LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

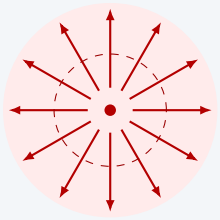
FICHE RÉSUMÉ

EM1

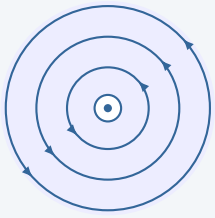
ÉLECTROMAGNÉTISME

Formulation locale des lois de l'électromagnétisme en régime statique

Opérateurs vectoriels — Conservation de la charge — Équations de Maxwell-Gauss et de Poisson — Résolution numérique de l'équation de Laplace — Lois locales de la magnétostatique



$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$



$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

> *Un nouveau concept apparut en physique, l'invention la plus importante depuis l'époque de Newton : le champ.*
>
> — Albert Einstein et Leopold Infeld, *L'Évolution des idées en physique* (1938)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Flux, circulation, divergence, rotationnel »

EM1 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Les théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes transforment les lois intégrales de MPSI (Gauss, circulation conservative, conservation du flux, Ampère) en équations **locales** reliant, en chaque point, les dérivées des champs à leurs sources ρ et $\vec{j}$. En électrostatique, tout se résume à l'équation de Poisson $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$, qu'on résout analytiquement dans les cas symétriques et numériquement (relaxation) sinon. En magnétostatique, $\vec{B}$ est toujours à flux conservatif et son rotationnel vaut $\mu_0\vec{j}$, ce qui impose $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

I Outils d'analyse vectorielle

Définition — Opérateurs R

- $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$ normal aux surfaces $f = \text{cte}$, vers les f croissants.
- $\operatorname{div}\vec{A}$ = flux sortant par unité de volume (scalaire) ; $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\cdot\vec{n}$ = circulation par unité de surface (vecteur) ; $\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f)$.
- Champ radial : $\operatorname{div}(A\vec{u}_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2A)}{\mathrm{d}r}$ (sph.), $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rA)}{\mathrm{d}r}$ (cyl.) ; orthoradial : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,(A\vec{u}_\theta) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rA)}{\mathrm{d}r}\vec{u}_z$.

Théorèmes intégraux R

$$\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_\mathcal{V} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\tau \qquad \oint_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Ostrogradski : normale sortante ; Stokes : normale orientée par la règle de la main droite.
Identités : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f) = \vec{0}$; $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = 0$; $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$.
Circulation conservative $\iff \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{0} \iff \vec{A} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$; flux conservatif $\iff \operatorname{div}\vec{A} = 0 \iff \vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{G}$.

II Charges, courants, conservation de la charge

Modèle	Charge	Courant	Élément de courant
Volumique	$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$ $(\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-3})$	$\vec{j} = \rho_m\vec{v}$ $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2})$, $I = \iint\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$	$\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$
Surfacique	$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$	$\vec{j}_s = \sigma\vec{v}$ $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-1})$, $I = \int j_s\,\mathrm{d}\ell_\perp$	$\vec{j}_s\,\mathrm{d}S$
Linéique	$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}$	intensité I	$I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$

Conservation de la charge R D

Bilan sur la tranche $[x, x+\mathrm{d}x]$ pendant $\mathrm{d}t$: $\frac{\partial\rho}{\partial t}S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \big[j(x) - j(x+\mathrm{d}x)\big]S\,\mathrm{d}t$, puis généralisation :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}Q_{\text{int}}}{\mathrm{d}t} = -\oiint_\Sigma \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Régime stationnaire : $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, même intensité dans toute section d'un tube de courant (loi des nœuds).

III Électrostatique locale

Équations locales R

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \ \text{(Poisson)} \qquad \Delta V = 0 \ \text{si } \rho = 0 \ \text{(Laplace)}$$

- Solution (admise) pour une distribution **bornée** : $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \dfrac{\rho(P)\,\mathrm{d}\tau}{PM}$, nulle à l'infini ; fausse pour une distribution infinie.
- V défini à une constante près ; solution **unique** une fois les conditions aux limites fixées ; pas d'extremum de V dans une région vide.
- Lignes de champ : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \vec{E} = \vec{0}$, soit $\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}$; orthogonales aux équipotentielles, jamais fermées.
- Passage : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$; V continu.
- Gravitation : $\operatorname{div}\vec{g} = -4\pi G\mu$, $\Delta\Phi = 4\pi G\mu$ ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G$, $q \to m$).

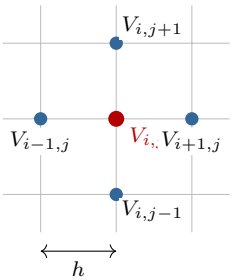
Distribution	Équation locale	Champ
Couche $\lvert z\rvert < a$, ρ uniforme	$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $E(0) = 0$	$\frac{\rho z}{\varepsilon_0}$ dedans, $\pm\frac{\rho a}{\varepsilon_0}$ dehors
Boule R, ρ uniforme	$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}(r^2E)}{\mathrm{d}r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ dedans, $\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ dehors
Condensateur cylindrique	$\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$	$V = A\ln r + B$, $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$

Résolution numérique de Laplace R

Maillage de pas h : $\frac{\partial^2}{\partial V^2}x \approx \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2}$, d'où

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\right)$$

Relaxation (Jacobi) : bords fixés, on remplace chaque valeur intérieure par la moyenne de ses voisines jusqu'à convergence.



IV Magnétostatique locale

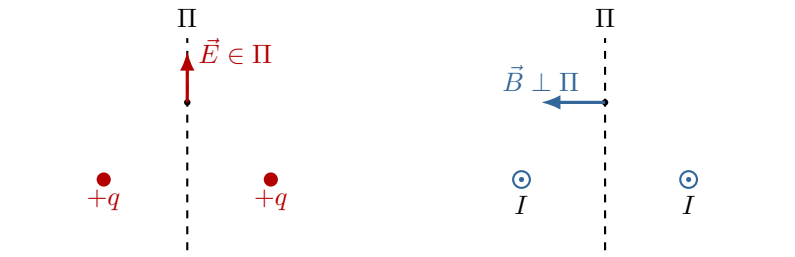
Équations locales R D

$$\operatorname{div}\vec{B}=0 \iff \oiint_{\Sigma}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j} \iff \oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\mu_0 I_{\text{enl}}$$

- $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B})=0$ impose $\operatorname{div}\vec{j}=0$: valable en régime stationnaire (ou ARQS) seulement.
- Potentiel vecteur : $\vec{B}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$, $\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\Phi_B$; en jauge de Coulomb ($\operatorname{div}\vec{A}=0$), $\vec{\Delta}\vec{A}+\mu_0\vec{j}=\vec{0}$ (complément).
- Près de l'axe d'une distribution de révolution : $B_r\approx-\frac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_z(0,z)}{\mathrm{d}z}$.
- Passage : $\vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}$ (B_N continue).

★ À retenir

	$\vec{E}$ statique	$\vec{B}$ statique
Sources	ρ	$\vec{j}$
Divergence	ρ/ε_0	0
Rotationnel	$\vec{0}$	$\mu_0\vec{j}$
Potentiel	$\vec{E}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$	$\vec{B}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$
Plan de symétrie des sources	$\vec{E}$ contenu	$\vec{B}$ perpendiculaire
Plan d'antisymétrie	$\vec{E}$ perpendiculaire	$\vec{B}$ contenu
Lignes de champ	ouvertes ($+\to-$)	fermées autour des courants
Discontinuité à la traversée	E_N : σ/ε_0	B_T : $\mu_0 j_s$



Π : plan de symétrie des charges — Π : plan de symétrie des courants

Ordres de grandeur

Densité de courant dans un fil domestique : 10^6 à $10^7\,\mathrm{A\cdot m^{-2}}$, vitesse des électrons $\sim 0{,}1\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$ à $1\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$; temps de relaxation de la charge dans le cuivre $\varepsilon_0/\gamma\sim10^{-19}\,\mathrm{s}$ (conducteur neutre en volume) ; champ disruptif de l'air $3\,\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$.

V Méthodes et pièges

☞ Méthode — Calculer un champ par une équation locale M

1. Symétries ⇒ direction du champ ; invariances ⇒ variables.
2. Écrire $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (ou Poisson, ou $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$) dans le bon système de coordonnées : équation différentielle ordinaire.
3. Intégrer par région ; constantes : champ nul sur un plan ou centre de symétrie, fini sur l'axe, conditions aux limites, continuité en l'absence de distribution surfacique.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Dériver composante par composante en cylindriques ou sphériques ; utiliser $\vec{\nabla}$ hors des cartésiennes.
- $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ ne signifie pas $\vec{E} = \vec{0}$; $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$ ne signifie pas $\vec{A}$ uniforme.
- Appliquer la solution intégrale de Poisson à une distribution infinie.
- Placer $\vec{B}$ dans un plan de symétrie des courants (c'est l'inverse de $\vec{E}$).
- Oublier les courants de retour dans le courant enlacé.

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je sais passer d'une loi intégrale à une loi locale avec Ostrogradski ou Stokes, et inversement.
- ☐ Je sais établir l'équation de conservation de la charge à une dimension et l'interpréter en régime stationnaire.
- ☐ Je sais écrire les équations de Maxwell-Gauss, de Poisson et de Laplace et calculer un champ par l'équation locale.
- ☐ Je connais les conditions de validité de $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{PM}$ et la non-unicité du potentiel.
- ☐ Je sais écrire et programmer le schéma de relaxation pour l'équation de Laplace.
- ☐ Je sais transposer l'équation de Poisson à la gravitation.
- ☐ Je sais écrire $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ et comparer les propriétés de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.