LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

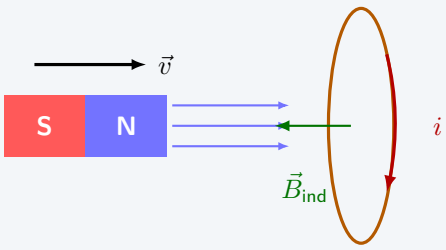
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

EM3

ÉLECTROMAGNÉTISME

Induction électromagnétique

Flux magnétique — Loi de Faraday — Loi de Lenz — Inductances propre et mutuelle — Transformateur — Conversion électromécanique — Courants de Foucault — Haut-parleur



$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

> *Convertir le magnétisme en électricité.*
>
> — Michael Faraday, programme de recherche noté dans son carnet (1822), réalisé en 1831

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Rails de Laplace »

EM3 — Induction

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Orienter un circuit, calculer le flux magnétique qui le traverse ; utiliser la loi de Faraday et la loi de Lenz en précisant les conventions de signe.
- Définir l'inductance propre et l'inductance mutuelle ; les calculer pour des solénoïdes longs ; écrire les équations de circuits couplés et faire un bilan d'énergie.
- Expliquer le fonctionnement du transformateur de tension.
- Établir les équations électrique et mécanique d'un convertisseur (rails de Laplace, spire en rotation) et le bilan $\mathcal{P}_L + e\,i = 0$; expliquer le freinage par induction et les courants de Foucault.
- Décrire le haut-parleur électrodynamique comme un convertisseur électromécanique.

Comment lire ce cours

Étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires : les courants sont les mêmes en tout point d'une branche et les champs magnétiques sont calculés comme en magnétostatique. La simulation PhysioNova « Rails de Laplace » montre la barre freinée par le courant qu'elle induit. Exercices d'application, d'approfondissement et classiques des concours sont tous corrigés.

Table des matières

I Les lois de l'induction . . . 3
I.1 Mise en évidence expérimentale . . . 3
I.2 Flux magnétique à travers un circuit orienté . . . 3
I.3 Loi de Faraday et loi de Lenz . . . 3
II Circuits fixes : auto-induction et induction mutuelle . . . 6
II.1 Flux propre et inductance propre . . . 6
II.2 Étude énergétique d'un circuit siège d'auto-induction . . . 6
II.3 Inductance mutuelle . . . 7
II.4 Circuits couplés : équations et bilan d'énergie . . . 8
II.5 Transformateur de tension . . . 8
III Circuits mobiles : conversion de puissance . . . 10
III.1 Rails de Laplace en générateur . . . 10
III.2 Spire en rotation : l'alternateur . . . 11
III.3 Freinage par induction et courants de Foucault . . . 12
III.4 Haut-parleur électrodynamique . . . 12
IV Synthèse . . . 14
V Exercices d'approfondissement . . . 15
VI Classiques des concours . . . 16

I Les lois de l'induction

I.1 Mise en évidence expérimentale

En 1831, Michael Faraday découvre qu'un courant apparaît dans un circuit fermé lorsque le champ magnétique qui le traverse varie. Deux expériences simples résument le phénomène.

- **Aimant mobile, bobine fixe.** Une bobine est reliée à un galvanomètre. Quand on approche le pôle nord d'un aimant, l'aiguille dévie ; quand on l'éloigne, elle dévie en sens contraire ; si l'aimant est immobile, rien ne se passe. La déviation est d'autant plus grande que le mouvement est rapide.
- **Bobine mobile, champ stationnaire.** On déplace la bobine près d'un aimant fixe : on observe les mêmes effets. On en obtient encore en remplaçant l'aimant par une seconde bobine fixe dont on fait varier le courant.

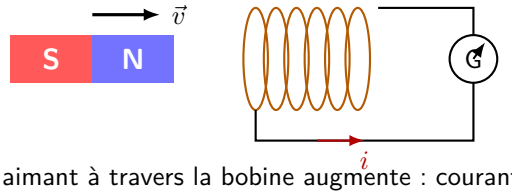


Fig. 1 : Expérience de Faraday : un courant induit apparaît tant que le flux magnétique à travers la bobine varie.

Le point commun à toutes ces expériences est la **variation du flux magnétique** à travers le circuit. Qu'on déplace l'aimant ou la bobine, seul compte le mouvement relatif : deux observateurs liés l'un à l'aimant, l'autre à la bobine, décrivent le même courant, l'un comme un effet d'un champ variable, l'autre comme un effet du mouvement du conducteur. Cette double interprétation d'un même phénomène fut l'un des points de départ de la relativité d'Einstein (1905).

I.2 Flux magnétique à travers un circuit orienté

Définition — Flux magnétique R

On choisit un sens de parcours (arbitraire) du circuit $\mathcal{C}$. La normale $\vec{n}$ à une surface S s'appuyant sur $\mathcal{C}$ est orientée par la règle de la main droite. Le flux magnétique est

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S \qquad (\text{en webers} : 1\,\mathrm{Wb} = 1\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2)$$

Comme $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, il ne dépend pas de la surface choisie : c'est le « flux à travers le circuit ». Pour une bobine de N spires identiques traversées par le même champ, $\Phi = N\Phi_1$.

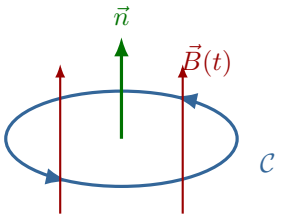
I.3 Loi de Faraday et loi de Lenz

Loi de Faraday R

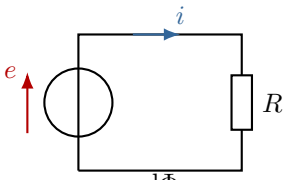
Un circuit filiforme traversé par un flux $\Phi(t)$ variable est le siège d'une **force électromotrice induite**

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

orientée dans le sens de parcours choisi. Électriquement, le circuit est équivalent à un générateur de f.é.m. e, en **convention générateur**, en série avec ses autres dipôles (résistance R, éventuellement inductance propre). Le courant induit i est compté dans le même sens.



sens de parcours $\Rightarrow \vec{n}$ (main droite)



$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Ri$$

Fig. 2 : Orientation du circuit et schéma électrique équivalent : e et i sont comptés dans le sens de parcours choisi (convention générateur pour e).

Loi de modération de Lenz R

Les effets de l'induction (courant induit, champ qu'il crée, forces de Laplace qu'il subit) **s'opposent aux causes** qui leur ont donné naissance. C'est la signification physique du signe $-$ de la loi de Faraday : si Φ augmente, $e < 0$, le courant induit circule dans le sens opposé à l'orientation et crée à l'intérieur du circuit un champ qui diminue le flux.

Les deux causes de variation du flux R

- **Circuit fixe dans un champ variable** (induction de Neumann) : transformateur, plaque à induction, carte RFID, recharge sans fil. Le champ variable crée un champ électrique à circulation non conservative (équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, chapitre EM4).
- **Circuit mobile dans un champ stationnaire** (induction de Lorentz) : alternateur, dynamo, freinage par induction, microphone et haut-parleur. Les porteurs entraînés avec le conducteur à la vitesse $\vec{v}_e$ subissent $q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$: tout se passe comme s'ils étaient soumis au **champ électromoteur** $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$, et $e = \oint (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.

On évite les situations où la loi de Faraday n'est pas applicable (conducteurs massifs à contacts glissants, circuit mal défini) : on revient alors au champ électromoteur.

☞ Méthode — Résoudre un problème d'induction M

1. **Orienter** le circuit : cela fixe $\vec{n}$, le signe de Φ, de e et de i.
2. Calculer le flux $\Phi(t)$ (sans oublier le nombre de spires), puis $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.
3. Dessiner le **schéma électrique équivalent** et écrire la loi des mailles (**équation électrique**).
4. S'il y a des pièces mobiles, calculer les forces de Laplace sur le courant induit et écrire l'**équation mécanique**.
5. Vérifier les signes avec la loi de Lenz : un courant induit qui *favoriserait* sa cause est une erreur.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Confondre la f.é.m. e (convention générateur) et la tension aux bornes d'une bobine (convention récepteur : $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$).

- Oublier le facteur N dans le flux d'une bobine.
- Croire que le courant induit s'oppose au champ : il s'oppose à la *variation* du flux (si le flux diminue, le champ induit renforce le champ extérieur).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Prévoir sans calcul avec la loi de Lenz

✦✧✧✧✧

Q-1) On éloigne le pôle nord d'un aimant d'un anneau métallique fermé, le long de son axe. Quel est le sens du courant induit vu depuis l'aimant ? L'anneau est-il attiré ou repoussé ?

Q-2) On lâche un aimant puissant dans un tube vertical en cuivre (non magnétique). Il tombe beaucoup plus lentement que dans un tube en plastique. Expliquer.

Q-3) Un anneau métallique enfilé sur le noyau d'une bobine saute lorsqu'on alimente brusquement la bobine (anneau de Thomson). Expliquer. Que se passe-t-il si l'anneau est fendu ?

Correction

Q-1) Le flux sortant du pôle nord diminue dans l'anneau : le courant induit crée un champ de même sens que celui de l'aimant, l'anneau présente une face sud à l'aimant ; vu depuis l'aimant, le courant tourne dans le sens horaire. L'anneau est **attiré** : l'induction s'oppose à l'éloignement.

Q-2) Dans chaque tranche de cuivre que l'aimant approche ou quitte, le flux varie et des courants induits circulent ; leurs forces s'opposent au mouvement relatif : l'aimant atteint rapidement une faible vitesse limite. Le plastique, isolant, ne permet aucun courant.

Q-3) Le flux de la bobine à travers l'anneau augmente brusquement ; le courant induit crée un champ opposé : anneau et bobine se comportent comme deux aimants face à face par des pôles de même nom et se repoussent. Un anneau fendu n'est pas un circuit fermé : pas de courant, pas de force.

EXERCICE 2 Spire fixe dans un champ sinusoïdal

✦✧✧✧✧

Une spire circulaire de rayon $a = 4{,}0\,\text{cm}$ et de résistance $R = 0{,}050\,\Omega$, orientée par $\vec{u}_z$, est plongée dans le champ uniforme $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_z$, avec $B_0 = 20\,\text{mT}$ et $f = 50\,\text{Hz}$. On néglige l'auto-induction.

Q-1) Calculer le flux, la f.é.m. et le courant induits. Amplitude du courant ?

Q-2) Vérifier la loi de Lenz pour $-\pi < \omega t < 0$.

Q-3) Quelle est la puissance moyenne dissipée dans la spire ?

Correction

Q-1) $\Phi = \pi a^2 B_0\cos\omega t$, $e = \pi a^2 B_0\omega\sin\omega t$, $i = e/R$ d'amplitude $\dfrac{\pi a^2 B_0\omega}{R} = 0{,}63\,\text{A}$.

Q-2) Pour $-\pi < \omega t < 0$, B croît et $\sin\omega t < 0$: $i < 0$, le courant tourne dans le sens indirect autour de $\vec{u}_z$ et crée au centre un champ selon $-\vec{u}_z$, qui s'oppose à l'augmentation du flux.

Q-3) $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}RI_m^2 = 10\,\text{mW}$.

II Circuits fixes : auto-induction et induction mutuelle

II.1 Flux propre et inductance propre

Un circuit parcouru par un courant i crée un champ magnétique proportionnel à i (loi de Biot et Savart) ; le flux de ce champ à travers le circuit lui-même, le **flux propre**, est donc proportionnel à i.

Définition — Inductance propre R

$$\Phi_p = L\,i \qquad e_p = -\frac{\mathrm{d}\Phi_p}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

L, **inductance propre** (ou auto-inductance), en henrys (H), est toujours **positive** (avec la même orientation pour i et pour le calcul du flux) ; elle ne dépend que de la géométrie du circuit et du milieu.

En convention récepteur, une bobine de résistance r vérifie $u = ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: on retrouve le dipôle bobine du cours d'électrocinétique.

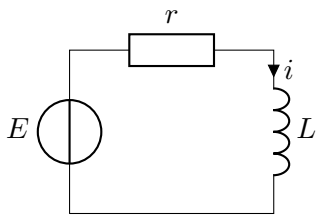
Solénoïde long D. Une bobine de N spires jointives, de longueur ℓ et de section S ($\ell \gg \sqrt{S}$), est assimilée à un solénoïde infini : $B = \mu_0 \dfrac{N}{\ell} i$ à l'intérieur. Le flux à travers les N spires est $\Phi_p = N\,BS = \mu_0 \dfrac{N^2 S}{\ell} i$, d'où

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

Ordres de grandeur

$N = 800$ spires, $\ell = 40\,\mathrm{cm}$, rayon $2{,}5\,\mathrm{cm}$: $L \approx 4\,\mathrm{mH}$. Inductances usuelles : du µH (bobine de radio) au henry (bobine à noyau de fer doux, qui multiplie L par 10^2 à 10^3). Un simple fil possède une inductance de l'ordre de $1\,\mu\mathrm{H}$ par mètre.

II.2 Étude énergétique d'un circuit siège d'auto-induction



Bilan de puissance D. Une bobine d'inductance L et de résistance r est alimentée par une source de f.é.m. E. La loi des mailles s'écrit $E = ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$; en la multipliant par i :

$$Ei = ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

La puissance fournie par la source est en partie dissipée par effet Joule, en partie stockée sous forme d'**énergie magnétique** $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$. À la coupure, cette énergie est restituée : c'est l'origine de l'étincelle de rupture.

Densité d'énergie magnétique D. Pour le solénoïde long, $\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2S}{\ell}i^2 = \dfrac{B^2}{2\mu_0} \times S\ell$: l'énergie est répartie dans le volume intérieur avec la densité

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \mathcal{E}_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}\tau$$

résultat général (chapitre EM5). On en déduit une seconde méthode de calcul de L : $L = \dfrac{2\mathcal{E}_m}{i^2}$.

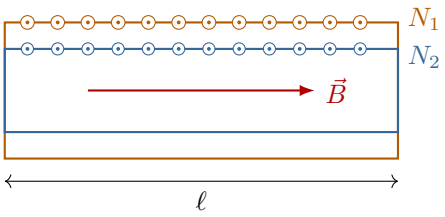
II.3 Inductance mutuelle

Deux circuits fixes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, parcourus par i_1 et i_2, sont chacun traversés par leur flux propre et par le flux du champ créé par l'autre.

Définition — Inductance mutuelle R

$$\Phi_{1\to2} = M_{12}\,i_1 \qquad \Phi_{2\to1} = M_{21}\,i_2 \qquad \text{avec} \qquad M_{12} = M_{21} = M \quad \text{(théorème de Neumann, admis)}$$

Les flux totaux sont $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ et $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$. M (en henrys) est **algébrique** : son signe dépend des orientations choisies pour les deux circuits.



Deux bobines longues en influence totale D. Deux bobines de même axe, de même longueur ℓ et de même section S, sont enroulées l'une sur l'autre (N_1 et N_2 spires, même sens). Le champ de la bobine 1, $B_1 = \mu_0\frac{N_1}{\ell}i_1$, traverse les N_2 spires de la bobine 2 : $\Phi_{1\to2} = N_2 B_1 S$. D'où

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{\ell} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Toutes les lignes de champ de l'une traversent l'autre : c'est l'**influence totale**, ou couplage parfait. Si la bobine 2, de section S_2, est seulement *placée à l'intérieur* de la bobine 1 (section $S_1 > S_2$), on calcule plus simplement $\Phi_{1\to2} = N_2 B_1 S_2$ et $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{\ell}$; le calcul de $\Phi_{2\to1}$ donne le même résultat, comme l'affirme le théorème de Neumann, mais $M < \sqrt{L_1 L_2}$.

Énergie de deux circuits couplés R D

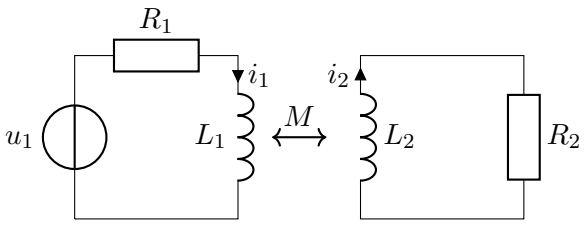
$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M\,i_1 i_2 \;\geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Démonstration. L'énergie magnétique, intégrale de $\frac{B^2}{2\mu_0}$ sur tout l'espace, est positive quels que soient i_1 et i_2. Avec $x = i_2/i_1$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}i_1^2\left(L_1 + 2Mx + L_2 x^2\right) \geq 0 \quad \text{pour tout } x,$$

donc le discriminant $4M^2 - 4L_1L_2$ du trinôme est négatif ou nul. On définit le **coefficient de couplage** $k = \dfrac{|M|}{\sqrt{L_1L_2}} \in [0,1]$.

II.4 Circuits couplés : équations et bilan d'énergie



Équations électriques D. Chaque circuit est le siège de la f.é.m. $e_k = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t}$. Pour le primaire alimenté par u_1 et le secondaire fermé sur R_2 :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \qquad 0 = R_2 i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

En **régime sinusoïdal forcé** (notation complexe $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to \mathrm{j}\omega$) :

$$\underline{u}_1 = (R_1 + \mathrm{j}L_1\omega)\underline{i}_1 + \mathrm{j}M\omega\,\underline{i}_2, \qquad 0 = (R_2 + \mathrm{j}L_2\omega)\underline{i}_2 + \mathrm{j}M\omega\,\underline{i}_1.$$

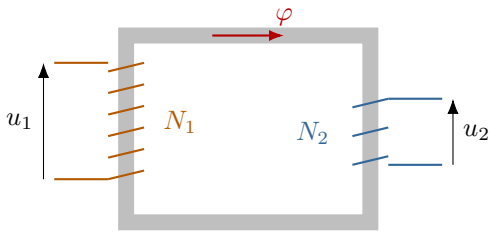
Le primaire « voit » l'impédance $\underline{Z}_e = R_1 + \mathrm{j}L_1\omega + \dfrac{M^2\omega^2}{R_2 + \mathrm{j}L_2\omega}$: le secondaire ajoute une résistance apparente, par laquelle le primaire lui transmet de la puissance.

Bilan d'énergie D. En multipliant la première équation par i_1, la seconde par i_2 et en sommant :

$$u_1 i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right),$$

car $Mi_1\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + Mi_2\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mi_1i_2)$. La puissance fournie se répartit entre effet Joule dans les deux circuits et variation de l'énergie magnétique. En régime sinusoïdal, la valeur moyenne du dernier terme est nulle : $\langle u_1 i_1\rangle = R_1\langle i_1^2\rangle + R_2\langle i_2^2\rangle$, la puissance reçue par R_2 ayant transité par le couplage magnétique.

II.5 Transformateur de tension



Un transformateur est formé de deux enroulements, le **primaire** (N_1 spires) et le **secondaire** (N_2 spires), bobinés sur un même circuit magnétique fermé en fer feuilleté qui canalise les lignes de champ : chaque spire est traversée par le même flux $\varphi(t)$ (couplage parfait).

Rapport des tensions D. En négligeant les résistances des enroulements, avec la convention récepteur aux deux enroulements orientés dans le même sens autour du circuit magnétique : $u_1 = N_1\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ et $u_2 = N_2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

Transformateur parfait R

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = m \qquad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} \qquad u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

La relation entre les intensités traduit le fait qu'un circuit magnétique idéal (perméabilité infinie) impose $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$; la puissance reçue au primaire est intégralement transmise au secondaire. Une résistance R_u branchée au secondaire est vue du primaire comme la résistance R_u/m^2 (**adaptation d'impédance**). Le transformateur ne fonctionne qu'en régime variable.

Remarque

Transport de l'énergie électrique. À puissance transportée $\mathcal{P} = UI$ donnée, les pertes en ligne $R_\ell I^2 = R_\ell \mathcal{P}^2/U^2$ varient comme $1/U^2$: on élève la tension (jusqu'à $400\,\mathrm{kV}$) au départ des centrales et on l'abaisse près des utilisateurs. Les transformateurs réels ont des rendements de 95 à $99\,\%$; leurs pertes proviennent de l'effet Joule dans les enroulements et des pertes dans le fer (courants de Foucault, réduits par le feuilletage, et hystérésis).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Inductance et énergie d'une bobine ✦✦✧✧✧

Une bobine de $N = 800$ spires, de longueur $\ell = 40\,\mathrm{cm}$ et de rayon $2{,}5\,\mathrm{cm}$, de résistance $r = 4{,}0\,\Omega$, est assimilée à un solénoïde infini.

Q-1) Calculer son inductance L et retrouver L par l'énergie magnétique.

Q-2) Elle est branchée à $t = 0$ sur une source idéale de tension $E = 12\,\mathrm{V}$. Établir $i(t)$, la constante de temps et l'énergie finalement stockée.

Q-3) Quel serait l'effet d'un noyau de fer doux de perméabilité relative $\mu_r = 500$?

Correction

Q-1) $L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell} = 3{,}9\,\mathrm{mH}$. Énergie : $\frac{B^2}{2\mu_0}\pi a^2 \ell = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell} i^2$: même L.

Q-2) $i = \dfrac{E}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \dfrac{L}{r} = 0{,}99\,\mathrm{ms}$; $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{r}\right)^2 = 18\,\mathrm{mJ}$.

Q-3) μ_0 est remplacé par $\mu_0 \mu_r$ dans le noyau : $L \approx 2\,\mathrm{H}$ et $\tau \approx 0{,}5\,\mathrm{s}$.

EXERCICE 4 Bobine exploratrice dans un solénoïde ✦✦✧✧✧

Un long solénoïde ($n = 2000\,\mathrm{spires \cdot m^{-1}}$) est parcouru par $i_1 = I_0 \cos \omega t$, avec $I_0 = 2{,}0\,\mathrm{A}$ et $f = 1{,}0\,\mathrm{kHz}$. Une petite bobine de $N_2 = 100$ spires de rayon $r = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ est placée à l'intérieur ; son axe fait l'angle ψ avec celui du solénoïde. Elle est reliée à un voltmètre de très grande résistance.

Q-1) Calculer l'inductance mutuelle $M(\psi)$.

Q-2) Exprimer la tension mesurée et son amplitude pour $\psi = 0$. Comment utiliser ce dispositif pour mesurer un champ alternatif ?

Correction

Q-1) $\Phi_{1\to2} = N_2\,\mu_0 n i_1\,\pi r^2\cos\psi$, donc $M = \mu_0 n N_2 \pi r^2 \cos\psi$, soit $7{,}9\times10^{-5}\,\mathrm{H}$ pour $\psi = 0$.

Q-2) Aucun courant ne circule dans la petite bobine : $u_2 = -e_2 = M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -M\omega I_0\sin\omega t$, d'amplitude $M\omega I_0 = 0{,}99\,\mathrm{V}$. L'amplitude étant proportionnelle à $B\cos\psi$, on mesure le champ en orientant la bobine pour obtenir le maximum (sonde à induction).

EXERCICE 5 Transformateur d'alimentation et transport

✦✦✧✧✧

Q-1) Un transformateur parfait abaisse la tension efficace du secteur, $230\,\mathrm{V}$, à $12\,\mathrm{V}$. Le primaire comporte $N_1 = 1150$ spires. Combien de spires au secondaire ?

Q-2) Le secondaire alimente une résistance de $6{,}0\,\Omega$. Calculer les intensités efficaces et la résistance vue du primaire.

Q-3) On transporte $10\,\mathrm{MW}$ sur une ligne de résistance $2{,}0\,\Omega$ sous $20\,\mathrm{kV}$, puis sous $225\,\mathrm{kV}$. Comparer les pertes.

Correction

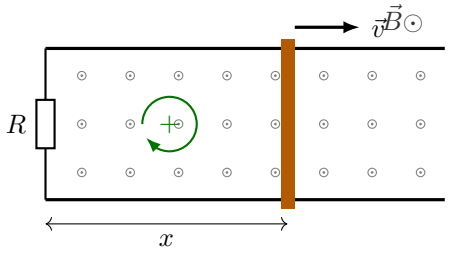
Q-1) $N_2 = N_1\dfrac{U_2}{U_1} = 60$ spires.

Q-2) $I_2 = 2{,}0\,\mathrm{A}$, $I_1 = \dfrac{N_2}{N_1}I_2 = 0{,}10\,\mathrm{A}$; $R_u\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 2{,}2\,\mathrm{k\Omega}$.

Q-3) $I = 500\,\mathrm{A}$ puis $44\,\mathrm{A}$; pertes $500\,\mathrm{kW}$ $(5\,\%)$ puis $4{,}0\,\mathrm{kW}$ $(0{,}04\,\%)$.

III Circuits mobiles : conversion de puissance

III.1 Rails de Laplace en générateur



Une barre de masse m, de longueur utile ℓ, glisse sans frottement sur deux rails horizontaux reliés par une résistance R (résistance totale du circuit). Le champ $\vec{B} = B\vec{u}_z$ est uniforme, stationnaire, orthogonal au plan des rails ; on néglige l'inductance propre du circuit. La barre est lancée à $t = 0$ à la vitesse $v_0\vec{u}_x$. On oriente le circuit dans le sens direct autour de $\vec{u}_z$ (normale $+\vec{u}_z$) : dans la barre, ce sens est celui de $+\vec{u}_y$.

Équation électrique D. $\Phi = B\ell x$, donc $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\ell v$ et $Ri = e$: $i = -\dfrac{B\ell v}{R}$. Le courant circule en sens inverse de l'orientation : il crée un champ qui s'oppose à l'augmentation du flux. On retrouve e par le champ électromoteur : $\vec{E}_m = v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = -vB\vec{u}_y$, d'où $e = \int_0^\ell (-vB)\,\mathrm{d}y = -B\ell v$.

Équation mécanique D. La barre parcourue par i (selon $+\vec{u}_y$ algébriquement) subit $\vec{F} = i\ell\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z =$

$i\ell B\vec{u}_x = -\dfrac{B^2\ell^2}{R} v\,\vec{u}_x$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2\ell^2}{R}v \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = v_0\mathrm{e}^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

La force de Laplace est une force de **freinage** de type frottement fluide (loi de Lenz). La barre parcourt la distance finie $v_0\tau$.

Bilan énergétique D. Multiplions l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v : $ei = Ri^2$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Fv = \mathcal{P}_L$. Or $\mathcal{P}_L = i\ell Bv = -ei$. D'où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -Ri^2$: l'énergie cinétique est convertie en énergie électrique, elle-même dissipée par effet Joule.

Couplage électromécanique parfait R

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la puissance des forces de Laplace et la puissance de la f.é.m. induite sont opposées :

$$\mathcal{P}_L + e\,i = 0$$

- En **générateur** (alternateur, dynamo), l'opérateur fournit un travail contre les forces de Laplace ($\mathcal{P}_L < 0$), converti en puissance électrique ($ei > 0$).
- En **moteur**, une source électrique fournit de la puissance contre la f.é.m. induite, appelée alors **force contre-électromotrice** ($ei < 0$), convertie en travail des forces de Laplace ($\mathcal{P}_L > 0$).

Le champ magnétique sert d'intermédiaire : il ne fournit ni ne reçoit d'énergie.

Fonctionnement en moteur. Si l'on remplace la résistance par une source de f.é.m. E_0 (en série avec R), $Ri = E_0 - B\ell v$ (orientation adaptée) et $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{B\ell}{R}(E_0 - B\ell v)$: la barre accélère jusqu'à la vitesse limite $v_\ell = \dfrac{E_0}{B\ell}$, pour laquelle la force contre-électromotrice compense E_0 et le courant s'annule. C'est la version linéaire du moteur à courant continu ; l'exercice des rails à intensité imposée du chapitre EM2 trouve ici son explication énergétique.

III.2 Spire en rotation : l'alternateur

Équations D. Une bobine de N spires de surface S, de résistance totale R (inductance négligée), tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Δ orthogonal à un champ $\vec{B}$ uniforme et stationnaire. Avec $\theta = \omega t$ l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$:

$$\Phi = NBS\cos\omega t \qquad e = NBS\omega\sin\omega t \qquad i = \frac{NBS\omega}{R}\sin\omega t$$

La bobine délivre une tension alternative de pulsation égale à sa vitesse de rotation : c'est le principe de l'**alternateur**. Le couple de Laplace, $\Gamma_\Delta = -NiSB\sin\omega t = -\dfrac{(NBS)^2\omega}{R}\sin^2\omega t$, est **résistant** ; on vérifie $\Gamma_\Delta\,\omega + ei = 0$. Pour maintenir la rotation, l'opérateur (turbine) doit fournir le couple moyen $\dfrac{(NBS)^2\omega}{2R}$, donc la puissance moyenne $\dfrac{(NBS\omega)^2}{2R}$ qui est dissipée dans la charge.

Remarque

Dans les centrales (hydrauliques, thermiques, nucléaires, éoliennes), c'est en pratique un électroaimant (rotor) qui tourne devant des bobinages fixes (stator) : c'est le flux qui varie, la physique est la même. Une fréquence de $50\,\mathrm{Hz}$ correspond à $3000\,\mathrm{tr}\cdot\mathrm{min}^{-1}$ pour une paire de pôles.

Spire en rotation libre. Si la bobine, de moment d'inertie J, est simplement lancée à la vitesse ω_0 en $\theta = 0$, le théorème du moment cinétique s'écrit $J\ddot{\theta} = -\dfrac{(NBS)^2}{R}\dot{\theta}\sin^2\theta$. Comme $\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta$, on intègre : $J(\dot{\theta}-\omega_0) = -\dfrac{(NBS)^2}{2R}\left(\theta - \dfrac{\sin 2\theta}{2}\right)$. La bobine s'arrête à l'angle θ_f tel que $2\theta_f - \sin 2\theta_f = \dfrac{4RJ\omega_0}{(NBS)^2}$, son énergie cinétique ayant été dissipée par effet Joule.

III.3 Freinage par induction et courants de Foucault

Dans un conducteur **massif** en mouvement dans un champ magnétique, ou fixe dans un champ variable, les courants induits circulent en boucles dans la masse : ce sont les **courants de Foucault**. D'après la loi de Lenz, leurs forces de Laplace s'opposent au mouvement relatif ; leur effet Joule échauffe le conducteur.

- **Freinage** : ralentisseurs des poids lourds et des autocars (un disque solidaire de la transmission tourne entre des électroaimants), freins de trains et de manèges, amortissement des balances. Le freinage, proportionnel à la vitesse, ne peut pas immobiliser un véhicule, mais il est sans usure.
- **Chauffage** : plaques et fours à induction (champ de 20 à $50\,\mathrm{kHz}$ créé par une bobine sous la plaque, qui reste froide).
- **Pertes** : dans les noyaux des transformateurs et des moteurs, que l'on **feuillette** en tôles isolées pour couper les boucles de courant.

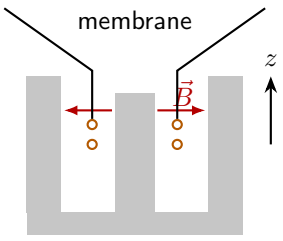
Estimation de la puissance dissipée D**.** Un disque conducteur de rayon b, d'épaisseur h, de conductivité γ, d'axe Oz, est soumis au champ uniforme $B_0\cos\omega t\,\vec{u}_z$; on néglige le champ des courants induits. Par symétrie, $\vec{j} = j(r,t)\vec{u}_\theta$. La loi de Faraday appliquée au cercle de rayon r (le champ électrique induit est orthoradial) donne $2\pi rE = \pi r^2 B_0\omega\sin\omega t$, d'où $\vec{j} = \gamma\vec{E} = \dfrac{\gamma B_0\omega r}{2}\sin\omega t\,\vec{u}_\theta$ et

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \iiint \frac{\langle j^2\rangle}{\gamma}\mathrm{d}\tau = \frac{\gamma B_0^2\omega^2}{8}\int_0^b r^2\,2\pi r h\,\mathrm{d}r, \qquad \text{soit}$$

$$\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\pi\gamma h B_0^2\omega^2 b^4}{16}}$$

La puissance croît comme ω^2 et comme b^4 : en découpant un noyau en tôles minces isolées les unes des autres, on réduit fortement les pertes.

III.4 Haut-parleur électrodynamique



Une bobine de longueur totale de fil ℓ, de résistance R et d'inductance L, solidaire d'une membrane, se déplace selon l'axe Oz dans l'entrefer annulaire d'un aimant où le champ est **radial**, $\vec{B} = B\vec{u}_r$, de norme constante.

L'équipage mobile (masse m) est rappelé par la suspension (force $-kz\vec{u}_z$) et freiné par l'air (force $-\alpha v\vec{u}_z$, dont la puissance est en partie rayonnée sous forme sonore). Le courant i est compté selon $\vec{u}_\theta$.

Le dispositif est équivalent à des rails de Laplace : chaque élément de fil est perpendiculaire à $\vec{B}$ et se déplace perpendiculairement à lui-même et à $\vec{B}$.

- **Force de Laplace** D : $\mathrm{d}\vec{F} = i\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_r = -iB\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_z$, d'où $\vec{F} = -B\ell\,i\,\vec{u}_z$.
- **F.é.m. induite** D : $\vec{E}_m = v\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r = vB\vec{u}_\theta$, d'où $e = B\ell v$; on vérifie $\mathcal{P}_L + ei = -B\ell iv + B\ell vi = 0$.

Équations du haut-parleur R

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kz - \alpha v - B\ell\,i \qquad\qquad u = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - B\ell\,v$$

Bilan D**.** En multipliant la première équation par v, la seconde par i et en éliminant le terme de couplage $B\ell iv$:

$$ui = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2\right) + Ri^2 + \alpha v^2.$$

En régime périodique, $\langle ui\rangle = R\langle i^2\rangle + \alpha\langle v^2\rangle$: la puissance électrique reçue est dissipée par effet Joule ou cédée à l'air. Le couplage $B\ell$ n'apparaît pas dans le bilan, mais il fixe la vitesse obtenue pour un courant donné : un aimant puissant améliore le rendement. Le même dispositif, utilisé à l'envers, est un **microphone électrodynamique**.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 — Barre freinée par induction

★★☆☆☆

Une barre de masse $m = 25\,\mathrm{g}$ et de longueur utile $\ell = 15\,\mathrm{cm}$ est lancée à $v_0 = 3{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sur des rails horizontaux fermés par $R = 0{,}20\,\Omega$, dans un champ vertical $B = 0{,}80\,\mathrm{T}$.

Q-1) Calculer la constante de temps et la distance parcourue jusqu'à l'arrêt.

Q-2) Vérifier que l'énergie dissipée par effet Joule est égale à l'énergie cinétique initiale.

Q-3) Comment varie la distance d'arrêt si l'on double B ? si l'on ouvre le circuit ?

Correction

Q-1) $\tau = \dfrac{mR}{B^2\ell^2} = 0{,}35\,\mathrm{s}$; distance $v_0\tau = 1{,}04\,\mathrm{m}$.

Q-2) $\displaystyle\int_0^\infty Ri^2\mathrm{d}t = \frac{B^2\ell^2v_0^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{B^2\ell^2v_0^2}{R}\frac{\tau}{2} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = 0{,}11\,\mathrm{J}.$

Q-3) $\tau \propto 1/B^2$: distance divisée par 4. Circuit ouvert : pas de courant, pas de freinage, la barre garde sa vitesse.

EXERCICE 7 — Chute freinée d'une barre

★★☆☆☆

Une barre horizontale de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ glisse sans frottement le long de deux rails verticaux distants de $\ell = 20\,\mathrm{cm}$, reliés en haut par $R = 0{,}10\,\Omega$. Le champ $\vec{B}$, horizontal et uniforme ($B = 0{,}50\,\mathrm{T}$), est perpendiculaire au plan des rails. La barre est lâchée sans vitesse.

Q-1) Établir l'équation du mouvement. Montrer que la barre atteint une vitesse limite ; la calculer, ainsi que le temps caractéristique.

Q-2) Faire le bilan de puissance en régime établi.

Correction

Q-1) $|e| = B\ell v$, $|i| = \dfrac{B\ell v}{R}$, et la force de Laplace s'oppose à la chute : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \dfrac{B^2\ell^2}{R}v$. D'où $v = v_\ell\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ avec $v_\ell = \dfrac{mgR}{B^2\ell^2} = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\tau = \dfrac{mR}{B^2\ell^2} = 0{,}20\,\mathrm{s}$.

Q-2) $mgv_\ell = \dfrac{B^2\ell^2 v_\ell^2}{R} = Ri^2 = 0{,}38\,\mathrm{W}$: la puissance du poids est intégralement dissipée par effet Joule.

EXERCICE 8 Alternateur de démonstration

✦✦✧✧✧

Une bobine de $N = 150$ spires de surface $S = 120\,\mathrm{cm^2}$ tourne à $3000\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$ dans un champ uniforme $B = 0{,}12\,\mathrm{T}$ orthogonal à son axe de rotation. Elle débite dans une résistance totale $R = 12\,\Omega$; on néglige son inductance.

Q-1) Calculer l'amplitude et la valeur efficace de la f.é.m., et sa fréquence.

Q-2) Calculer la puissance électrique moyenne et le couple moyen que doit fournir le moteur d'entraînement.

Q-3) Que deviennent ces résultats si l'on prend en compte l'inductance L de la bobine ?

Correction

Q-1) $\omega = 314\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $NBS = 0{,}216\,\mathrm{Wb}$: $E_m = NBS\omega = 68\,\mathrm{V}$, $E_{\text{eff}} = 48\,\mathrm{V}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$.

Q-2) $\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{E_m^2}{2R} = 192\,\mathrm{W}$; $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{\langle\mathcal{P}\rangle}{\omega} = 0{,}61\,\mathrm{N\cdot m}$.

Q-3) $\underline{I} = \dfrac{\underline{E}}{R + \mathrm{j}L\omega}$: le courant est réduit et déphasé en retard, la puissance devient $\dfrac{E_m^2 R}{2(R^2 + L^2\omega^2)}$.

IV Synthèse

★ À retenir

- Orienter le circuit ; $\Phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$; $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ en convention générateur ; Lenz : les effets s'opposent aux causes.
- Auto-induction : $\Phi_p = Li$, $L = \mu_0 N^2 S/\ell$ (solénoïde long) ; $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$, $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$.
- Mutuelle : $\Phi_{1\to2} = Mi_1$, $M_{12} = M_{21}$; $M = \mu_0 N_1 N_2 S/\ell$ en influence totale ; $|M| \le \sqrt{L_1 L_2}$; $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2$.
- Transformateur parfait : $u_2/u_1 = N_2/N_1$, $u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$, R vue du primaire R/m^2.
- Conversion électromécanique : $\mathcal{P}_L + ei = 0$; rails : $|e| = B\ell v$, $\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$; alternateur : $e = NBS\omega\sin\omega t$.
- Courants de Foucault : freinage, chauffage, pertes ($\propto \omega^2 b^4$, d'où le feuilletage) ; haut-parleur : $m\dot{v} = -kz - \alpha v - B\ell i$, $u = Ri + L\dot{i} - B\ell v$.

Pour aller plus loin

L'équation locale de l'induction de Neumann, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Maxwell-Faraday), et l'approximation des régimes quasi stationnaires sont étudiées au chapitre EM4 ; l'énergie magnétique et sa densité $\frac{B^2}{2\mu_0}$ au chapitre EM5.

V Exercices d'approfondissement

EXERCICE 9 Roue de Barlow

★★★☆☆

Un disque conducteur de rayon $a = 5{,}0\,\text{cm}$ et de moment d'inertie $J = 5{,}0 \times 10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ tourne à la vitesse angulaire ω autour de son axe Oz dans le champ uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, $B = 0{,}20\,\text{T}$. Deux contacts glissants, l'un sur l'axe (O), l'autre sur la périphérie (A), relient le disque à un circuit extérieur ; la résistance totale vaut $R = 10\,\text{m}\Omega$. On admet que le courant circule radialement le long de OA.

Q-1) Calculer la f.é.m. induite le long de OA à l'aide du champ électromoteur. Pourquoi la loi de Faraday est-elle délicate à appliquer ici ?

Q-2) Exprimer le couple des forces de Laplace et vérifier le bilan $\Gamma\omega + ei = 0$.

Q-3) Le disque, lancé à $\omega_0 = 300\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, n'est soumis à aucun autre couple. Déterminer $\omega(t)$ et la constante de temps.

Q-4) On insère dans le circuit une source de f.é.m. E_0 : montrer que la roue fonctionne en moteur et déterminer sa vitesse limite.

Correction

Q-1) $\vec{E}_m = r\omega\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z = r\omega B\vec{u}_r$, donc $e_{O\to A} = \int_0^a r\omega B\,\mathrm{d}r = \dfrac{\omega B a^2}{2} = 75\,\text{mV}$ pour ω_0. Le disque est un conducteur étendu : le « circuit » n'y est pas défini, d'où le recours au champ électromoteur.

Q-2) $I = \dfrac{e}{R}$ de O vers A ; $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}r\,\vec{u}_r \wedge B\vec{u}_z = -IB\,\mathrm{d}r\,\vec{u}_\theta$, de moment $-IBr\,\mathrm{d}r$: $\Gamma = -\dfrac{IBa^2}{2} = -\dfrac{B^2a^4}{4R}\omega$, couple de freinage ; $\Gamma\omega + eI = -\dfrac{IBa^2\omega}{2} + \dfrac{\omega Ba^2}{2}I = 0$.

Q-3) $J\dot{\omega} = -\dfrac{B^2a^4}{4R}\omega$: $\omega = \omega_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{4RJ}{B^2a^4} = 80\,\text{s}$.

Q-4) Avec E_0 imposant un courant de A vers O : $RI = \frac{\omega Ba^2}{2} - E_0$ et $J\dot{\omega} = \frac{Ba^2}{2R}\left(E_0 - \frac{\omega Ba^2}{2}\right)$: couple moteur tant que $\omega < \omega_\ell = \dfrac{2E_0}{Ba^2}$, vitesse limite pour laquelle la force contre-électromotrice compense E_0.

EXERCICE 10 Échauffement d'un barreau par courants de Foucault

★★★☆☆

Un barreau cylindrique d'acier inoxydable (conductivité $\gamma = 1{,}4 \times 10^6\,\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$), de rayon $R_0 = 1{,}0\,\text{cm}$ et de longueur $l = 5{,}0\,\text{cm}$, est placé dans le champ uniforme $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$ parallèle à son axe, avec $B_0 = 0{,}10\,\text{T}$ et $f = 50\,\text{Hz}$. On néglige le champ créé par les courants induits.

Q-1) À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (ou de la loi de Faraday sur un cercle), déterminer $\vec{E}$ puis $\vec{j}$ dans le barreau.

Q-2) Montrer que la puissance moyenne dissipée vaut $\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{\pi}{4}\gamma f^2 S^2 l B_0^2$, avec $S = \pi R_0^2$. Application numérique.

Q-3) Les courants induits créent sur l'axe un champ d'amplitude $\mu_0\int_0^{R_0} j_{\max}\,\mathrm{d}r$ (nappes solénoïdales). Calculer le rapport à B_0 et discuter l'hypothèse. Que devient-il pour une plaque à induction ($f = 25\,\text{kHz}$) ?

Correction

Q-1) $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta$; Faraday sur le cercle de rayon r : $2\pi r E = \pi r^2 B_0 \omega \sin\omega t$, donc $\vec{E} = \dfrac{rB_0\omega}{2}\sin\omega t\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

Q-2) $\langle\mathcal{P}\rangle = \dfrac{\gamma B_0^2\omega^2}{8}\int_0^{R_0} r^2\,2\pi r l\,\mathrm{d}r = \dfrac{\pi\gamma B_0^2\omega^2 R_0^4 l}{16}$; avec $\omega = 2\pi f$ et $S = \pi R_0^2$, on obtient $\dfrac{\pi}{4}\gamma f^2 S^2 l B_0^2 = 0{,}14\,\mathrm{W}$. (Une expression avec $\frac{\pi}{2}$ au lieu de $\frac{\pi}{4}$, que l'on rencontre parfois, résulte d'une erreur d'un facteur 2 dans l'intégration.)

Q-3) $B_{\text{ind}} = \mu_0\dfrac{\gamma B_0\omega R_0^2}{4}$, d'où $\dfrac{B_{\text{ind}}}{B_0} = \dfrac{\mu_0\gamma\omega R_0^2}{4} = 1{,}4\times10^{-2}$: hypothèse justifiée à $50\,\mathrm{Hz}$. À $25\,\mathrm{kHz}$, ce rapport vaudrait $6{,}9$: le champ induit n'est plus négligeable, le champ ne pénètre plus que dans une couche superficielle (effet de peau), où se concentre le chauffage.

EXERCICE 11 Recharge sans fil par couplage inductif résonant

★★★☆☆

Deux circuits identiques ($L = 24\,\mu\mathrm{H}$, capacité C) sont couplés par la mutuelle $M = 3{,}0\,\mu\mathrm{H}$. Le primaire, de résistance $R_1 = 0{,}50\,\Omega$, est alimenté par une f.é.m. sinusoïdale de fréquence $f_0 = 100\,\mathrm{kHz}$; le secondaire est fermé sur la charge, sa résistance totale étant $R_2 = 0{,}50\,\Omega$. On choisit C pour que $LC\omega_0^2 = 1$.

Q-1) Calculer C et le coefficient de couplage.

Q-2) Écrire les équations des deux mailles en notation complexe et montrer que le primaire voit l'impédance $R_1 + \dfrac{M^2\omega_0^2}{R_2}$.

Q-3) En déduire le rendement η du transfert. Application numérique. Quel est l'intérêt de la résonance ?

Correction

Q-1) $C = \dfrac{1}{L\omega_0^2} = 106\,\mathrm{nF}$; $k = M/L = 0{,}125$.

Q-2) $\underline{e} = \left(R_1 + \mathrm{j}L\omega_0 + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega_0}\right)\underline{i}_1 + \mathrm{j}M\omega_0\underline{i}_2$ et $0 = \left(R_2 + \mathrm{j}L\omega_0 + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega_0}\right)\underline{i}_2 + \mathrm{j}M\omega_0\underline{i}_1$. À la résonance, les réactances s'annulent : $\underline{i}_2 = -\dfrac{\mathrm{j}M\omega_0}{R_2}\underline{i}_1$ et $\underline{e} = \left(R_1 + \dfrac{M^2\omega_0^2}{R_2}\right)\underline{i}_1$.

Q-3) $\eta = \dfrac{R_2|\underline{i}_2|^2}{\left(R_1 + \frac{M^2\omega_0^2}{R_2}\right)|\underline{i}_1|^2} = \dfrac{M^2\omega_0^2}{R_1R_2 + M^2\omega_0^2}$; $M\omega_0 = 1{,}9\,\Omega$ et $\eta = 93\,\%$. Sans les condensateurs, les réactances $L\omega_0 = 15\,\Omega$ limiteraient fortement les courants : la résonance permet un transfert efficace malgré un couplage faible (chargeurs sans fil, cartes RFID).

VI Classiques des concours

EXERCICE 12 Haut-parleur électrodynamique

★★★★☆

On reprend les équations du paragraphe III.4 en négligeant l'inductance L de la bobine. Données : $m = 20\,\mathrm{g}$, $k = 3{,}2\times10^3\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $\alpha = 4{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, $B\ell = 8{,}0\,\mathrm{T\cdot m}$, $R = 6{,}0\,\Omega$.

Q-1) En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, montrer que $\underline{u} = (R + \underline{Z}_m)\underline{i}$ avec $\dfrac{1}{\underline{Z}_m} = \dfrac{\alpha + \mathrm{j}m\omega + \frac{k}{\mathrm{j}\omega}}{(B\ell)^2}$.

Q-2) Montrer que l'impédance motionnelle $\underline{Z}_m$ équivaut à l'association en parallèle d'une résistance R', d'une capacité C' et d'une inductance L' que l'on exprimera et calculera. Interpréter chaque élément.

Q-3) Calculer la fréquence de résonance mécanique f_0. Que vaut $\underline{Z}_m$ à cette fréquence ?

Q-4) Exprimer le rendement $\eta = \dfrac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle ui \rangle}$ et le calculer à f_0. Le rendement acoustique réel d'un haut-parleur est de l'ordre de $1\,\%$: commenter.

Correction

Q-1) Équation mécanique en complexes : $\underline{v}\left(\alpha + \mathrm{j}m\omega + \frac{k}{\mathrm{j}\omega}\right) = -B\ell\,\underline{i}$; équation électrique : $\underline{u} = R\underline{i} - B\ell\underline{v} = \left(R + \dfrac{(B\ell)^2}{\alpha + \mathrm{j}m\omega + \frac{k}{\mathrm{j}\omega}}\right)\underline{i}$.

Q-2) $\dfrac{1}{\underline{Z}_m} = \dfrac{1}{R'} + \mathrm{j}C'\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}L'\omega}$ avec $R' = \dfrac{(B\ell)^2}{\alpha} = 16\,\Omega$ (pertes et rayonnement), $C' = \dfrac{m}{(B\ell)^2} = 313\,\mu\mathrm{F}$ (inertie), $L' = \dfrac{(B\ell)^2}{k} = 20\,\mathrm{mH}$ (élasticité de la suspension).

Q-3) $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L'C'}} = 64\,\mathrm{Hz}$; à cette fréquence, $\underline{Z}_m = R'$ (maximum de l'impédance).

Q-4) La puissance $\langle \alpha v^2 \rangle$ est celle reçue par R' : $\eta = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z}_m)}{R + \mathrm{Re}(\underline{Z}_m)}$, maximal à f_0 où $\eta = \dfrac{R'}{R + R'} = 73\,\%$. Le modèle range dans α toutes les pertes mécaniques (suspension, frottements) : seule une faible partie de αv^2 est réellement rayonnée en son, d'où le rendement acoustique réel de l'ordre du pour cent.

EXERCICE 13 Moteur à courant continu

✦✦✦✦✧

Le rotor d'un moteur est une bobine de N spires rectangulaires (côtés a parallèles à l'axe, b perpendiculaires), de résistance $R = 1{,}5\,\Omega$, d'inductance négligeable. L'aimant du stator crée sur les conducteurs actifs un champ radial de norme B ; un collecteur inverse le courant à chaque demi-tour. On pose $\Phi_0 = NabB = 0{,}12\,\mathrm{Wb}$. Le rotor, de moment d'inertie $J = 4{,}0\times10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$, subit un couple résistant $-f\Omega$ avec $f = 2{,}0\times10^{-3}\,\mathrm{N\cdot m\cdot s}$; il est alimenté sous $U = 24\,\mathrm{V}$.

Q-1) Montrer que le couple de Laplace vaut $\Gamma = \Phi_0 i$ et que la force contre-électromotrice vaut $\Phi_0\Omega$. Vérifier le couplage parfait.

Q-2) Écrire les équations électrique et mécanique et dessiner le schéma électrique équivalent.

Q-3) Déterminer la vitesse, l'intensité et le rendement en régime permanent.

Q-4) Calculer le courant de démarrage. Établir $\Omega(t)$ au démarrage et la constante de temps. Commenter.

Correction

Q-1) Les $2N$ conducteurs actifs, perpendiculaires au champ radial, subissent des forces orthoradiales iaB de bras de levier $\frac{b}{2}$: $\Gamma = 2N\,iaB\,\frac{b}{2} = \Phi_0 i$. Chacun se déplace à la vitesse $\Omega\frac{b}{2}$ perpendiculairement à $\vec{B}$: $|e| = 2N\,aB\,\Omega\frac{b}{2} = \Phi_0\Omega$, opposée au courant (Lenz). $\Gamma\Omega + ei = \Phi_0 i\Omega - \Phi_0\Omega i = 0$.

Q-2) $U = Ri + \Phi_0\Omega$ (la f.c.é.m. est un générateur de f.é.m. $\Phi_0\Omega$ opposé à U) et $J\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \Phi_0 i - f\Omega$.

Q-3) $\Omega_\infty = \dfrac{\Phi_0 U}{Rf + \Phi_0^2} = 166\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ $(1580\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}})$, $i_\infty = \dfrac{fU}{Rf + \Phi_0^2} = 2{,}8\,\mathrm{A}$, $\eta = \dfrac{f\Omega^2}{Ui} = \dfrac{\Phi_0\Omega}{U} = \dfrac{\Phi_0^2}{Rf + \Phi_0^2} = 83\,\%$.

Q-4) À l'arrêt, la f.c.é.m. est nulle : $i = U/R = 16\,\mathrm{A}$, près de six fois le courant de régime, qu'il faut limiter. Avec $i = \frac{U-\Phi_0\Omega}{R}$: $J\dot{\Omega} + \left(f + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)\Omega = \frac{\Phi_0 U}{R}$, donc $\Omega = \Omega_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \dfrac{JR}{Rf + \Phi_0^2} = 34\,\mathrm{ms}$. Le freinage électromagnétique (Φ_0^2/R) domine le frottement mécanique : c'est lui qui fixe la rapidité de la mise en vitesse.

EXERCICE 14 Moteur asynchrone

★★★★✧

Le stator crée en son centre un champ tournant $\vec{B} = B(\cos\omega_0 t\,\vec{u}_x + \sin\omega_0 t\,\vec{u}_y)$ (chapitre EM2). Le rotor est une bobine plate fermée sur elle-même, de surface totale S (nombre de spires inclus), de résistance R et d'inductance L, tournant autour de Oz à la vitesse constante Ω ; sa normale fait l'angle Ωt avec $\vec{u}_x$. On pose $\Phi_0 = BS$ et $\omega_g = \omega_0 - \Omega$ (pulsation de glissement).

Q-1) Exprimer le flux à travers le rotor, puis la f.é.m. induite. Pourquoi le moteur ne peut-il pas tourner à la vitesse du champ ?

Q-2) Déterminer le courant en régime sinusoïdal établi, puis le couple moyen $\langle\Gamma\rangle(\omega_g)$.

Q-3) Données : $\Phi_0 = 0{,}050\,\mathrm{Wb}$, $R = 0{,}20\,\Omega$, $L = 4{,}0\,\mathrm{mH}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Calculer le couple maximal et la vitesse correspondante, puis le couple de démarrage.

Q-4) Dans quel domaine de vitesses le dispositif est-il moteur ? générateur ?

Correction

Q-1) L'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ vaut $\omega_g t$: $\Phi = \Phi_0\cos\omega_g t$, $e = \Phi_0\omega_g\sin\omega_g t$. Au synchronisme ($\omega_g = 0$), le flux ne varie plus : pas de courant induit, pas de couple. Le rotor tourne toujours un peu moins vite que le champ : moteur **asynchrone**.

Q-2) $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{R + \mathrm{j}L\omega_g}$, d'amplitude $I_0 = \dfrac{\Phi_0\omega_g}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_g^2}}$, en retard de $\varphi = \arctan\frac{L\omega_g}{R}$ sur e.

$\Gamma = (\vec{m}\wedge\vec{B})\cdot\vec{u}_z = i\Phi_0\sin\omega_g t$, de moyenne $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{\Phi_0 I_0\cos\varphi}{2} = \dfrac{\Phi_0^2}{2}\dfrac{R\omega_g}{R^2 + L^2\omega_g^2}$.

Q-3) Maximum pour $\omega_g = \frac{R}{L} = 50\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$: $\Gamma_{\max} = \dfrac{\Phi_0^2}{4L} = 0{,}16\,\mathrm{N\cdot m}$, à $\Omega = 264\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ (glissement de $16\,\%$). Démarrage ($\omega_g = \omega_0$) : $\Gamma_d = 0{,}049\,\mathrm{N\cdot m}$, environ trois fois moins que le maximum : on augmente la résistance rotorique au démarrage pour s'en rapprocher.

Q-4) Moteur pour $0 < \Omega < \omega_0$ ($\langle\Gamma\rangle > 0$) ; générateur pour $\Omega > \omega_0$, le rotor étant entraîné plus vite que le champ (éoliennes).