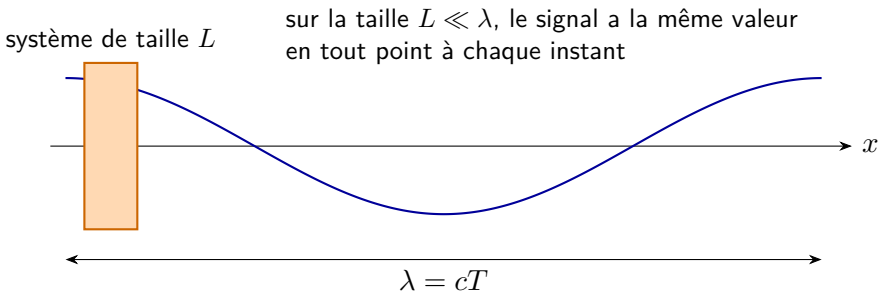


Fig. 2 : ARQS : le système est petit devant la longueur d'onde, les retards de propagation sont négligeables.

III.2 Équations de Maxwell dans l'ARQS

Équations de Maxwell dans l'ARQS R D

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

- En prenant la divergence de la dernière équation, $\operatorname{div}\vec{j} = 0$: le flux de $\vec{j}$ est **conservatif**. À un nœud, la somme des intensités entrantes est égale à la somme des intensités sortantes (**loi des nœuds**) et l'intensité est la **même en tout point d'une branche**.
- $\vec{B}$ se calcule à chaque instant par les lois de la magnétostatique (Biot et Savart, théorème d'Ampère), avec les courants pris au même instant.
- L'induction (MF) est conservée intégralement : c'est le cadre du chapitre EM3.

Justification de l'approximation. Dans un conducteur ohmique ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$) en régime sinusoïdal de pulsation ω, $\frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}$, qui vaut environ $10^{-18} \times f$ pour le cuivre ($\sigma = 6 \times 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$) : le courant de déplacement est négligeable dans les métaux jusqu'aux fréquences optiques. Hors des conducteurs, on vérifie l'approximation sur chaque situation ; c'est l'objet de l'exercice d'approfondissement sur le solénoïde.

Ordres de grandeur

Fréquence	$\lambda = c/f$	Circuit de 1 m en ARQS ?	Exemple
50 Hz	6000 km	oui, largement	réseau électrique
1 MHz	300 m	oui	radio AM
100 MHz	3 m	non : effets de propagation	radio FM
2,4 GHz	12,5 cm	non ; même les pistes d'une carte en sortent	Wi-Fi, processeurs

III.3 Le condensateur dans l'ARQS

Le courant de déplacement, négligé dans les conducteurs, reste essentiel entre les armatures d'un condensateur, où il n'y a pas de courant de conduction.

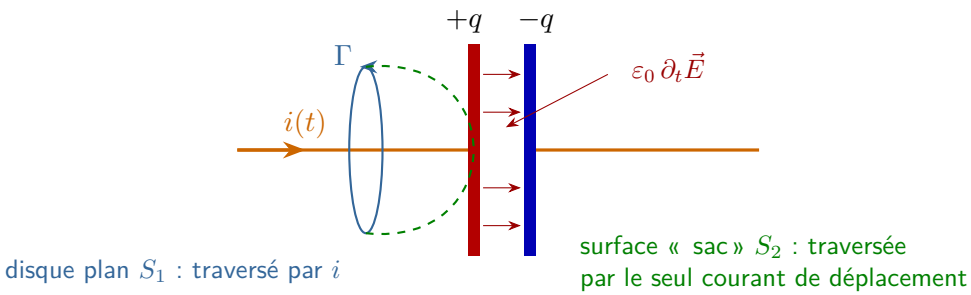


Fig. 3 : Le contour Γ borde une surface traversée par le fil et une surface passant entre les armatures.

Le courant de déplacement prolonge le courant de conduction R D

Pour un condensateur plan d'armatures circulaires de rayon R, sans effets de bord, $E = \frac{q}{\varepsilon_0 \pi R^2}$ entre les armatures, donc

$$\iint \vec{j}_D \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pi R^2 \frac{q}{\varepsilon_0 \pi R^2}\right) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i.$$

Le théorème d'Ampère généralisé donne donc le même résultat $\mu_0 i$ que l'on choisisse S_1 ou S_2 : sans le terme de Maxwell, il serait contradictoire. Entre les armatures, à la distance $r < R$ de l'axe :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, i\, r}{2\pi R^2}\,\vec{u}_\theta$$

comme à l'intérieur d'un fil de rayon R parcouru par i. Dans l'ARQS, l'intensité est la même de part et d'autre du condensateur.

Démonstration. $\vec{j}_D$ est uniforme, parallèle à l'axe : tout plan contenant l'axe est plan de symétrie, donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$. Sur le cercle de rayon $r < R$, $2\pi r B = \mu_0\, j_D\, \pi r^2 = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 **ARQS ou pas ?** ✦✧✧✧✧

Dans chacun des cas suivants, dire si l'ARQS est justifiée.

Q-1) Un circuit de TP de $50\,\mathrm{cm}$ alimenté à $1\,\mathrm{MHz}$.

Q-2) Un câble coaxial de $15\,\mathrm{m}$ transportant un signal de $20\,\mathrm{MHz}$; les ondes y circulent à $\frac{2}{3}c$.

Q-3) Une ligne de transport d'électricité de $800\,\mathrm{km}$ à $50\,\mathrm{Hz}$.

Q-4) Le courant de déplacement dans l'eau de mer ($\sigma = 4\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$) à $100\,\mathrm{kHz}$.

Correction

Q-1) $\lambda = 300\,\mathrm{m} \gg 0{,}5\,\mathrm{m}$: ARQS justifiée.

Q-2) Dans le câble, $\lambda = \frac{2c/3}{f} = 10\,\mathrm{m} < L$: l'intensité dépend de la position dans le câble ; il faut un modèle de propagation (ligne à constantes réparties).

Q-3) $\lambda = 6000\,\mathrm{km}$, $\frac{L}{\lambda} = 0,13$: le déphasage entre les extrémités, $2\pi\frac{L}{\lambda} \approx 48°$, n'est pas négligeable.

Q-4) $\frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma} = \frac{8{,}85\times10^{-12}\times6{,}28\times10^{5}}{4} = 1{,}4\times10^{-6}$: le courant de déplacement est négligeable.

EXERCICE 6 Champ magnétique dans un condensateur qui se charge

Un condensateur plan, d'armatures circulaires de rayon $R = 5{,}0\,\mathrm{cm}$, est chargé par un courant constant $i = 0{,}20\,\mathrm{A}$.

Q-1) Calculer la densité de courant de déplacement entre les armatures.

Q-2) Exprimer $B(r)$ pour $r < R$ et $r > R$ dans le plan médian, tracer son allure et calculer sa valeur maximale.

Q-3) Comparer au champ terrestre. Comment pourrait-on mettre en évidence ce champ ?

Correction

Q-1) $j_D = \frac{i}{\pi R^2} = 25\,\mathrm{A\cdot m^{-2}}$, dirigée de l'armature positive vers la négative.

Q-2) $B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$ pour $r < R$ (croissance linéaire), $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ pour $r > R$; maximum en $r = R$: $B_{\max} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} = 0{,}80\,\mu\mathrm{T}$.

Q-3) Soixante fois plus faible que le champ terrestre : la mesure exige une détection synchrone en régime sinusoïdal (petite bobine exploratrice entre les armatures, f.é.m. proportionnelle à $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$).

IV Relations de passage

IV.1 Énoncé

Lorsqu'une distribution de charges ou de courants est modélisée par une surface (épaisseur négligeable), les champs sont discontinus à sa traversée. Les équations locales, qui supposent des champs dérivables, sont alors remplacées par des relations entre les champs de part et d'autre de la surface.

Relations de passage (admises et toujours rappelées par les énoncés) R

Une surface portant la densité surfacique de charge σ et la densité surfacique de courant $\vec{j}_s$ sépare un milieu 1 d'un milieu 2. En notant $\vec{n}_{12}$ la normale unitaire orientée de 1 vers 2, au voisinage d'un point de la surface :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{12} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

- la composante **tangentielle** de $\vec{E}$ et la composante **normale** de $\vec{B}$ sont toujours continues ;
- la composante normale de $\vec{E}$ saute de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, la composante tangentielle de $\vec{B}$ de $\mu_0 j_s$ (perpendiculairement à $\vec{j}_s$).

Elles restent valables en régime variable.

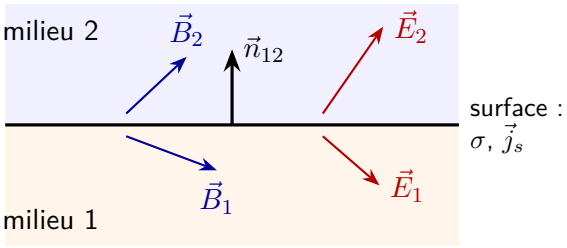


Fig. 4 : Champs de part et d'autre d'une interface chargée et parcourue par un courant.

☞ Méthode — Utiliser une relation de passage M

1. Repérer les milieux 1 et 2 et orienter $\vec{n}_{12}$ *de 1 vers 2*.
2. Écrire les champs *immédiatement* de part et d'autre de la surface.
3. Projeter sur la normale et sur le plan tangent ; en déduire σ, $\vec{j}_s$ ou un champ inconnu.
4. Contrôle : le saut de $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{j}_s$ et tangent à la surface.

IV.2 Exemples

Plan uniformément chargé. Le plan $z = 0$ porte σ ; le théorème de Gauss donne $\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ pour $z \gtrless 0$. Avec $\vec{n}_{12} = \vec{u}_z$ (milieu 1 : $z < 0$), $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$: la relation est vérifiée ; les composantes tangentielles sont nulles des deux côtés.

Nappe de courant. Le plan $z = 0$ est parcouru par $\vec{j}_s = j_s\vec{u}_x$ uniforme ; le théorème d'Ampère donne $\vec{B} = \mp\frac{\mu_0 j_s}{2}\vec{u}_y$ pour $z \gtrless 0$. On vérifie $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = -\mu_0 j_s\vec{u}_y = \mu_0 j_s\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z$.

IV.3 Conducteur parfait

Définition — Conducteur parfait R

Un **conducteur parfait** est un conducteur de conductivité infinie. En régime variable, les champs y sont nuls : $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$ (on l'établira en W1 comme limite de l'effet de peau). Charges et courants sont **surfaciques**. Juste à l'extérieur, en notant $\vec{n}_{\text{ext}}$ la normale sortante :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{\text{ext}} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{\text{ext}}$$

Le champ électrique est normal à la surface, le champ magnétique lui est tangent.

Ordres de grandeur

Le modèle du conducteur parfait décrit bien un métal lorsque l'épaisseur de peau (W1) est petite devant les dimensions du conducteur : pour le cuivre, $\delta \approx 65\,\mu\text{m}$ à $1\,\text{MHz}$ et $2\,\mu\text{m}$ à $1\,\text{GHz}$.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 Vérifier des relations de passage ✦✦✧✧✧

Q-1) Une sphère de rayon R porte la charge surfacique uniforme σ. Rappeler $\vec{E}$ à l'intérieur et à l'extérieur et vérifier la relation de passage en $r = R$.

Q-2) Un solénoïde infini d'axe Oz, de rayon a, à n spires par mètre parcourues par I, est modélisé par une nappe $\vec{j}_s = nI\,\vec{u}_\theta$ en $r = a$. Vérifier la relation de passage pour $\vec{B}$.

Correction

Q-1) $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < R$, $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ pour $r > R$. Milieu 1 intérieur, $\vec{n}_{12} = \vec{u}_r$: $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$.

Q-2) $\vec{B}_1 = \mu_0 nI\vec{u}_z$ (intérieur), $\vec{B}_2 = \vec{0}$: $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = -\mu_0 nI\vec{u}_z$. Et $\mu_0\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 nI\,\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\mu_0 nI\vec{u}_z$: vérifié.

EXERCICE 8 Densités surfaciques sur un conducteur parfait ✦✦✧✧✧

Un conducteur parfait occupe le demi-espace $x > 0$. Juste à l'extérieur ($x = 0^-$), on mesure à l'instant t les champs $\vec{E} = E_0(t)\vec{u}_x$ et $\vec{B} = B_0(t)\vec{u}_z$.

Q-1) Pourquoi le champ ne peut-il pas avoir de composante électrique selon $\vec{u}_y$, ni magnétique selon $\vec{u}_x$?

Q-2) En déduire σ et $\vec{j}_s$ sur la surface.

Correction

Q-1) La composante tangentielle de $\vec{E}$ et la composante normale de $\vec{B}$ sont continues ; elles sont nulles dans le conducteur, donc aussi juste à l'extérieur.

Q-2) Ici $\vec{n}_{\text{ext}} = -\vec{u}_x$. $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{\text{ext}}$ donne $\sigma = -\varepsilon_0 E_0$. On cherche $\vec{j}_s = j_s\vec{u}_y$ (tangent, perpendiculaire à $\vec{B}$) : $\mu_0 j_s\,\vec{u}_y \wedge (-\vec{u}_x) = \mu_0 j_s\vec{u}_z = B_0\vec{u}_z$, d'où $\vec{j}_s = \frac{B_0}{\mu_0}\vec{u}_y$.

V Synthèse

★ À retenir

- MG $\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$; MΦ $\operatorname{div}\vec{B}=0$; MF $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; MA $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; $\mu_0\varepsilon_0c^2=1$.
- Formes intégrales : Gauss, flux conservatif, Faraday, Ampère généralisé (Ostrogradski et Stokes).
- Courant de déplacement $\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$: assure la conservation de la charge $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0$.
- Statique : équations découplées, $\vec{E}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$, Poisson. Variable : $\vec{E}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.
- ARQS : $L\ll\lambda=cT$; $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}$, $\operatorname{div}\vec{j}=0$ (loi des nœuds) ; MF conservée.
- Relations de passage : $\vec{E}_2-\vec{E}_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$, $\vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}$; conducteur parfait : champs nuls à l'intérieur.

Équation	Forme locale	Forme intégrale	Contenu physique
Maxwell-Gauss	$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	les charges créent $\vec{E}$
Maxwell-Thomson	$\operatorname{div}\vec{B}=0$	$\oiint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$	pas de monopôle magnétique
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	induction
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$	$\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\mu_0(I_{\text{enl}}+I_D)$	courants et $\partial_t\vec{E}$ créent $\vec{B}$

Tab. 1 : Les équations de Maxwell dans le vide.

VI Exercices d'approfondissement

EXERCICE 9 Condensateur en régime sinusoïdal : correction au champ uniforme

★★★☆☆

Un condensateur plan d'axe Oz, d'armatures circulaires de rayon a séparées par $e\ll a$ (vide), est alimenté en régime sinusoïdal de pulsation ω. L'armature inférieure porte $\sigma(t)$, l'armature supérieure $-\sigma(t)$; on néglige les effets de bord. À l'ordre zéro, $\vec{E}_0=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$, uniforme.

Q-1) Montrer que $\vec{E}_0$ crée un champ $\vec{B}_1=B_1(r,t)\vec{u}_\theta$ et le calculer pour $r<a$.

Q-2) Ce champ variable induit à son tour une correction $\vec{E}_2=E_2(r,t)\vec{u}_z$. En appliquant MF intégrale à un rectangle d'un plan méridien, de côtés verticaux en 0 et en r, montrer que $E_2(r,t)-E_2(0,t)=\frac{r^2}{4c^2}\dfrac{\partial^2E_0}{\partial t^2}$.

Q-3) En déduire, avec $E_2(0,t)=0$, $\vec{E}\approx\vec{E}_0\left(1-\frac{\omega^2r^2}{4c^2}\right)$. À quelle condition le champ est-il uniforme ? Application : $a=2\,\mathrm{cm}$, $f=10\,\mathrm{MHz}$. Conclure sur la notion de capacité.

Correction

Q-1) Les plans méridiens sont plans de symétrie de $\vec{j}_D=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}_0}{\partial t}=\dot{\sigma}\vec{u}_z$: $\vec{B}_1=B_1\vec{u}_\theta$. Ampère généralisé sur le cercle de rayon r : $2\pi rB_1=\mu_0\dot{\sigma}\pi r^2$, soit $B_1=\frac{\mu_0 r}{2}\dot{\sigma}$.

Q-2) Rectangle de hauteur h, parcouru vers $+\vec{u}_z$ en r et vers $-\vec{u}_z$ en 0 ; sa normale, d'après la règle de la main droite, est $-\vec{u}_\theta$. Circulation : $h\,[E_2(r)-E_2(0)]$; flux de $-\dfrac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ à travers le rectangle : $\int_0^r h\frac{\mu_0 r'}{2}\ddot{\sigma}\,\mathrm{d}r' = h\frac{\mu_0 r^2}{4}\ddot{\sigma}$. Avec $\ddot{\sigma}=\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}$ et $\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}$: $E_2(r)-E_2(0)=\frac{r^2}{4c^2}\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}$.

Q-3) En sinusoïdal, $\dfrac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}=-\omega^2 E_0$: $E_2=-\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}E_0$. Le champ est uniforme si $\frac{\omega a}{2c}\ll 1$, soit $a\ll\frac{\lambda}{\pi}$: c'est la condition de l'ARQS. Application : $\frac{\omega^2 a^2}{4c^2}=\left(\frac{2\pi\times10^7\times0{,}02}{6\times10^8}\right)^2=4{,}4\times10^{-6}$, correction négligeable. La capacité $C=\frac{\varepsilon_0\pi a^2}{e}$, définie à partir d'un champ uniforme, n'a de sens que dans l'ARQS.

EXERCICE 10 Validité de l'ARQS dans un solénoïde

★★★☆☆

On reprend le solénoïde de l'exercice « Champ électrique induit par un solénoïde » (a, n, $i=I_0\cos\omega t$), dont le champ intérieur est, dans l'ARQS, $\vec{B}_0=\mu_0 ni\vec{u}_z$ et le champ électrique $\vec{E}_1=-\frac{\mu_0 nr}{2}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$.

Q-1) Exprimer le courant de déplacement $\vec{j}_D$ associé à $\vec{E}_1$. À quelle distribution de courant ressemble-t-il ?

Q-2) Une nappe orthoradiale $j_\theta(r)$ crée un champ axial tel que $\dfrac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}=-\mu_0 j_\theta$. En déduire la correction $B_2(r)-B_2(0)$ apportée par $\vec{j}_D$, puis son ordre de grandeur relatif.

Q-3) En déduire la condition de validité de l'ARQS. Application : $a=5\,\mathrm{cm}$, $f=1\,\mathrm{MHz}$.

Correction

Q-1) $\vec{j}_D=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}_1}{\partial t}=-\frac{\mu_0\varepsilon_0 nr}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}\vec{u}_\theta$: un courant orthoradial réparti dans tout le volume, comme celui d'un ensemble de solénoïdes emboîtés.

Q-2) $\dfrac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}r}=\frac{\mu_0 nr}{2c^2}\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$, d'où $B_2(r)-B_2(0)=\frac{\mu_0 nr^2}{4c^2}\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}\mu_0 ni$. La correction relative est $\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$.

Q-3) L'ARQS est justifiée si $\frac{\omega a}{2c}\ll 1$, c'est-à-dire $a\ll\lambda$. Application : $\frac{\omega a}{2c}=5{,}2\times10^{-4}$, correction relative $2{,}7\times10^{-7}$: approximation excellente.

EXERCICE 11 Nappe de courant oscillante : un champ qui se propage

★★★☆☆

Le plan $z=0$ est parcouru par la densité surfacique de courant $\vec{j}_s=J_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_x$, uniforme ; l'espace est vide par ailleurs. On cherche, pour $z>0$, un champ de la forme $\vec{E}=f\left(t-\frac{z}{c}\right)\vec{u}_x$, $\vec{B}=\frac{1}{c}f\left(t-\frac{z}{c}\right)\vec{u}_y$, et pour $z<0$ le champ symétrique $\vec{E}=f\left(t+\frac{z}{c}\right)\vec{u}_x$, $\vec{B}=-\frac{1}{c}f\left(t+\frac{z}{c}\right)\vec{u}_y$.

Q-1) Vérifier que ces champs satisfont MF et MA dans le vide pour $z\neq 0$.

Q-2) Vérifier la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$; utiliser la relation de passage sur $\vec{B}$ pour déterminer f.

Q-3) Calculer la puissance moyenne cédée par la nappe au champ, par unité de surface, $-\left\langle\vec{j}_s\cdot\vec{E}(0,t)\right\rangle$, et la comparer au flux moyen du vecteur de Poynting $\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ qui s'éloigne de la nappe (chapitre EM5).

Correction

Q-1) Pour $z>0$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\vec{u}_y=-\frac{f'}{c}\vec{u}_y$ et $-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{f'}{c}\vec{u}_y$: MF vérifiée. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}=-\dfrac{\partial B_y}{\partial z}\vec{u}_x=\frac{f'}{c^2}\vec{u}_x=\frac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$: MA vérifiée. Même calcul pour $z<0$.

Q-2) E_x prend la valeur $f(t)$ des deux côtés : continuité assurée. $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \frac{2f(t)}{c}\vec{u}_y = \mu_0 J_0 \cos\omega t\,(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = -\mu_0 J_0 \cos\omega t\,\vec{u}_y$, d'où $f(t) = -\frac{\mu_0 c J_0}{2}\cos\omega t$: la nappe émet deux ondes planes de part et d'autre.

Q-3) $-\langle j_s E_x(0,t)\rangle = \frac{\mu_0 c J_0^2}{2}\langle\cos^2\omega t\rangle = \frac{\mu_0 c J_0^2}{4}$. De chaque côté, $\Pi = \frac{f^2}{\mu_0 c}$, de moyenne $\frac{\mu_0 c J_0^2}{8}$: les deux ondes emportent au total $\frac{\mu_0 c J_0^2}{4}$, exactement la puissance fournie. C'est le principe d'une antenne.

EXERCICE 12 Potentiel vecteur d'un solénoïde

★★★☆☆

Un solénoïde infini (rayon a, n spires par mètre, courant $i(t)$ lentement variable) crée $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$ à l'intérieur, $\vec{0}$ à l'extérieur. On cherche $\vec{A} = A(r,t)\vec{u}_\theta$.

Q-1) Justifier la direction de $\vec{A}$. En utilisant le théorème de Stokes ($\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \Phi$), déterminer A pour $r < a$ et $r > a$.

Q-2) Vérifier que $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. En l'absence de charges, en déduire le champ électrique $\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et le comparer à celui obtenu par MF.

Q-3) Commenter : $\vec{A}$ est-il nul à l'extérieur ?

Correction

Q-1) $\vec{A}$ a les symétries des courants : contenu dans le plan de symétrie $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ et perpendiculaire au plan d'antisymétrie $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$, donc orthoradial. Cercle de rayon r : $2\pi r A = \mu_0 n i\,\pi \min(r,a)^2$, d'où $A = \frac{\mu_0 n i r}{2}$ $(r<a)$ et $A = \frac{\mu_0 n i a^2}{2r}$ $(r>a)$.

Q-2) $\vec{A} = A(r)\vec{u}_\theta$ est de divergence nulle ($\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} = 0$). $\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 n r}{2}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$ à l'intérieur, $-\frac{\mu_0 n a^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta$ à l'extérieur : c'est le champ obtenu par MF.

Q-3) $\vec{A} \neq \vec{0}$ à l'extérieur bien que $\vec{B} = \vec{0}$: seul $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ y est nul. C'est ce potentiel qui « porte » le champ électrique induit hors du solénoïde (et, en mécanique quantique, l'effet Aharonov-Bohm).

VII Classiques des concours

EXERCICE 13 Condensateur plan : solution exacte et limite de l'ARQS

★★★★☆

On reprend le condensateur d'axe Oz (rayon a, vide entre les armatures, effets de bord négligés), sans approximation : entre les armatures, $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_z$ et $\vec{B} = B(r,t)\vec{u}_\theta$.

Q-1) À partir de MF et de MA (sans courant), établir $\dfrac{\partial E}{\partial r} = \dfrac{\partial B}{\partial t}$ et $\frac{1}{r}\dfrac{\partial(rB)}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}$, puis

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Q-2) En régime sinusoïdal, on pose $\underline{E} = E_m F(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ avec $u = \frac{\omega r}{c}$ et $F(0) = 1$. Établir l'équation vérifiée par F et montrer qu'elle admet la solution $F(u) = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(p!)^2}\left(\frac{u}{2}\right)^{2p}$. Comparer à l'exercice d'approfondissement.

Q-3) Exprimer $\underline{B}$ en fonction de F'.

Q-4) F s'annule pour la première fois en $u_1 \approx 2,405$. Que devient le dispositif si $\frac{\omega a}{c} = u_1$? Calculer la fréquence correspondante pour $a = 1\,\mathrm{cm}$. Conclure.

Correction

Q-1) MF : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(E\vec{u}_z) = -\dfrac{\partial E}{\partial r}\vec{u}_\theta = -\dfrac{\partial B}{\partial t}\vec{u}_\theta$. MA : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(B\vec{u}_\theta) = \frac{1}{r}\dfrac{\partial (rB)}{\partial r}\vec{u}_z = \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}\vec{u}_z$. En dérivant la seconde par rapport à t et en utilisant la première : $\frac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial E}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, qui est l'équation proposée.

Q-2) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2$ et $r = \frac{cu}{\omega}$: $F'' + \frac{F'}{u} + F = 0$. En cherchant $F = \sum a_p u^{2p}$: $\sum a_p (2p)^2 u^{2p-2} + \sum a_p u^{2p} = 0$, d'où $a_{p+1} = -\frac{a_p}{4(p+1)^2}$ et $a_p = \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2}$: c'est la série proposée (fonction de Bessel J_0). Au premier ordre, $F \approx 1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$: on retrouve la correction perturbative.

Q-3) $\dfrac{\partial B}{\partial t} = \dfrac{\partial E}{\partial r}$ donne $\mathrm{i}\omega \underline{B} = E_m \frac{\omega}{c} F'(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, soit $\underline{B} = -\frac{\mathrm{i}E_m}{c} F'(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$: $\vec{B}$ est en quadrature avec $\vec{E}$.

Q-4) Le champ électrique s'annule au bord des armatures : la structure n'est plus un condensateur mais une **cavité résonante** (mode propre). $f = \frac{u_1 c}{2\pi a} = \frac{2{,}405 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 0{,}01} = 11\,\mathrm{GHz}$. Bien avant, le champ cesse d'être uniforme et $q = Cu$ perd son sens : l'ARQS exige $\frac{\omega a}{c} \ll 1$.

EXERCICE 14 — Relaxation de la charge dans un milieu conducteur

Une boule conductrice de rayon R porte à $t = 0$ la charge Q_0. Elle est plongée dans un milieu illimité, homogène, faiblement conducteur, de conductivité σ et de permittivité ε_0, qui obéit à la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

Q-1) Justifier que $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_r$ et $\vec{j} = j(r,t)\vec{u}_r$ pour $r > R$. Exprimer E en fonction de la charge $Q(t)$ de la boule.

Q-2) Exprimer l'intensité qui quitte la boule et en déduire $Q(t)$. Définir le temps de relaxation τ.

Q-3) Montrer que $\vec{B} = \vec{0}$. Vérifier MA : que peut-on dire de $\vec{j} + \vec{j}_D$?

Q-4) Un milieu ohmique initialement chargé en volume (ρ_0) : établir l'équation vérifiée par ρ et conclure. Calculer τ pour l'eau de mer $(\sigma = 4\,\mathrm{S\cdot m^{-1}})$ et pour le cuivre.

Q-5) Calculer l'énergie dissipée par effet Joule ($\iiint \sigma E^2\,\mathrm{d}\tau$ intégrée de 0 à l'infini) et la comparer à l'énergie électrostatique initiale $\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

Correction

Q-1) Symétrie sphérique : tout plan contenant O et M est plan de symétrie, $\vec{E}$ et $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ sont radiaux et ne dépendent que de r. Le milieu restant neutre (question 4), Gauss donne $E = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Q-2) $I = 4\pi R^2 \sigma E(R) = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0} = -\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, d'où $Q = Q_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$.

Q-3) Même argument que pour la source radioactive : $\vec{B}$, pseudo-vecteur, est nul. MA impose alors $\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$; en effet $\varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r^2}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -j$: courants de conduction et de déplacement se compensent.

Q-4) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\sigma\vec{E}) = 0$ et $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donnent $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$: $\rho = \rho_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$, le volume devient neutre et les charges se retrouvent en surface. Eau de mer : $\tau = 2{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{s}$; cuivre : $1{,}5 \times 10^{-19}\,\mathrm{s}$ (à cette échelle la loi d'Ohm n'est plus valable, mais la conclusion demeure).

Q-5) $W = \int_0^\infty \mathrm{d}t \int_R^\infty \sigma \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0^2 R}\int_0^\infty Q_0^2 \mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0^2 R}\frac{Q_0^2\tau}{2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$: toute l'énergie électrostatique initiale est dissipée, sur place, par effet Joule (aucune énergie n'est rayonnée puisque $\vec{B} = \vec{0}$).