LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

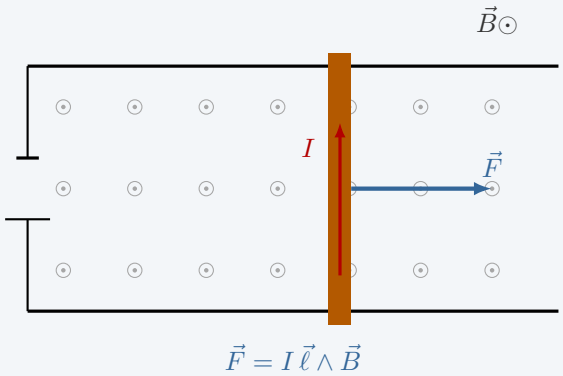
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

EM2

ÉLECTROMAGNÉTISME

Forces de Laplace

Force de Lorentz — Densité de force de Laplace — Rails de Laplace — Couple sur une spire, moment magnétique — Aimant dans un champ uniforme — Champ tournant et moteur synchrone



> *La recherche expérimentale par laquelle Ampère a établi les lois de l'action mécanique entre courants électriques est l'une des plus brillantes réussites de la science. L'ensemble, théorie et expérience, semble avoir jailli, adulte et tout armé, du cerveau du « Newton de l'électricité ».*
>
> — James Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II (1873)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Rails de Laplace »

EM2 — Forces de Laplace

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Distinguer champ magnétique extérieur et champ propre ; passer de la force de Lorentz à la force de Laplace ($\vec{j} \wedge \vec{B}$, $I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$).
- Calculer la résultante et le moment des forces de Laplace sur un circuit ; montrer que la résultante est nulle dans un champ uniforme.
- Établir la résultante et la puissance des forces de Laplace sur la barre des rails de Laplace.
- Établir le couple $\vec{m} \wedge \vec{B}$ et la puissance sur une spire rectangulaire en rotation ; associer un moment magnétique à un aimant.
- Étudier les positions d'équilibre d'un aimant dans un champ uniforme et leur stabilité ; expliquer l'effet moteur d'un champ tournant.

Comment lire ce cours

Étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Le champ magnétique est ici **imposé** : on étudie ses actions mécaniques sur un conducteur parcouru par un courant ou sur un aimant ; les courants induits par le mouvement seront pris en compte au chapitre EM3. La simulation PhysioNova « Rails de Laplace » montre la barre mise en mouvement par la force de Laplace. Exercices d'application, d'approfondissement et classiques des concours sont tous corrigés.

Table des matières

I De la force de Lorentz à la force de Laplace . . . 3
I.1 Force de Lorentz . . . 3
I.2 Densité volumique de force de Laplace . . . 3
II Puissance des forces de Laplace . . . 5
III Rails de Laplace . . . 6
III.1 Résultante et puissance . . . 6
III.2 Mouvement à intensité imposée . . . 6
IV Spire rectangulaire en rotation . . . 7
IV.1 Forces et couple . . . 7
IV.2 Mouvement et énergie . . . 8
V Aimant dans un champ magnétique extérieur . . . 9
V.1 Moment magnétique d'un aimant . . . 9
V.2 Actions d'un champ uniforme ; équilibre et stabilité . . . 10
VI Effet moteur d'un champ magnétique tournant . . . 11
VI.1 Création d'un champ tournant . . . 11
VI.2 Moteur synchrone . . . 11
VII Synthèse . . . 12
VIII Exercices d'approfondissement . . . 13
IX Classiques des concours . . . 15

I De la force de Lorentz à la force de Laplace

I.1 Force de Lorentz

Force de Lorentz R

Une particule de charge q, de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, placée dans les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, subit

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Sa puissance vaut $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$: la partie magnétique, perpendiculaire à $\vec{v}$, **ne travaille pas**. Elle courbe la trajectoire (mouvement circulaire de pulsation $\omega_c = |q|B/m$ dans un champ uniforme) sans modifier l'énergie cinétique.

I.2 Densité volumique de force de Laplace

Un conducteur est formé d'ions fixes (dans le référentiel du conducteur) et d'électrons de conduction animés de la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ par rapport au conducteur. Considérons un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ du conducteur **immobile** : il est globalement neutre et plongé dans un champ magnétique. Les ions, immobiles, ne subissent pas de force magnétique ; les charges mobiles, de densité ρ_m, subissent

$$\mathrm{d}\vec{F} = \rho_m \mathrm{d}\tau\, \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge \vec{B}\, \mathrm{d}\tau,$$

tandis que la force électrique sur l'élément neutre est nulle. Les porteurs, déviés, s'accumulent sur les bords du conducteur et y créent un champ électrique (champ de Hall) qui transmet cette force au réseau d'ions : c'est le conducteur entier qui est mis en mouvement.

Force de Laplace R

La densité volumique de force de Laplace (affirmée) est $\vec{f_v} = \vec{j} \wedge \vec{B}$. Pour un circuit filiforme parcouru par l'intensité I, on remplace $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$ par $I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$ ($\mathrm{d}\vec{\ell}$ orienté dans le sens de I) :

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} \qquad \vec{F} = \oint_{\mathcal{C}} I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} \qquad \vec{\Gamma}_O = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OP} \wedge \left(I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}\right)$$

La densité linéique de force est $I\,\vec{u}_T \wedge \vec{B}$, où $\vec{u}_T$ est le vecteur unitaire tangent orienté par le courant.

Démonstration de l'équivalence D**.** Dans un fil de section s, sur une longueur $\mathrm{d}\ell$, $\vec{j}$ est parallèle à $\mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = j\,s\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_T = I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$.

Champ extérieur et champ propre R

Dans ces expressions, $\vec{B}$ est le champ **extérieur**, créé par les autres sources (aimants, autres circuits). Le champ propre, créé par le courant du circuit lui-même, n'exerce sur le circuit qu'une résultante nulle (actions réciproques entre ses éléments) ; il peut seulement tendre à déformer un circuit souple.

Circuit fermé dans un champ uniforme R D

Si $\vec{B}$ est uniforme, $\vec{F} = I\left(\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{\ell}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$ car $\oint \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{0}$: **la résultante est nulle**, seul subsiste un couple. Pour une portion de circuit allant de A à C, $\vec{F} = I\,\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$: la force ne dépend que des

extrémités. En particulier, une barre rectiligne de longueur ℓ subit $\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

Ordres de grandeur

Un fil de $1\,\mathrm{m}$ parcouru par $10\,\mathrm{A}$ dans un champ de $0{,}1\,\mathrm{T}$ subit $1\,\mathrm{N}$; dans le champ terrestre ($50\,\mu\mathrm{T}$), la même ligne subit $0{,}5\,\mathrm{mN}$. Un moteur électrique exploite des champs de l'ordre de $1\,\mathrm{T}$ et des intensités de quelques ampères à quelques centaines d'ampères.

☞ Méthode — Calculer une force de Laplace M

1. Identifier le champ **extérieur** au conducteur étudié et orienter le circuit (sens de I).
2. Écrire $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ dans une base adaptée ; le sens se vérifie avec la règle des trois doigts de la main droite (pouce : I ; index : $\vec{B}$; majeur : $\vec{F}$).
3. Intégrer : si $\vec{B}$ est uniforme sur la portion, $\vec{F} = I\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$; sinon découper en éléments sur lesquels B est constant.

Remarque

Effet Hall. Dans un ruban d'épaisseur c (selon $\vec{B}$) parcouru par I, le champ de Hall compense en régime permanent la force magnétique sur les porteurs : $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$. Il en résulte entre les faces latérales une tension $U_H = \dfrac{IB}{nqc}$, d'autant plus grande que la densité n de porteurs est faible : les sondes de Hall (teslamètres) utilisent des semi-conducteurs. Le signe de U_H révèle le signe des porteurs.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Interaction de deux fils parallèles ✦✧✧✧✧

Deux fils rectilignes infinis, parallèles, distants de $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, sont parcourus par I_1 et I_2.

Q-1) Déterminer la force exercée par le fil 1 sur une longueur ℓ du fil 2. Préciser son sens selon que les courants sont de même sens ou de sens contraires.

Q-2) Calculer la force linéique pour $I_1 = I_2 = 50\,\mathrm{A}$. Comparer au poids linéique d'un fil de cuivre de section $2{,}5\,\mathrm{mm}^2$ ($\mu_{\mathrm{Cu}} = 8{,}9 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).

Q-3) Jusqu'en 2019, l'ampère était défini par la valeur de cette force pour $d = 1\,\mathrm{m}$ et $I_1 = I_2 = 1\,\mathrm{A}$. Quelle valeur fixait-on ?

Correction

Q-1) Le fil 1 crée sur le fil 2 le champ orthoradial $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$, perpendiculaire au fil 2 : $F = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d}$. Courants de même sens : **attraction** ; de sens contraires : répulsion (l'inverse des charges électriques).

Q-2) $F/\ell = 2{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, contre un poids linéique de $\mu s g = 0{,}22\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$: la force est faible, mais elle devient considérable en cas de court-circuit ($10\,\mathrm{kA}$: $1 \times 10^3\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$), d'où la fixation rigide des barres de distribution dans les postes électriques.

Q-3) $F/\ell = \dfrac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$, ce qui fixait $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$ exactement.

EXERCICE 2 Conducteur courbe dans un champ uniforme ★★✧✧✧

Un fil a la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R, d'extrémités A et C ; il est parcouru par I de A vers C et placé dans un champ uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à son plan.

Q-1) Calculer directement la résultante des forces de Laplace, en paramétrant le demi-cercle.

Q-2) Retrouver le résultat sans calcul. Que vaut la résultante sur la spire fermée obtenue en ajoutant le diamètre CA ?

Correction

Q-1) Avec $\vec{B} = B\vec{u}_z$, $A = (R,0)$, $C = (-R,0)$ et $\mathrm{d}\vec{\ell} = R\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta$ (θ de 0 à π) : $\mathrm{d}\vec{F} = IRB\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = IRB\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_r$. Or $\int_0^\pi \vec{u}_r\,\mathrm{d}\theta = 2\vec{u}_y$: $\vec{F} = 2IRB\,\vec{u}_y$.

Q-2) $\vec{F} = I\overrightarrow{AC} \wedge \vec{B} = I(-2R\vec{u}_x) \wedge B\vec{u}_z = 2IRB\vec{u}_y$. Le diamètre parcouru de C vers A subit l'opposé : la résultante sur la spire fermée est nulle.

EXERCICE 3 Sonde à effet Hall ★★✧✧✧

Une plaquette de semi-conducteur dopé N (électrons, $n = 5{,}0 \times 10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$) a une largeur $a = 2{,}0\,\mathrm{mm}$ et une épaisseur $c = 0{,}10\,\mathrm{mm}$ (selon $\vec{B}$). Elle est parcourue par $I = 20\,\mathrm{mA}$.

Q-1) Calculer la vitesse d'ensemble des électrons.

Q-2) Établir la tension de Hall et la mettre sous la forme $U_H = KB$. Calculer K et U_H pour $B = 50\,\mathrm{mT}$.

Q-3) Pourquoi n'utilise-t-on pas une plaquette de cuivre ($n = 8{,}5 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$) ?

Correction

Q-1) $v = \dfrac{I}{neac} = 125\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Q-2) En régime permanent, $-e\vec{E}_H - e\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, donc $E_H = vB$ et $U_H = E_H a = vBa = \dfrac{IB}{nec}$: $K = \dfrac{I}{nec} = 0{,}25\,\mathrm{V\cdot T^{-1}}$, $U_H = 12{,}5\,\mathrm{mV}$.

Q-3) K serait $1{,}7 \times 10^7$ fois plus petit : tension indétectable.

II Puissance des forces de Laplace

Puissance des actions de Laplace R

Pour un conducteur dont chaque élément se déplace à la vitesse $\vec{v}_P$: $\mathcal{P}_L = \int \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{v}_P$.

- Conducteur en **translation** à la vitesse $\vec{v}$: $\mathcal{P}_L = \vec{F} \cdot \vec{v}$.
- Conducteur en **rotation** à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ : $\mathcal{P}_L = \Gamma_\Delta\,\omega$, où Γ_Δ est le moment des forces de Laplace par rapport à Δ.

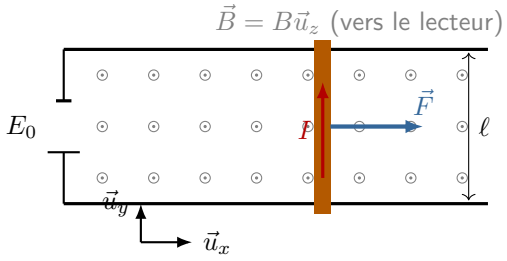
Remarque

La force de Laplace travaille alors que la force magnétique de Lorentz ne travaille pas : il n'y a pas de contradiction. La force sur les porteurs est perpendiculaire à leur vitesse *totale* ; ce qui travaille, c'est la force transmise au réseau, qui se déplace avec le conducteur. Au chapitre EM3, on montrera que l'énergie est en fait fournie par le générateur, qui travaille contre la force électromotrice induite par le mouvement : $\mathcal{P}_L + e\,i = 0$.

III Rails de Laplace

III.1 Résultante et puissance

Deux rails conducteurs horizontaux, parallèles, distants de ℓ, sont reliés par un générateur ; une barre conductrice de masse m, perpendiculaire aux rails, peut glisser sur eux. Le dispositif baigne dans un champ $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme, stationnaire, orthogonal au plan des rails. La barre est parcourue par I, de $y = 0$ vers $y = \ell$ sur la figure.



Résultante D. Sur la barre, $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}y\,\vec{u}_y$ et $\vec{B}$ est uniforme :

$$\vec{F} = \int_0^{\ell} I\,\mathrm{d}y\,\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_z = I\ell B\,\vec{u}_x$$

La force est perpendiculaire à la barre, dans le plan des rails ; son sens s'inverse avec I ou avec $\vec{B}$. Les forces sur les rails, fixes, sont compensées par leurs supports.

Puissance D. La barre étant en translation à la vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$:

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}\cdot\vec{v} = I\ell B v$$

Elle est positive si la force entraîne la barre : le dispositif est un **moteur linéaire** élémentaire.

III.2 Mouvement à intensité imposée

Si un générateur de courant impose I constant (on ignore pour l'instant l'induction, étudiée au chapitre EM3), la barre, sans frottement, a un mouvement uniformément accéléré : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = I\ell B$, $v(t) = \dfrac{I\ell B}{m}t$, et la puissance des forces de Laplace $\mathcal{P}_L = \dfrac{(I\ell B)^2}{m}t$ croît sans limite. Physiquement, maintenir I constant exige du générateur une puissance croissante : on verra au chapitre EM3 que la barre en mouvement est le siège d'une force électromotrice $-B\ell v$ contre laquelle le générateur doit travailler.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Le sens de la force dépend à la fois du sens de I et de celui de $\vec{B}$: toujours écrire le produit vectoriel dans une base directe.
- Seule la longueur de barre *comprise entre les rails* (parcourue par le courant) subit une force.
- Le champ propre du circuit n'intervient pas dans la force sur la barre : seul compte le champ extérieur (sauf dans le canon électromagnétique, où ce sont les rails eux-mêmes qui créent le champ, cf. approfondissement).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Barre propulsée à courant imposé ✦✧✧✧✧

Une barre de masse $m = 40\,\mathrm{g}$ glisse sans frottement sur des rails horizontaux distants de $\ell = 8{,}0\,\mathrm{cm}$, de longueur $L = 1{,}5\,\mathrm{m}$, plongés dans un champ vertical $B = 0{,}60\,\mathrm{T}$. Un générateur de courant impose $I = 15\,\mathrm{A}$.

Q-1) Calculer la force de Laplace et l'accélération de la barre.

Q-2) Avec quelle vitesse la barre, partie du repos, quitte-t-elle les rails ? Quelle est alors la puissance des forces de Laplace ?

Correction

Q-1) $F = I\ell B = 0{,}72\,\mathrm{N}$; $a = F/m = 18\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-2) $v = \sqrt{2aL} = 7{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $\mathcal{P}_L = Fv = 5{,}3\,\mathrm{W}$.

EXERCICE 5 Équilibre d'une barre sur des rails inclinés

Les rails font un angle $\alpha = 20°$ avec l'horizontale ; le champ $\vec{B}$ est **vertical**, $B = 0{,}40\,\mathrm{T}$. Une barre de masse $m = 30\,\mathrm{g}$, de longueur utile $\ell = 12\,\mathrm{cm}$, perpendiculaire aux rails, peut glisser sans frottement. Un générateur fait circuler I dans la barre.

Q-1) Faire un schéma dans le plan vertical perpendiculaire à la barre. Quelle est la direction de la force de Laplace ?

Q-2) Déterminer le sens et l'intensité du courant assurant l'équilibre de la barre. Application numérique.

Q-3) L'équilibre est-il stable vis-à-vis d'un petit déplacement le long des rails ?

Correction

Q-1) $\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à la barre et à $\vec{B}$: elle est **horizontale**, de norme $I\ell B$.

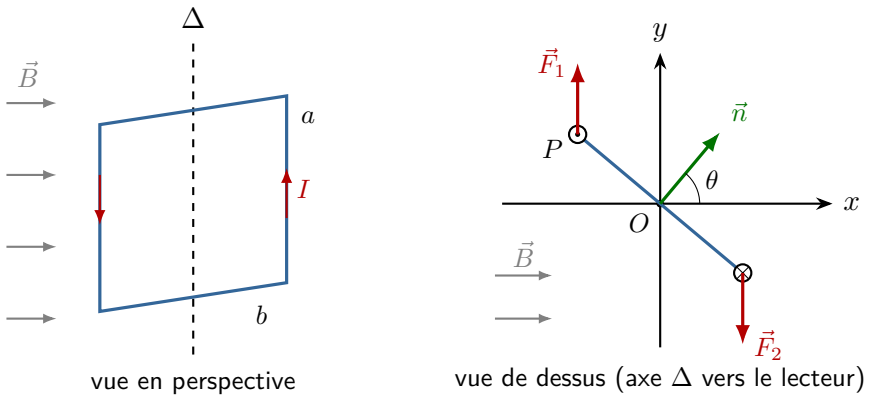
Q-2) Projection sur la ligne de plus grande pente : $I\ell B\cos\alpha = mg\sin\alpha$, soit $I = \dfrac{mg\tan\alpha}{\ell B} = 2{,}2\,\mathrm{A}$; le courant doit circuler dans le sens qui dirige $\vec{F}$ horizontalement vers l'intérieur de la pente (vers le haut des rails).

Q-3) La force résultante le long des rails est nulle en toute position (champ uniforme, intensité imposée) : l'équilibre est **indifférent**. Si l'on prend en compte l'induction (EM3), un déplacement crée un courant induit qui s'oppose au mouvement.

IV Spire rectangulaire en rotation

IV.1 Forces et couple

Une spire rectangulaire rigide, de côtés a (parallèles à l'axe de rotation $\Delta = (O, \vec{u}_z)$) et b, de surface $S = ab$, est parcourue par I. L'axe Δ est un axe de symétrie de la spire, passant par les milieux de deux côtés opposés. Le champ $\vec{B} = B\vec{u}_x$ est uniforme, stationnaire et orthogonal à Δ. On note $\vec{n}$ la normale à la spire orientée par I (règle de la main droite) et $\theta = (\vec{u}_x, \vec{n})$ l'angle orienté par $\vec{u}_z$.



vue en perspective — vue de dessus (axe Δ vers le lecteur)

Fig. 1 : Spire rectangulaire mobile autour de Δ dans un champ uniforme orthogonal à l'axe : les forces sur les côtés parallèles à l'axe forment un couple.

Côtés perpendiculaires à l'axe D. Les deux côtés de longueur b sont parcourus en sens contraires : ils subissent des forces opposées, **parallèles à** Δ (car $\mathrm{d}\vec{\ell} \perp \Delta$ et $\vec{B} \perp \Delta$ donnent $\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} \parallel \Delta$), dont le moment par rapport à Δ est nul.

Côtés parallèles à l'axe D. Le côté passant en P (courant selon $+\vec{u}_z$) subit $\vec{F}_1 = Ia\,\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_x = IaB\,\vec{u}_y$; le côté opposé subit $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Ces deux forces opposées, non alignées, forment un **couple**. Avec $\overrightarrow{OP} = \frac{b}{2}\,\vec{u}_z \wedge \vec{n}$:

$$\Gamma_\Delta = 2\left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_1\right) \cdot \vec{u}_z = 2 \cdot \frac{b}{2}\, IaB\left[(\vec{u}_z \wedge \vec{n}) \wedge \vec{u}_y\right] \cdot \vec{u}_z = -IabB \sin\theta.$$

La résultante est nulle (champ uniforme) ; le moment est indépendant du point choisi.

Couple sur une spire, moment magnétique R D

On définit le **moment magnétique** de la spire plane : $\vec{m} = IS\,\vec{n}$ ($\mathrm{A \cdot m^2}$). Les actions de Laplace dans un champ uniforme se réduisent au couple

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} \qquad \Gamma_\Delta = -mB\sin\theta \qquad \mathcal{P}_L = \Gamma_\Delta\,\dot{\theta}$$

Pour une bobine de N spires, $\vec{m} = NIS\vec{n}$. Le couple tend à **aligner** $\vec{m}$ **sur** $\vec{B}$, c'est-à-dire à rendre maximal le flux de $\vec{B}$ à travers la spire (règle du flux maximal).

On vérifie : $\vec{m} \wedge \vec{B} = IabB\,\vec{n} \wedge \vec{u}_x = IabB(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y) \wedge \vec{u}_x = -IabB\sin\theta\,\vec{u}_z$.

IV.2 Mouvement et énergie

Le théorème du moment cinétique par rapport à Δ (moment d'inertie J, liaison parfaite) donne

$$J\ddot{\theta} = -mB\sin\theta.$$

C'est l'équation d'un pendule pesant : équilibres en $\theta = 0$ (stable) et $\theta = \pi$ (instable) ; petites oscillations autour de $\theta = 0$ à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{mB/J}$. En multipliant par $\dot{\theta}$, on obtient l'intégrale première $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mB\cos\theta = \text{cte}$: tout se passe comme si la spire avait l'**énergie potentielle** $E_p = -mB\cos\theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ (à intensité constante).

Remarque

Travail et flux (théorème de Maxwell, complément). Lors d'un déplacement élémentaire d'un circuit rigide parcouru par une intensité I *constante*, dans un champ stationnaire, le travail des forces de Laplace vaut $\delta W = I\,\mathrm{d}\Phi_c$, où $\mathrm{d}\Phi_c$ est le flux « coupé » par le circuit, égal à la variation du flux qui le traverse : $W = I(\Phi_f - \Phi_i)$. Pour la spire, $\Phi = BS\cos\theta$ et l'on retrouve $E_p = -I\Phi = -\vec{m} \cdot \vec{B}$; pour la barre des rails, $\mathrm{d}\Phi = B\ell\,\mathrm{d}x$ et $\delta W = I\ell B\,\mathrm{d}x$.

Remarque

Une spire alimentée en continu ne peut donc pas tourner indéfiniment : elle oscille autour de la position $\vec{m} \parallel \vec{B}$. Pour obtenir un moteur, il faut inverser le courant à chaque demi-tour (collecteur du moteur à courant continu, EM3) ou faire tourner le champ (paragraphe VI).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Principe du galvanomètre à cadre mobile

✦✦✧✧✧

Un cadre de $N = 200$ spires ($a = 2{,}0\,\text{cm}$ parallèle à l'axe, $b = 1{,}5\,\text{cm}$) tourne autour de son axe vertical dans l'entrefer d'un aimant. Grâce à un noyau cylindrique, le champ est **radial** au niveau des côtés actifs, de norme $B = 0{,}15\,\text{T}$. Un ressort spiral exerce le couple de rappel $-C\psi$, où ψ est l'angle de rotation compté à partir de la position de repos, $C = 4{,}0 \times 10^{-6}\,\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$.

Q-1) Montrer que le couple de Laplace a pour moment $NIabB$ quelle que soit la position du cadre.

Q-2) En déduire la déviation à l'équilibre et la sensibilité ψ/I. Quelle intensité produit une déviation de $1°$?

Correction

Q-1) Sur chaque côté actif, $\vec{B}$ est radial donc perpendiculaire au fil : la force, orthoradiale, a pour norme $NIaB$ et pour bras de levier $b/2$. Les deux côtés donnent $\Gamma = 2 \cdot NIaB \cdot \frac{b}{2} = NIabB$, indépendant de ψ.

Q-2) Équilibre : $NIabB = C\psi$, d'où $\psi = \dfrac{NabB}{C} I$, proportionnelle à I (graduation linéaire). Sensibilité $2{,}25 \times 10^{3}\,\text{rad}\cdot\text{A}^{-1}$; $1°$ correspond à $I = 7{,}8\,\mu\text{A}$.

EXERCICE 7 Oscillations d'une bobine dans un champ uniforme

✦✦✧✧✧

Une bobine plate de $N = 50$ spires de surface $S = 4{,}0\,\text{cm}^2$, parcourue par $I = 0{,}20\,\text{A}$, de moment d'inertie $J = 2{,}0 \times 10^{-7}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ par rapport à son axe de symétrie Δ, est placée dans un champ uniforme $B = 20\,\text{mT}$ orthogonal à Δ.

Q-1) Calculer le couple maximal. Dans quelle position est-il atteint ?

Q-2) Calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

Q-3) La bobine est lâchée sans vitesse depuis $\theta = \pi/2$. Calculer sa vitesse angulaire au passage par $\theta = 0$.

Correction

Q-1) $m = NIS = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\text{A}\cdot\text{m}^2$, $\Gamma_{\max} = mB = 8{,}0 \times 10^{-5}\,\text{N}\cdot\text{m}$, atteint pour $\vec{n} \perp \vec{B}$.

Q-2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mB}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\times10^{-7}}{8\times10^{-5}}} = 0{,}31\,\text{s}$.

Q-3) Conservation de $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mB\cos\theta$: $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mB$, soit $\dot{\theta} = \sqrt{2mB/J} = 28\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

V Aimant dans un champ magnétique extérieur

V.1 Moment magnétique d'un aimant

Vu de loin, un aimant crée le même champ qu'une petite boucle de courant : c'est un **dipôle magnétique**. On lui associe un **moment magnétique** $\vec{m}$, dirigé de son pôle sud vers son pôle nord à l'intérieur de l'aimant. Les actions d'un champ extérieur sur l'aimant sont, par analogie, celles qu'il exerce sur une spire de même moment.

Ordres de grandeur

Aiguille de boussole : $\sim 0{,}1\,\text{A}\cdot\text{m}^2$; aimant néodyme de $1\,\text{cm}^3$: $\sim 1\,\text{A}\cdot\text{m}^2$; électron (magnéton de Bohr) : $9{,}27 \times 10^{-24}\,\text{A}\cdot\text{m}^2$; Terre : $8 \times 10^{22}\,\text{A}\cdot\text{m}^2$.

V.2 Actions d'un champ uniforme ; équilibre et stabilité

Dipôle magnétique rigide dans un champ uniforme R D

Dans un champ $\vec{B}$ **uniforme**, un aimant de moment $\vec{m}$ (de norme constante) subit :

- une résultante nulle ;
- le couple $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$;
- il possède l'énergie potentielle d'interaction $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB\cos\theta$.

Équilibres : $\Gamma = 0$ pour $\theta = 0$ ($\vec{m}$ et $\vec{B}$ de même sens, E_p minimale : **stable**) et $\theta = \pi$ (sens contraires, E_p maximale : **instable**).

Démonstration de la stabilité. $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = mB\sin\theta = -\Gamma$ s'annule en 0 et π ; $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = mB\cos\theta$ est positive en 0 (minimum) et négative en π (maximum). Au voisinage de $\theta = 0$, le TMC donne $J\ddot{\theta} + mB\theta = 0$: oscillations de pulsation $\omega_0 = \sqrt{mB/J}$.

C'est le principe de la **boussole** : son aiguille s'aligne sur la composante horizontale B_h du champ terrestre, le pôle nord de l'aiguille indiquant le nord magnétique (où se trouve donc un pôle sud magnétique de la Terre).

Remarque

Champ non uniforme (complément). Un dipôle dont le moment garde une direction fixe subit la force $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{m} \cdot \vec{B})$: un aimant aligné sur le champ est **attiré vers les zones de champ intense**. C'est pourquoi un aimant attire un morceau de fer (qui s'aimante dans le sens du champ) et pourquoi deux aimants alignés pôle nord contre pôle sud s'attirent.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ suppose $\|\vec{m}\|$ constant (aimant permanent, ou spire à intensité imposée).
- Dans un champ uniforme, il n'y a **pas de force**, seulement un couple : une boussole tourne, mais n'est pas attirée vers le nord.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 — Mesure de la composante horizontale du champ terrestre ✦✦✧✧✧

Une aiguille aimantée (moment m, moment d'inertie J par rapport à son axe vertical) oscille dans la composante horizontale B_h du champ terrestre avec la période $T_0 = 1{,}80\,\mathrm{s}$. Des bobines de Helmholtz ajoutent un champ horizontal $B_1 = 15{,}0\,\mu\mathrm{T}$, parallèle à $\vec{B}_h$ et de même sens ; la période devient $T_1 = 1{,}45\,\mathrm{s}$.

Q-1) Établir l'expression de la période des petites oscillations.

Q-2) En déduire B_h sans connaître m ni J. Application numérique.

Q-3) Que se passerait-il si $\vec{B}_1$ était de sens opposé à $\vec{B}_h$ et de norme supérieure ?

Correction

Q-1) $J\ddot{\theta} = -mB_h\sin\theta \approx -mB_h\theta$: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mB_h}}$.

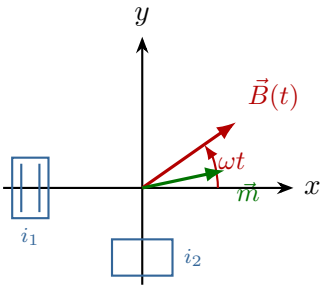
Q-2) $\dfrac{T_0^2}{T_1^2} = \dfrac{B_h + B_1}{B_h}$, d'où $B_h = \dfrac{B_1T_1^2}{T_0^2 - T_1^2} = 27{,}7\,\mu\mathrm{T}$.

Q-3) Le champ total change de sens : l'ancienne position d'équilibre devient instable et l'aiguille se retourne de $180°$ avant d'osciller autour de la nouvelle position stable.

VI Effet moteur d'un champ magnétique tournant

VI.1 Création d'un champ tournant

Deux bobines identiques d'axes orthogonaux Ox et Oy créent en O des champs proportionnels à leurs courants : $\vec{B}_1 = Ki_1\vec{u}_x$ et $\vec{B}_2 = Ki_2\vec{u}_y$.



Champ tournant D. Pour que $\vec{B} = K(i_1\vec{u}_x + i_2\vec{u}_y)$ garde une norme constante en tournant uniformément, il faut $i_1^2 + i_2^2 = \text{cte}$: on prend des courants de même amplitude **en quadrature**, $i_1 = I\cos\omega t$ et $i_2 = I\sin\omega t$. Alors

$$\vec{B}(O,t) = B_0\left(\cos\omega t\,\vec{u}_x + \sin\omega t\,\vec{u}_y\right), \qquad B_0 = KI$$

Le champ, de norme constante, tourne à la vitesse angulaire ω dans le sens direct autour de $\vec{u}_z$; on inverse le sens de rotation en permutant les deux courants. Dans l'industrie, on utilise **trois** bobines d'axes à $120°$, alimentées par des courants triphasés (déphasés de $2\pi/3$) : le champ tourne avec la norme $\frac{3}{2}B_0$. L'ensemble des bobines constitue le **stator**, la partie mobile le **rotor**.

VI.2 Moteur synchrone

Un aimant de moment $\vec{m}$, mobile autour de Oz, tourne à la vitesse angulaire constante Ω :

$$\vec{m} = m\big(\cos(\Omega t - \alpha_0)\,\vec{u}_x + \sin(\Omega t - \alpha_0)\,\vec{u}_y\big).$$

Couple instantané et couple moyen D.

$$\Gamma_z = (\vec{m}\wedge\vec{B})\cdot\vec{u}_z = mB_0\big[\cos(\Omega t-\alpha_0)\sin\omega t - \sin(\Omega t-\alpha_0)\cos\omega t\big] = mB_0\sin\big((\omega-\Omega)t+\alpha_0\big).$$

Si $\Omega \neq \omega$, ce couple oscille et sa moyenne est nulle : l'aimant ne peut pas être entraîné durablement. Si $\Omega = \omega$, le couple est constant :

$$\Gamma = mB_0\sin\alpha \qquad \mathcal{P} = \Gamma\,\omega = mB_0\,\omega\sin\alpha$$

où α est l'angle de **retard** de $\vec{m}$ sur $\vec{B}$. Le rotor tourne exactement à la vitesse du champ : c'est un moteur **synchrone**.

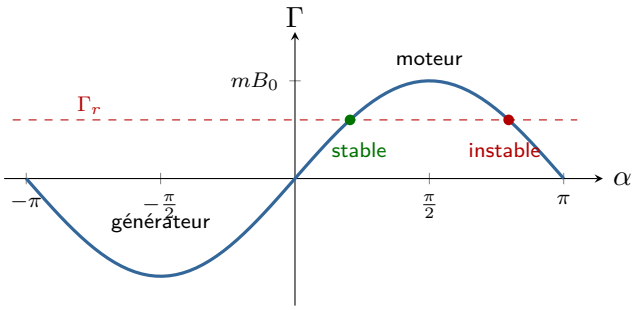


Fig. 2 : Couple moyen du moteur synchrone en fonction de l'angle de retard α.

Fonctionnement du moteur synchrone R

- Fonctionnement **moteur** pour $0 < \alpha < \pi$ (rotor en retard sur le champ) ; **générateur** (alternateur) pour $-\pi < \alpha < 0$: un opérateur entraîne le rotor, qui est en avance sur le champ.
- Face à un couple résistant $\Gamma_r < mB_0$, deux angles conviennent ; seul $\alpha < \pi/2$ est **stable** : si la

charge augmente, le rotor ralentit, α augmente et le couple moteur augmente.

- Si $\Gamma_r > mB_0$, le moteur **décroche**. Le moteur ne démarre pas seul (couple moyen nul à l'arrêt) : il faut le lancer à la vitesse de synchronisme.

Remarque

Si l'on remplace l'aimant par une bobine fermée sur elle-même, le champ tournant y induit des courants (EM3) et entraîne la bobine à une vitesse légèrement *inférieure* à celle du champ : c'est le moteur **asynchrone**, robuste, qui démarre seul et équipe la plupart des machines industrielles.

☞ Exercice d'application

EXERCICE 9 Ordres de grandeur d'un moteur synchrone ✦✦✧✧✧

Un rotor de moment magnétique $m = 3{,}0\,\mathrm{A\cdot m^2}$ est placé dans un champ tournant de norme $B_0 = 40\,\mathrm{mT}$ créé par un stator alimenté à $f = 50\,\mathrm{Hz}$ (une paire de bobines).

Q-1) Quelle est la vitesse de rotation du rotor en tours par minute ?

Q-2) Calculer le couple maximal et la puissance mécanique maximale.

Q-3) Le moteur entraîne une charge de couple résistant $0{,}060\,\mathrm{N\cdot m}$. Calculer l'angle de retard en régime établi.

Correction

Q-1) $\Omega = \omega = 2\pi f$: $50\,\mathrm{tr\cdot s^{-1}}$, soit $3000\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}$.

Q-2) $\Gamma_{\max} = mB_0 = 0{,}12\,\mathrm{N\cdot m}$; $\mathcal{P}_{\max} = mB_0\omega = 38\,\mathrm{W}$.

Q-3) $\sin\alpha = \frac{0{,}060}{0{,}12} = 0{,}5$, d'où $\alpha = 30°$ (la solution $150°$ est instable).

VII Synthèse

★ À retenir

- Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$, la partie magnétique ne travaille pas.
- Laplace : $\vec{f_v} = \vec{j}\wedge\vec{B}$, $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}_{\text{ext}}$; résultante nulle sur un circuit fermé dans un champ uniforme ; $\vec{F} = I\overrightarrow{AC}\wedge\vec{B}$ pour une portion.
- Puissance : $\mathcal{P}_L = \vec{F}\cdot\vec{v}$ (translation), $\Gamma_\Delta\omega$ (rotation).
- Rails : $\vec{F} = I\ell B$, perpendiculaire à la barre ; $\mathcal{P}_L = I\ell Bv$.
- Spire : $\vec{m} = IS\vec{n}$, $\vec{\Gamma} = \vec{m}\wedge\vec{B}$, $\Gamma_\Delta = -mB\sin\theta$; $E_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$; équilibre stable pour $\vec{m}$ et $\vec{B}$ de même sens ; $\omega_0 = \sqrt{mB/J}$.
- Champ tournant : deux bobines en quadrature ; moteur synchrone : $\Omega = \omega$, $\Gamma = mB_0\sin\alpha$, stable pour $0 < \alpha < \pi/2$.

Pour aller plus loin

Au chapitre EM3, on prendra en compte la force électromotrice induite dans un conducteur en mouvement : les forces de Laplace et l'induction forment les deux faces d'une même **conversion**

électromécanique, avec $\mathcal{P}_L + e\,i = 0$.

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 10 Balance de Cotton

★★★☆☆

Un fléau isolant, mobile autour d'un axe horizontal Δ, porte d'un côté un conducteur situé dans le plan vertical perpendiculaire à Δ : deux arcs de cercle centrés sur Δ, reliés par un segment horizontal MN de longueur $\ell = 4{,}0\,\text{cm}$ dont le milieu est à la distance horizontale d de l'axe. Seule la partie basse du conducteur (les arcs et MN) baigne dans le champ $\vec{B}$ à mesurer, horizontal, **parallèle à** Δ, donc perpendiculaire au plan du conducteur. De l'autre côté, un plateau situé à la même distance d de l'axe reçoit des masses. On équilibre le fléau à vide, puis on fait passer $I = 2{,}5\,\text{A}$: il faut ajouter $m = 0{,}80\,\text{g}$ pour rétablir l'équilibre.

Q-1) Montrer que les forces de Laplace sur les arcs de cercle ont un moment nul par rapport à Δ.

Q-2) En déduire B. Application numérique.

Q-3) Quel est l'intérêt de cette géométrie par rapport à une simple pesée de la force sur un fil ?

Correction

Q-1) Sur un arc centré sur Δ, $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est orthoradial et contenu dans le plan du circuit, $\vec{B}$ est perpendiculaire à ce plan : $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}$ est radial, sa droite d'action rencontre Δ : moment nul.

Q-2) Sur MN, la force est verticale, uniformément répartie, de résultante $I\ell B$; son moment est celui de la résultante appliquée au milieu de MN, de bras de levier d ; équilibre des moments : $I\ell Bd = mgd$, d'où $B = \dfrac{mg}{I\ell} = 7{,}8\times10^{-2}\,\text{T}$.

Q-3) Seule la force sur le segment intervient ; la mesure ne dépend ni de la forme exacte des arcs ni de la position du centre de masse (équilibrage préalable à vide). C'est une méthode absolue de mesure du champ.

EXERCICE 11 Canon électromagnétique

★★★☆☆

Deux rails conducteurs sont modélisés par deux bandes planes parallèles de largeur $w = 2{,}0\,\text{cm}$, distantes de $h = 1{,}0\,\text{cm}$ ($h \ll w$), semi-infinies, parcourues par des courants opposés d'intensité i et reliées à leur extrémité par le projectile conducteur (masse $m = 10\,\text{g}$), qui ferme le circuit. On néglige les effets de bord.

Q-1) Montrer que, loin de l'extrémité, les deux bandes créent entre elles un champ uniforme $B = \dfrac{\mu_0 i}{w}$ et un champ nul à l'extérieur (penser au solénoïde plan formé de deux nappes, chapitre EM1).

Q-2) Justifier que le champ au niveau du projectile vaut la moitié de cette valeur. En déduire la force propulsive $F = \frac{1}{2}\lambda i^2$ et exprimer λ.

Q-3) Le projectile doit atteindre $v = 2{,}0\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ sur une longueur de rails $X = 2{,}0\,\text{m}$, à intensité constante. Calculer la force, l'intensité et la durée du tir. Commenter.

Correction

Q-1) Chaque bande est une nappe de densité $j_s = i/w$ qui crée $\frac{\mu_0 j_s}{2}$ de part et d'autre ; les courants étant opposés, les champs s'ajoutent entre les bandes et se compensent à l'extérieur : $B = \mu_0 j_s = \dfrac{\mu_0 i}{w}$.

Q-2) Deux bandes semi-infinies prolongées par leurs symétriques reconstituent des bandes infinies ; par symétrie, chaque moitié crée la moitié du champ dans le plan de coupure : $B_{\text{proj}} = \dfrac{\mu_0 i}{2w}$, perpendiculaire au projectile (champ extérieur créé par les rails). Force : $F = ih\dfrac{\mu_0 i}{2w} = \dfrac{1}{2}\lambda i^2$ avec $\lambda = \dfrac{\mu_0 h}{w} = 0{,}63\,\mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$. Elle pousse le projectile vers l'extrémité ouverte quel que soit le sens de i.

Q-3) $F = \dfrac{mv^2}{2X} = 1{,}0\times10^4\,\text{N}$; $i = \sqrt{2F/\lambda} = 1{,}8\times10^5\,\text{A}$; accélération $1{,}0\times10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, durée $2\,\text{ms}$. Des courants de près de $200\,\text{kA}$ exigent des bancs de condensateurs considérables ; l'échauffement et l'érosion des rails limitent le procédé.

EXERCICE 12 Pression magnétique

★★★☆☆

Deux nappes planes parallèles $z = \pm\frac{h}{2}$ sont parcourues par des densités surfaciques de courant opposées $\pm j_s\vec{u}_x$ (solénoïde plan) ; le champ vaut $\vec{B} = B\vec{u}_y$ entre elles ($B = \mu_0 j_s$) et $\vec{0}$ à l'extérieur.

Q-1) La force sur un élément de nappe se calcule avec le champ créé par l'*autre* nappe. Montrer que chaque nappe subit, par unité de surface, une force dirigée vers l'extérieur, de norme $\dfrac{B^2}{2\mu_0}$.

Q-2) Montrer qu'on obtient le même résultat en utilisant la moyenne des champs de part et d'autre de la nappe.

Q-3) Calculer cette pression pour $B = 10\,\text{T}$ (électroaimant de recherche) et commenter.

Correction

Q-1) La nappe supérieure (densité $-j_s\vec{u}_x$) est dans le champ de la nappe inférieure, $\frac{B}{2}$ selon la direction de $\vec{B}$ intérieur ; la force surfacique $\vec{j}_s \wedge \vec{B}_{\text{autre}}$ a pour norme $j_s\frac{B}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ et pousse la nappe hors de la région de champ (courants antiparallèles : répulsion).

Q-2) De part et d'autre de la nappe supérieure, le champ vaut B (intérieur) et 0 (extérieur) : la moyenne $\frac{B}{2}$ redonne le même résultat. Le champ propre de la nappe, antisymétrique, n'exerce pas de force.

Q-3) $\frac{B^2}{2\mu_0} = 4{,}0\times10^7\,\text{Pa}$, soit 400 fois la pression atmosphérique : les bobinages des électroaimants intenses doivent être fortement frettés sous peine d'éclater.

EXERCICE 13 Aimant sur l'axe d'une spire

★★★☆☆

Une spire circulaire de rayon R, d'axe Oz, parcourue par I, crée sur son axe $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$. Un petit aimant de moment $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$ ($\mathcal{M} > 0$), contraint de rester sur l'axe, est placé à la cote $z > 0$.

Q-1) Exprimer son énergie potentielle et la force qu'il subit. Est-il attiré ou repoussé par la spire ?

Q-2) Pour quelle cote la force est-elle maximale ?

Q-3) Que se passe-t-il si l'on retourne l'aimant ?

Correction

Q-1) $E_p = -\mathcal{M}B_z(z)$ et $F_z = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = \mathcal{M}\dfrac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{3\mu_0 I R^2 \mathcal{M} z}{2(R^2+z^2)^{5/2}} < 0$: l'aimant est **attiré** vers la spire, zone de champ plus intense.

Q-2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z(R^2+z^2)^{-5/2}\right] = (R^2+z^2)^{-7/2}(R^2-4z^2)$ s'annule pour $z = \frac{R}{2}$.

Q-3) La force change de signe : l'aimant est repoussé (et la position axiale devient instable vis-à-vis d'une rotation de l'aimant).

IX Classiques des concours

EXERCICE 14 Moteur synchrone triphasé

★★★★☆

Trois électroaimants identiques, d'axes concourants en O dans le plan (Oxy), de vecteurs unitaires $\vec{u}_k$ tournés de $\frac{2k\pi}{3}$ par rapport à $\vec{u}_x$ $(k = 0, 1, 2)$, sont alimentés par des courants triphasés ; ils créent en O les champs $\vec{B}_k = B_0 \cos\left(\omega t - \frac{2k\pi}{3}\right)\vec{u}_k$.

Q-1) Montrer que le champ total est un champ tournant de norme $\frac{3}{2}B_0$. Préciser sa vitesse et son sens de rotation.

Q-2) Un aimant de moment $\mathcal{M}$, mobile autour de Oz, tourne à la vitesse Ω constante, avec $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\big(\cos(\Omega t-\alpha)\vec{u}_x + \sin(\Omega t-\alpha)\vec{u}_y\big)$. Calculer le couple instantané et sa moyenne. Justifier le nom du moteur.

Q-3) On donne $\mathcal{M} = 5{,}0\,\mathrm{A\cdot m^2}$, $B_0 = 30\,\mathrm{mT}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Calculer le couple et la puissance maximaux.

Q-4) La charge impose un couple résistant égal à $60\,\%$ du couple maximal. Déterminer les deux angles de retard possibles et montrer qu'un seul correspond à un fonctionnement stable.

Q-5) Expliquer pourquoi ce moteur ne peut pas démarrer seul et proposer une solution.

Correction

Q-1) $B_x = B_0\sum_k \cos\left(\omega t - \frac{2k\pi}{3}\right)\cos\frac{2k\pi}{3} = \frac{B_0}{2}\sum_k\left[\cos\omega t + \cos\left(\omega t - \frac{4k\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{2}B_0\cos\omega t$, car la somme de trois cosinus déphasés de $\frac{4\pi}{3}$ est nulle. De même $B_y = \frac{3}{2}B_0\sin\omega t$: champ tournant de norme $\frac{3}{2}B_0$, à la vitesse ω, dans le sens direct.

Q-2) $\Gamma_z = \frac{3}{2}\mathcal{M}B_0\sin\big((\omega-\Omega)t+\alpha\big)$; moyenne nulle si $\Omega \neq \omega$, égale à $\frac{3}{2}\mathcal{M}B_0\sin\alpha$ si $\Omega = \omega$: le moteur ne fonctionne qu'au synchronisme.

Q-3) $\Gamma_{\max} = \frac{3}{2}\mathcal{M}B_0 = 0{,}225\,\mathrm{N\cdot m}$; $\mathcal{P}_{\max} = \Gamma_{\max}\omega = 71\,\mathrm{W}$.

Q-4) $\sin\alpha = 0{,}6$: $\alpha_1 = 37°$ ou $\alpha_2 = 143°$. Une légère surcharge ralentit le rotor et augmente α ; en α_1 le couple moteur augmente et rétablit le synchronisme (stable) ; en α_2 il diminue et le moteur décroche (instable).

Q-5) À l'arrêt, le couple oscille à ω et sa moyenne est nulle : le rotor, inerte, ne peut pas suivre. On le lance à une vitesse voisine de ω (moteur auxiliaire), ou on augmente progressivement la fréquence d'alimentation depuis zéro (variateur électronique).

EXERCICE 15 Force sur une spire dans un champ divergent

★★★★☆

Un aimant d'axe Oz crée un champ à symétrie de révolution. Au voisinage de l'axe, on note $b(z) = B_z(0,z)$; on a établi au chapitre EM1 que $B_z(r,z) \approx b(z)$ et $B_r(r,z) \approx -\dfrac{r}{2}b'(z)$. Une spire circulaire de rayon a, d'axe Oz, de centre à la cote z, est parcourue par I dans le sens direct autour de $\vec{u}_z$.

Q-1) Montrer que la résultante des forces de Laplace sur la spire est axiale et vaut $F_z = \pi a^2 I\, b'(z)$.

Q-2) Interpréter avec le moment magnétique $\vec{m}$ de la spire et retrouver $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{m}\cdot\vec{B})$ sur l'axe.

Q-3) Application : $a = 1{,}0\,\mathrm{cm}$, $I = 2{,}0\,\mathrm{A}$, au point où $b' = -20\,\mathrm{T\cdot m^{-1}}$. Calculer F_z. Interpréter le signe.

Q-4) Ce dispositif est à la base du haut-parleur et de l'anneau de Thomson. Expliquer qualitativement le saut d'un anneau métallique enfilé sur une bobine que l'on alimente brusquement (on admettra que le courant induit dans l'anneau est opposé à celui de la bobine, chapitre EM3).

Correction

Q-1) $\mathrm{d}\vec{\ell} = a\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{B} = B_r\vec{u}_r + B_z\vec{u}_z$: $\mathrm{d}\vec{F} = Ia\,\mathrm{d}\theta\,(B_r\,\vec{u}_\theta\wedge\vec{u}_r + B_z\,\vec{u}_\theta\wedge\vec{u}_z) = Ia\,\mathrm{d}\theta\,(-B_r\vec{u}_z + B_z\vec{u}_r)$. Le terme en $\vec{u}_r$ s'annule par intégration $\left(\oint \vec{u}_r\,\mathrm{d}\theta = \vec{0}\right)$; il reste $F_z = -2\pi a I B_r(a,z) = \pi a^2 I\, b'(z)$.

Q-2) $m = \pi a^2 I$: $F_z = m\,b'(z) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\vec{m}\cdot\vec{B})$ sur l'axe. La spire dont le moment est parallèle au champ est attirée vers les zones de champ intense.

Q-3) $F_z = \pi \times 10^{-4} \times 2{,}0 \times (-20) = -1{,}3\times 10^{-2}\,\mathrm{N}$: la spire est poussée vers les z décroissants, c'est-à-dire vers l'aimant, là où le champ est plus intense.

Q-4) Le courant induit dans l'anneau est opposé à celui de la bobine : le moment de l'anneau est antiparallèle au champ et la force devient $-|m|b'(z)$, dirigée vers les champs faibles : l'anneau est repoussé et peut sauter de plusieurs dizaines de centimètres.