LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

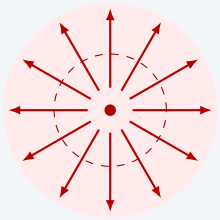
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

EM1

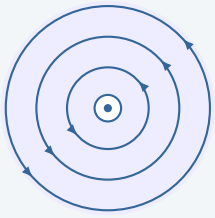
ÉLECTROMAGNÉTISME

Formulation locale des lois de l'électromagnétisme en régime statique

Opérateurs vectoriels — Conservation de la charge — Équations de Maxwell-Gauss et de Poisson — Résolution numérique de l'équation de Laplace — Lois locales de la magnétostatique



$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$



$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

> *Un nouveau concept apparut en physique, l'invention la plus importante depuis l'époque de Newton : le champ.*
>
> — Albert Einstein et Leopold Infeld, *L'Évolution des idées en physique* (1938)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Flux, circulation, divergence, rotationnel »

EM1 — Lois locales en statique

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Manipuler gradient, divergence, rotationnel, laplacien ; passer d'une loi intégrale à une loi locale (Ostrogradski, Stokes).
- Établir la conservation de la charge à une dimension et la généraliser ; interpréter $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.
- Écrire $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$, $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, les équations de Poisson et de Laplace (et leur analogue gravitationnel) ; les utiliser pour calculer un champ ou un potentiel.
- Connaître la solution intégrale de l'équation de Poisson, ses conditions de validité, la non-unicité du potentiel ; résoudre numériquement l'équation de Laplace.
- Écrire $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$; comparer les propriétés de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Comment lire ce cours

Étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. Les théorèmes de Gauss et d'Ampère de MPSI deviennent ici des relations entre les champs et leurs sources *en chaque point*. La simulation PhysioNova « Flux, circulation, divergence, rotationnel » visualise le flux sortant d'un petit volume et la circulation sur un petit contour. Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; exercices d'approfondissement et classiques des concours, corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

I Outils d'analyse vectorielle . . . 3
I.1 Champs, circulation et flux . . . 3
I.2 Gradient . . . 3
I.3 Divergence et théorème d'Ostrogradski . . . 3
I.4 Rotationnel et théorème de Stokes . . . 4
I.5 Laplacien et identités . . . 5
II Charges, courants et conservation de la charge . . . 7
II.1 Densités de charge et de courant . . . 7
II.2 Équation locale de conservation de la charge . . . 7
III Lois locales de l'électrostatique . . . 8
III.1 Circulation du champ : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ . . . 8
III.2 Forme locale du théorème de Gauss . . . 9
III.3 Équations de Poisson et de Laplace . . . 9
III.4 Exemples de calcul par les équations locales . . . 10
III.5 Analogie avec la gravitation . . . 11
IV Résolution numérique de l'équation de Laplace . . . 12
V Lois locales de la magnétostatique . . . 14
V.1 Conservation du flux magnétique . . . 14
V.2 Forme locale du théorème d'Ampère . . . 15
V.3 Exemples . . . 15
VI Comparaison des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ statiques . . . 17
VII Synthèse . . . 17
VIII Exercices d'approfondissement . . . 18
IX Classiques des concours . . . 20

I Outils d'analyse vectorielle

I.1 Champs, circulation et flux

Un **champ scalaire** associe un nombre $f(M,t)$ à chaque point M d'une région de l'espace (potentiel V, densité de charge ρ, température) ; un **champ de vecteurs** associe un vecteur $\vec{A}(M,t)$ (champs $\vec{E}$, $\vec{B}$, densité de courant $\vec{j}$, vitesse d'un fluide). Un champ est **stationnaire** s'il ne dépend pas du temps, **uniforme** s'il ne dépend pas du point.

Définition — Circulation et flux R

- La **circulation** de $\vec{A}$ le long d'une courbe orientée Γ est $\mathcal{C} = \int_\Gamma \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$; on note $\oint_\Gamma$ si la courbe est fermée.
- Le **flux** de $\vec{A}$ à travers une surface orientée S est $\Phi = \iint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$, avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$.
- Pour une **surface fermée**, $\vec{n}$ est dirigé vers l'extérieur (flux sortant). Pour une surface s'appuyant sur un contour orienté, $\vec{n}$ est donné par la **règle de la main droite** (ou du tire-bouchon) appliquée au sens de parcours.

★ À retenir

	Déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$	Volume $\mathrm{d}\tau$
Cartésiennes	$\mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$
Cylindriques	$\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$	$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$
Sphériques	$\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$	$r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

Surfaces usuelles : cylindre de rayon r : $r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$; disque : $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$; sphère de rayon r : $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

I.2 Gradient

Définition — Gradient d'un champ scalaire R

Le gradient de f est le champ de vecteurs tel que, pour tout déplacement élémentaire, $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. Il est **normal aux surfaces de niveau** $f = \text{cte}$, dirigé vers les valeurs **croissantes** de f, et sa norme est le taux de variation maximal de f par unité de longueur.

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \quad \text{(cartésiennes, cylindriques)}$$

En sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$.

I.3 Divergence et théorème d'Ostrogradski

Définition — Divergence R

La divergence de $\vec{A}$ en M est le **flux sortant par unité de volume** d'un petit volume $\mathrm{d}\tau$ entourant M : $\mathrm{d}\Phi_{\text{sortant}} = \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$. C'est un **scalaire**. Un point où $\mathrm{div}\,\vec{A} > 0$ est une « source » de lignes de

champ ; $\operatorname{div}\vec{A} < 0$, un « puits ».

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{(cartésiennes, cylindriques)}$$

En sphériques : $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$.

Démonstration en cartésiennes D. Sur un petit pavé $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, les deux faces perpendiculaires à $\vec{u}_x$ donnent le flux sortant $\big[A_x(x+\mathrm{d}x) - A_x(x)\big]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}\tau$; en ajoutant les contributions des faces perpendiculaires à $\vec{u}_y$ et à $\vec{u}_z$, on obtient l'expression annoncée. En cylindriques, pour un champ radial $A(r)\vec{u}_r$, un bilan sur la coque cylindrique comprise entre r et $r+\mathrm{d}r$ (hauteur h) donne $\big[(r+\mathrm{d}r)A(r+\mathrm{d}r) - rA(r)\big]2\pi h = \frac{\mathrm{d}(rA)}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r\,2\pi h$: on divise par $\mathrm{d}\tau = 2\pi r h\,\mathrm{d}r$.

Théorème d'Ostrogradski (admis) R

Pour tout volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée Σ orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

I.4 Rotationnel et théorème de Stokes

Définition — Rotationnel R

La composante de $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$ selon un vecteur unitaire $\vec{n}$ est la **circulation par unité de surface** sur un petit contour plan, d'aire $\mathrm{d}S$, orienté par $\vec{n}$: $\mathrm{d}\mathcal{C} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$. Un champ dont les lignes « tourbillonnent » a un rotationnel non nul. En cartésiennes :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z.$$

En cylindriques : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$; en sphériques, l'expression est fournie.

Théorème de Stokes (admis) R

Pour toute surface S s'appuyant sur un contour fermé Γ, orientée par la règle de la main droite :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{S} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

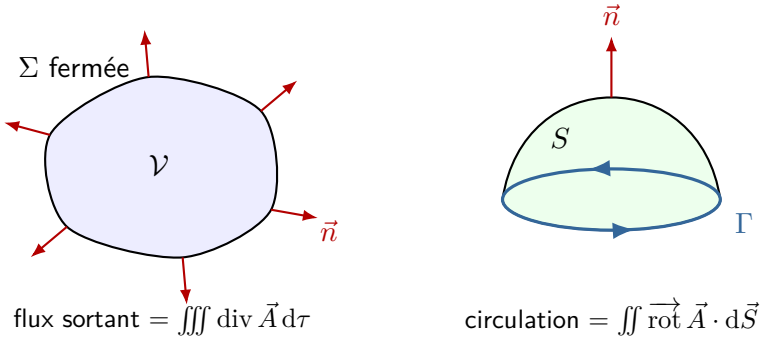


Fig. 1 : Orientation des surfaces : normale sortante (Ostrogradski) et règle de la main droite (Stokes).

I.5 Laplacien et identités

Laplacien et formulaire R

Laplacien scalaire : $\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$; pour $f(r)$ en sphériques, $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rf)}{\mathrm{d}r^2}$; pour $f(r)$ en cylindriques, $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$.

- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f) = \vec{0}$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(\operatorname{div}\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$
- $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = 0$
- $\operatorname{div}(f\vec{A}) = f\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$

En cartésiennes seulement : $\vec{\nabla} = \vec{u}_x\partial_x + \vec{u}_y\partial_y + \vec{u}_z\partial_z$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f = \vec{\nabla} f$, $\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$, $\Delta = \vec{\nabla}^2$.

Circulation conservative, flux conservatif R

Circulation conservative

$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 0$ pour tout Γ $\iff$ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$ $\iff$ il existe f telle que $\vec{A} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f$; la circulation de M_1 à M_2 vaut $f(M_1) - f(M_2)$ quel que soit le chemin.

Flux conservatif

$\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$ pour toute Σ $\iff$ $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ $\iff$ il existe $\vec{G}$ tel que $\vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{G}$; le flux est le même à travers toutes les sections d'un tube de champ.

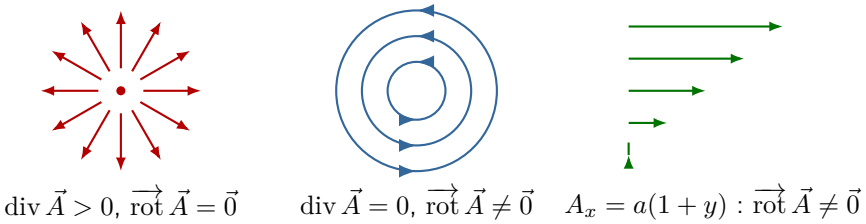


Fig. 2 : Champ « source » (divergence), champ « tourbillon » (rotationnel) et champ de cisaillement : des lignes droites n'empêchent pas un rotationnel non nul.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La divergence est un scalaire, le rotationnel un vecteur ; le gradient s'applique à un scalaire.
- Ne jamais « dériver composante par composante » en cylindriques ou sphériques : les vecteurs de base dépendent du point.
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$ ne signifie pas $\vec{A}$ uniforme : $\vec{r}/r^3$ est irrotationnel.

▶ Changer le sens de parcours d'un contour change le signe de la circulation *et* du flux à travers la surface associée.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Divergence et rotationnel de champs simples ✦✧✧✧✧

Soit a une constante positive. On considère, en cartésiennes, $\vec{A}_1 = a(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$ et $\vec{A}_2 = a(-y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$, puis, en sphériques, $\vec{A}_3 = r^n\vec{u}_r$.

Q-1) Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{A}_1$ et de $\vec{A}_2$. Dessiner l'allure de leurs lignes de champ.

Q-2) Calculer $\operatorname{div}\vec{A}_3$. Pour quelle valeur de n le champ $\vec{A}_3$ est-il à flux conservatif hors de l'origine ? Quel champ physique reconnaît-on ?

Q-3) Vérifier le théorème d'Ostrogradski pour $\vec{A}_3$ et une sphère de rayon R centrée en O ($n > -2$).

Correction

Q-1) $\operatorname{div}\vec{A}_1 = 2a$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}_1 = \vec{0}$: lignes radiales issues de l'axe Oz. $\operatorname{div}\vec{A}_2 = 0$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}_2 = \left(\frac{\partial(ax)}{\partial x} - \frac{\partial(-ay)}{\partial y}\right)\vec{u}_z = 2a\,\vec{u}_z$: $\vec{A}_2 = ar\,\vec{u}_\theta$, lignes circulaires d'axe Oz.

Q-2) $\operatorname{div}\vec{A}_3 = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}(r^{n+2})}{\mathrm{d}r} = (n+2)r^{n-1}$, nulle pour $n = -2$: c'est la loi en $\frac{1}{r^2}$ du champ coulombien.

Q-3) Flux sortant : $R^n \times 4\pi R^2 = 4\pi R^{n+2}$. Intégrale de volume : $\int_0^R (n+2)r^{n-1}4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi R^{n+2}$. Les deux membres sont égaux.

EXERCICE 2 — Champ des vitesses d'un solide en rotation ✦✦✧✧✧

Un disque tourne à la vitesse angulaire Ω constante autour de l'axe Oz : la vitesse d'un point M est $\vec{v} = \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}$.

Q-1) Exprimer $\vec{v}$ en cartésiennes. Calculer $\operatorname{div}\vec{v}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$.

Q-2) Calculer la circulation de $\vec{v}$ sur le cercle d'axe Oz de rayon R, et vérifier le théorème de Stokes.

Q-3) Interpréter : pourquoi dit-on que le rotationnel mesure la « rotation locale » d'un champ ?

Correction

Q-1) $\vec{v} = \Omega(-y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$: $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v} = 2\Omega\,\vec{u}_z$.

Q-2) $\vec{v} = \Omega R\vec{u}_\theta$ sur le cercle : $\oint \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 2\pi R^2\Omega$. Flux de $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{v}$ à travers le disque : $2\Omega \times \pi R^2$. Égalité vérifiée.

Q-3) Le rotationnel est uniforme et vaut le double du vecteur rotation : une petite roue à aubes placée n'importe où dans ce champ tournerait à la vitesse Ω. Le rotationnel n'est pas lié à la courbure des lignes, mais à la rotation propre d'un petit élément.

II Charges, courants et conservation de la charge

II.1 Densités de charge et de courant

On décrit la matière à l'échelle **mésoscopique** : grande devant les distances interatomiques, petite devant les dimensions du système.

Définition — Densités de charge et densité de courant R

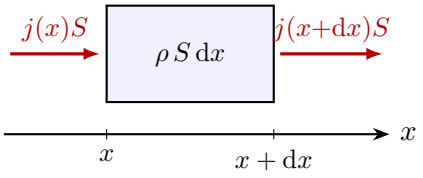
- Densité volumique de charge : $\rho = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$ $(\mathrm{C\cdot m^{-3}})$; modèles surfacique $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$ et linéique $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}$.
- Pour des porteurs de charge q, de densité particulaire n et de vitesse d'ensemble $\vec{v}$: $\vec{j} = nq\,\vec{v} = \rho_m \vec{v}$ $(\mathrm{A\cdot m^{-2}})$, où ρ_m est la densité des charges *mobiles*. Avec plusieurs espèces : $\vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k$.
- L'intensité à travers une surface orientée est le flux de $\vec{j}$: $\quad I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\iint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

Remarque

Dans un métal, la charge totale est nulle ($\rho = \rho_{\text{ions}} + \rho_m \approx 0$) alors que $\rho_m = -ne \neq 0$: un conducteur neutre peut être parcouru par un courant. Ne pas confondre ρ (charge totale, source de $\vec{E}$) et ρ_m (charges mobiles, source du courant).

II.2 Équation locale de conservation de la charge

Démonstration à une dimension D**.** On suppose $\rho(x,t)$ et $\vec{j} = j(x,t)\vec{u}_x$. On considère la tranche fixe comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$, de section S. Entre t et $t+\mathrm{d}t$:



- sa charge varie de $\big[\rho(x,t+\mathrm{d}t) - \rho(x,t)\big]S\,\mathrm{d}x = \dfrac{\partial\rho}{\partial t}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$;
- la charge ne pouvant être ni créée ni détruite, cette variation est égale à la charge entrée en x moins la charge sortie en $x+\mathrm{d}x$: $\big[j(x,t) - j(x+\mathrm{d}x,t)\big]S\,\mathrm{d}t = -\dfrac{\partial j}{\partial x}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

En égalant : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$.

Généralisation D**.** Pour un volume fixe $\mathcal{V}$ quelconque, de surface Σ : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathcal{V}}\rho\,\mathrm{d}\tau = -\oiint_{\Sigma}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\iiint_{\mathcal{V}}\mathrm{div}\,\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$ (Ostrogradski). Le volume étant arbitraire, les intégrandes sont égales.

Conservation de la charge R

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \frac{\mathrm{d}Q_{\text{int}}}{\mathrm{d}t} = -\oiint_{\Sigma}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

En **régime stationnaire**, $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$: $\vec{j}$ est à flux conservatif, l'intensité est la même à travers toutes les sections d'un tube de courant. C'est la justification de la **loi des nœuds** et de l'unicité de l'intensité dans une branche.

Ordres de grandeur

Fil de cuivre de section $2{,}5\,\mathrm{mm^2}$ parcouru par $16\,\mathrm{A}$: $j = 6{,}4\times10^6\,\mathrm{A\cdot m^{-2}}$; avec $n = 8{,}5\times10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$, la vitesse d'ensemble des électrons vaut $v = j/(ne) \approx 0{,}5\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}}$, environ 10^8 fois moins que leur vitesse d'agitation ($\sim 10^5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). Densités de courant admissibles : quelques $\mathrm{A\cdot mm^{-2}}$ dans le cuivre,

plusieurs centaines de $\mathrm{A}\cdot\mathrm{mm}^{-2}$ dans un supraconducteur.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 — Courant non uniforme et bilan en sphériques ✦✧✧✧✧

Q-1) Un conducteur cylindrique d'axe Oz, de rayon a, est parcouru par $\vec{j} = j_0 \dfrac{r^2}{a^2}\vec{u}_z$. Calculer l'intensité I qu'il transporte.

Q-2) Dans une distribution à symétrie sphérique, $\rho(r,t)$ et $\vec{j} = j(r,t)\vec{u}_r$. Par un bilan sur la coquille comprise entre r et $r+\mathrm{d}r$, établir l'équation de conservation de la charge et retrouver l'expression de la divergence d'un champ radial.

Correction

Q-1) On découpe la section en couronnes d'aire $2\pi r\,\mathrm{d}r$: $I = \int_0^a j_0 \frac{r^2}{a^2} 2\pi r\,\mathrm{d}r = \dfrac{\pi a^2 j_0}{2}$. Écrire $I = j_0 \pi a^2$ serait faux : $\vec{j}$ n'est pas uniforme.

Q-2) Pendant $\mathrm{d}t$, la charge de la coquille (volume $4\pi r^2 \mathrm{d}r$) varie de $\frac{\partial \rho}{\partial t} 4\pi r^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$; il entre $4\pi r^2 j(r)\mathrm{d}t$ et il sort $4\pi (r+\mathrm{d}r)^2 j(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}t$. D'où $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 j)}{\partial r} = 0$, et par identification $\mathrm{div}\,(j\vec{u}_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 j)}{\partial r}$.

EXERCICE 4 — Relaxation de la charge dans un conducteur ✦✦✧✧✧

Un milieu conducteur homogène obéit à la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (γ : conductivité). On admet $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (établi au paragraphe III).

Q-1) Montrer que ρ vérifie $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ et exprimer τ.

Q-2) Calculer τ pour le cuivre ($\gamma = 5{,}9 \times 10^7\,\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) et pour l'eau de mer ($\gamma = 4\,\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$). Conclure.

Correction

Q-1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{j} = -\gamma \mathrm{div}\,\vec{E} = -\dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho$, d'où $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}$ et $\rho(M,t) = \rho(M,0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Q-2) Cuivre : $\tau = 1{,}5 \times 10^{-19}\,\mathrm{s}$; eau de mer : $\tau = 2{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{s}$. Toute charge volumique disparaît quasi instantanément : un conducteur est **neutre en volume**, sa charge éventuelle est portée par sa surface. (Pour le cuivre, la valeur obtenue est très inférieure au temps entre deux collisions, $\sim 10^{-14}\,\mathrm{s}$: la loi d'Ohm n'est plus valable à cette échelle, mais la conclusion demeure.)

III Lois locales de l'électrostatique

III.1 Circulation du champ : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$

En MPSI, on a établi que le champ électrostatique dérive d'un potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, et que sa circulation sur un contour fermé est nulle.

Forme locale de la conservation de la circulation R D

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \iff \oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \iff \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$$

Démonstration. Pour tout contour Γ et toute surface S s'appuyant sur Γ, Stokes donne $\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = 0$. La surface étant arbitraire (en particulier aussi petite qu'on veut, de normale quelconque), $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$. Inversement, $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ donne directement $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V) = \vec{0}$.

III.2 Forme locale du théorème de Gauss

Équation de Maxwell-Gauss R D

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Démonstration. Pour tout volume $\mathcal{V}$ limité par Σ : $\iiint_\mathcal{V} \mathrm{div}\,\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\mathcal{V}\rho\,\mathrm{d}\tau$. Le volume étant quelconque, $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ en tout point. La réciproque s'obtient en intégrant sur un volume et en appliquant Ostrogradski.

> **Remarque**
>
> Les deux formes ne disent pas tout à fait la même chose : la forme intégrale relie un flux à une charge totale et ne fournit le champ qu'en cas de haute symétrie ; la forme locale relie les *dérivées* du champ en M à la densité de charge *en ce même point*. Là où $\rho = 0$, le champ n'est pas nul pour autant : il est seulement à flux conservatif.

III.3 Équations de Poisson et de Laplace

Équations de Poisson et de Laplace R D

En reportant $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ dans $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, et comme $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V) = \Delta V$:

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \ \text{(Poisson)} \qquad \Delta V = 0 \ \text{dans une région vide de charges (Laplace)}$$

Solution de l'équation de Poisson (admise) R

Pour une distribution de charges **bornée** (contenue dans un volume fini), la solution nulle à l'infini est

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(P)\,\mathrm{d}\tau_P}{PM}$$

C'est la superposition des potentiels coulombiens. Pour une distribution infinie (fil, plan, cylindre infinis), l'intégrale diverge : on calcule alors $\vec{E}$ par Gauss ou par l'équation locale, puis V par intégration.

Non-unicité du potentiel, unicité de la solution R

- Si V convient, $V + C$ (C constante) donne le même champ : le potentiel n'est défini qu'**à une constante additive près** ; seules les différences de potentiel sont mesurables.
- En revanche, dans un domaine donné, l'équation de Poisson admet une **solution unique** lorsque les conditions aux limites sont fixées (potentiel imposé sur les frontières, ou nul à l'infini pour une distribution bornée) : on peut donc deviner une solution, et si elle satisfait l'équation et les conditions aux limites, c'est la bonne.
- Une solution de l'équation de Laplace n'a ni maximum ni minimum à l'intérieur du domaine : ses extrêmes sont sur les frontières. Une charge placée dans une région vide ne peut pas y être en équilibre stable sous la seule action d'un champ électrostatique (théorème d'Earnshaw).

★ À retenir

Propriétés topographiques. Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles et orientées vers les potentiels décroissants ; elles ne peuvent pas être fermées ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$) ; elles naissent sur les charges positives et meurent sur les charges négatives ou à l'infini. Dans une région vide de charges, le flux se conserve le long d'un tube de champ : le champ est intense là où les lignes se resserrent.

III.4 Exemples de calcul par les équations locales

☞ Méthode — Calculer un champ par l'équation locale M

1. Symétries et invariances : direction de $\vec{E}$ et variables dont il dépend (exactement comme pour le théorème de Gauss).
2. Écrire $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (ou l'équation de Poisson) dans le système de coordonnées adapté : on obtient une équation différentielle ordinaire.
3. Intégrer dans chaque région ; fixer les constantes par : champ nul sur un plan ou un centre de symétrie, champ fini en $r = 0$, potentiel nul (ou fixé) à l'infini ou sur une électrode, **continuité** de $\vec{E}$ et de V en l'absence de charge surfacique.

Plan infini chargé en volume D**.** La couche $|z| < a$ porte la densité uniforme ρ. Invariance par translation selon x et y, plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ de symétrie : $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$. Le plan $z = 0$ étant de symétrie, $E(-z) = -E(z)$ et $E(0) = 0$. L'équation locale $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ pour $|z| < a$ et $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = 0$ ailleurs donne, avec la continuité en $\pm a$:

$$E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \quad (|z| \le a) \qquad\qquad E(z) = \pm\frac{\rho a}{\varepsilon_0} \quad (z \gtrless \pm a)$$

Avec $V(0) = 0$: $V = -\dfrac{\rho z^2}{2\varepsilon_0}$ dans la couche, puis $V = -\dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}|z| + \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ à l'extérieur.

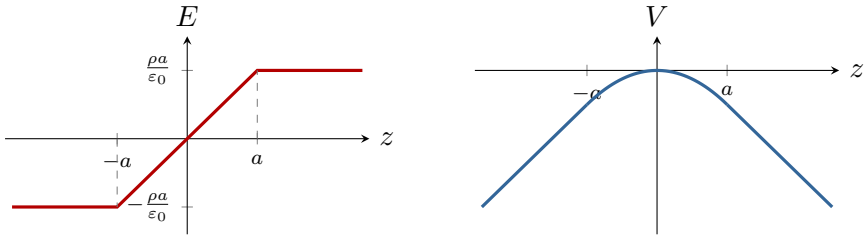


Fig. 3 : Couche plane uniformément chargée : champ continu (rampe puis paliers) et potentiel parabolique puis affine.

Quand $a \to 0$ avec $\sigma = 2\rho a$ fixé, les paliers valent $\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$: on retrouve le plan chargé en surface, dont le champ est discontinu. La discontinuité n'est qu'un artefact du modèle surfacique.

Boule uniformément chargée par l'équation de Poisson D. Pour $V(r)$, l'équation de Poisson s'écrit $\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ pour $r < R$, et 0 pour $r > R$. À l'intérieur, $r^2V' = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + A$ et $A = 0$ pour que $E = -V'$ reste fini en O ; à l'extérieur $V = \frac{C}{r}$ (nul à l'infini). La continuité de E et de V en R donne

$$V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right) \ (r \le R), \qquad V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \ (r \ge R), \qquad \vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r \ (r \le R).$$

Condensateur cylindrique par l'équation de Laplace D. Entre deux armatures coaxiales de rayons $R_1 < R_2$, aux potentiels V_1 et V_2, $V(r)$ vérifie $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$, d'où $V = A\ln r + B$. Avec les conditions aux limites :

$$V(r) = V_2 + (V_1 - V_2)\frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}, \qquad E(r) = \frac{V_1 - V_2}{r\ln(R_2/R_1)}.$$

Le théorème de Gauss sur un cylindre de rayon r et de hauteur h relie E à la charge Q de l'armature interne : $E\,2\pi r h = Q/\varepsilon_0$, d'où la capacité $C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}$.

III.5 Analogie avec la gravitation

Les lois de Coulomb et de Newton ont la même forme : il suffit de remplacer q par m et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$.

Équations locales de la gravitation R

Avec $\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi$ le champ de gravitation et μ la masse volumique :

$$\oiint_\Sigma \vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G\,M_{\text{int}}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{g} = -4\pi G\mu, \qquad \Delta\Phi = 4\pi G\mu$$

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Appliquer $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{PM}$ à une distribution infinie.
- Oublier les constantes d'intégration ou les fixer par une condition qui n'a pas de sens physique (champ infini sur l'axe d'une distribution volumique).
- Écrire $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ donc $\vec{E} = \vec{0}$: dans une région vide, le champ est à flux conservatif, pas nul.
- En gravitation, le signe change : la masse est toujours positive et l'interaction attractive.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Écrantage d'une charge dans un électrolyte ✦✦✧✧✧

Dans une solution ionique, le potentiel créé par un ion de charge $q > 0$ placé en O prend la forme $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\mathrm{e}^{-r/\ell}$, où ℓ est la longueur de Debye et ε la permittivité de l'eau (remplacer ε_0 par ε dans les lois locales).

Q-1) Calculer ΔV pour $r > 0$ et en déduire la densité de charge $\rho(r)$ au voisinage de l'ion.

Q-2) Calculer la charge totale du nuage situé hors de l'origine. Interpréter.

Q-3) Que vaut le champ à grande distance devant ℓ ? Pourquoi parle-t-on d'écrantage ?

Correction

Q-1) $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rV)}{\mathrm{d}r^2} = \frac{1}{r}\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-r/\ell}}{\ell^2} = \frac{V}{\ell^2}$, d'où $\rho = -\varepsilon\Delta V = -\frac{q\,\mathrm{e}^{-r/\ell}}{4\pi\ell^2 r} < 0$.

Q-2) $Q_{\text{nuage}} = \int_0^\infty \rho\, 4\pi r^2 \mathrm{d}r = -\frac{q}{\ell^2}\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r/\ell}\mathrm{d}r = -q$: l'ion attire autour de lui un nuage de charge opposée qui le neutralise exactement.

Q-3) Pour $r \gg \ell$, le potentiel et le champ décroissent exponentiellement : vu de loin, l'ion et son nuage forment un système neutre. La portée de l'interaction coulombienne est réduite à quelques ℓ (de l'ordre du nanomètre en solution concentrée).

EXERCICE 6 Un tunnel à travers la Lune

✦✦✧✧✧

On assimile la Lune à une boule homogène de rayon $R = 1740\,\mathrm{km}$, où la pesanteur à la surface vaut $g_0 = 1{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Q-1) À l'aide de l'équation locale $\operatorname{div}\vec{g} = -4\pi G\mu$ en sphériques, déterminer $\vec{g}(r)$ à l'intérieur de la Lune. Retrouver le résultat par le théorème de Gauss gravitationnel.

Q-2) Un objet est lâché sans vitesse à l'entrée d'un tunnel rectiligne sans frottement traversant la Lune selon un diamètre. Décrire son mouvement et calculer la durée de la traversée.

Q-3) Que change le passage par une corde quelconque ?

Correction

Q-1) $\vec{g} = g(r)\vec{u}_r$ et $\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2 g)}{\mathrm{d}r} = -4\pi G\mu$, d'où $g = -\frac{4\pi G\mu}{3}r$ (constante nulle pour que g reste fini en O). Comme $g(R) = -g_0$: $\vec{g} = -g_0\frac{r}{R}\vec{u}_r$. Gauss : $4\pi r^2 g = -4\pi G\mu\frac{4}{3}\pi r^3$, même résultat.

Q-2) Selon l'axe du tunnel, $\ddot{x} = -\frac{g_0}{R}x$: oscillations harmoniques de pulsation $\omega_0 = \sqrt{g_0/R}$. Durée de la traversée (demi-période) : $\pi\sqrt{R/g_0} = 3{,}26\times10^3\,\mathrm{s} \approx 54\,\mathrm{min}$.

Q-3) Le long d'une corde, la composante utile de $-\frac{g_0}{R}\overrightarrow{OM}$ est $-\frac{g_0}{R}x$, x étant compté depuis le milieu de la corde : même mouvement et **même durée**, quelle que soit la corde.

IV Résolution numérique de l'équation de Laplace

On cherche $V(x,y)$ dans un domaine plan vide de charges, le potentiel étant imposé sur la frontière (problème invariant selon z). On recouvre le domaine d'un maillage carré de pas h et l'on note $V_{i,j} = V(ih, jh)$. Les développements de Taylor à l'ordre 2,

$$V_{i\pm1,j} = V_{i,j} \pm h\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + O(h^3), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2},$$

transforment l'équation $\Delta V = 0$ en une relation algébrique.

Schéma aux différences finies R D

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\right)$$

En chaque nœud intérieur, le potentiel est la moyenne de ses quatre voisins. C'est la version discrète de la propriété de la moyenne des fonctions harmoniques, et l'on comprend pourquoi V ne peut pas avoir d'extremum intérieur.

☞ Méthode — Méthode de relaxation (Jacobi) M

1. Créer un tableau V ; imposer les valeurs sur les frontières (conditions aux limites) ; initialiser les nœuds intérieurs arbitrairement (par exemple à 0).
2. Remplacer chaque valeur intérieure par la moyenne de ses quatre voisines, sans modifier les frontières.
3. Répéter jusqu'à ce que la variation maximale d'une itération à l'autre soit inférieure à une tolérance fixée.
4. Exploiter : équipotentielles (`contour`), champ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ par différences finies (`np.gradient`).

La variante de Gauss-Seidel, qui utilise immédiatement les valeurs déjà mises à jour, converge environ deux fois plus vite.

Programme Python (boîte carrée, paroi supérieure à V_0)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N, V0, tol = 41, 1.0, 1e-6
V = np.zeros((N, N))          # V[j, i] : ligne j (axe y), colonne i (axe x)
V[-1, :] = V0                 # paroi y = L au potentiel V0, les autres a 0
for it in range(50000):
    Vn = V.copy()
    Vn[1:-1, 1:-1] = 0.25*(V[2:, 1:-1] + V[:-2, 1:-1] + V[1:-1, 2:] + V[1:-1, :-2])
    ecart = np.max(np.abs(Vn - V))
    V = Vn
    if ecart < tol:
        break
Ey, Ex = np.gradient(-V)      # composantes du champ (a un facteur 1/h pres)
print(it, V[N//2, N//2])      # le potentiel central tend vers V0/4
plt.contour(V, 15); plt.streamplot(np.arange(N), np.arange(N), Ex, Ey, density=0.8)
plt.gca().set_aspect('equal'); plt.show()
```

Remarque

Le résultat se contrôle par un argument de superposition : si l'on porte successivement chacune des quatre parois à V_0, les autres étant à 0, la somme des quatre solutions vaut V_0 partout (elle vérifie Laplace et vaut V_0 sur tout le bord : unicité). Au centre, les quatre contributions sont égales par symétrie : $V_{\text{centre}} = V_0/4$.

☞ Exercice d'application

EXERCICE 7 Maillage grossier d'une boîte carrée ✦✦✧✧✧

Une boîte de section carrée $[0,L]^2$, infinie selon Oz et vide de charges, a ses parois $x=L$ et $y=L$ au potentiel V_0, les deux autres au potentiel nul. On utilise un maillage de pas $h=L/4$, avec donc 3×3 nœuds intérieurs.

Q-1) Montrer, par superposition, que le potentiel au centre vaut $V_0/2$. Quelle symétrie possède le problème ?

Q-2) On note a, b, c les potentiels des nœuds $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$ de la première ligne, d et e ceux des nœuds $(2,2)$ et $(3,2)$, et f celui du nœud $(3,3)$, le premier indice repérant x ; la symétrie par rapport à la diagonale fournit les autres. Écrire les six équations du schéma et les résoudre.

Q-3) Ces valeurs sont-elles celles du potentiel exact ? Comment améliorer le calcul ?

Correction

Q-1) Le problème est symétrique par rapport à la diagonale $y=x$. Le problème « complémentaire » (parois $x=0$ et $y=0$ à V_0, les autres à 0) a pour solution $V'(x,y)=V(L-x,L-y)$; la somme $V+V'$ vérifie l'équation de Laplace et vaut V_0 sur tout le bord, donc vaut V_0 partout (unicité). Au centre, $V=V'$, d'où $V=\frac{V_0}{2}$. Plus généralement, $V(L-x,L-y)=V_0-V(x,y)$.

Q-2) Avec 0 sur les parois $x=0$, $y=0$ et V_0 sur les parois $x=L$, $y=L$:

$$4a=2b,\quad 4b=a+c+d,\quad 4c=b+e+V_0,\quad 4d=2b+2e,\quad 4e=c+d+f+V_0,\quad 4f=2e+2V_0.$$

La relation $V(L-x,L-y)=V_0-V(x,y)$ donne $c=d=\frac{V_0}{2}$, $e=V_0-b$ et $f=V_0-a$. La deuxième équation devient $4b=\frac{b}{2}+V_0$, d'où

$$a=\frac{V_0}{7},\quad b=\frac{2V_0}{7},\quad c=d=\frac{V_0}{2},\quad e=\frac{5V_0}{7},\quad f=\frac{6V_0}{7}.$$

Vérification sur la cinquième équation : $c+d+f+V_0=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{6}{7}+1\right)V_0=\frac{20}{7}V_0=4e$.

Q-3) Non : le schéma n'est exact qu'aux termes en h^2 près. On raffine le maillage (programme précédent) jusqu'à ce que les valeurs ne changent plus à la précision voulue ; seule la valeur centrale $V_0/2$ est exacte quel que soit le maillage, car elle découle d'une symétrie.

V Lois locales de la magnétostatique

V.1 Conservation du flux magnétique

Équation de Maxwell-Thomson R D

Le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul ; par Ostrogradski, pour tout volume, $\iiint \operatorname{div}\vec{B}\,\mathrm{d}\tau=0$, donc

$$\operatorname{div}\vec{B}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \oiint_{\Sigma}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

Il n'existe pas de « charge magnétique » : les lignes de champ ne partent d'aucun point ; elles se referment ou s'étendent à l'infini. Le flux à travers une surface s'appuyant sur un contour ne dépend que du contour : on peut parler du flux « à travers un circuit » (chapitre EM3).

Remarque

Un champ de divergence nulle est le rotationnel d'un autre champ : il existe un **potentiel vecteur** $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$, défini à un gradient près. Par exemple, $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \wedge \overrightarrow{OM}$ convient pour un champ uniforme $\vec{B}_0$. Le potentiel vecteur sera utilisé avec les équations de Maxwell.

V.2 Forme locale du théorème d'Ampère

Équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire R D

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

Démonstration. Le courant enlacé par Γ est le flux de $\vec{j}$ à travers une surface S s'appuyant sur Γ (et orientée par la main droite). Stokes donne $\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ pour toute surface, d'où l'égalité des intégrandes.

Compatibilité avec la conservation de la charge R

Comme $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = 0$, l'équation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ impose $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$: elle n'est valable qu'en **régime stationnaire** (ou lentement variable). En régime variable quelconque, il faudra lui ajouter le courant de déplacement de Maxwell (chapitre EM4).

V.3 Exemples

Conducteur cylindrique D**.** Un cylindre de rayon a, d'axe Oz, est parcouru par $\vec{j} = j\vec{u}_z$ uniforme. Les symétries (tout plan contenant l'axe est de symétrie, invariances par rotation et translation) imposent $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$, pour lequel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rB)}{\mathrm{d}r}\vec{u}_z$. L'équation locale donne $\frac{\mathrm{d}(rB)}{\mathrm{d}r} = \mu_0 jr$ pour $r < a$ et 0 pour $r > a$; avec B fini sur l'axe et continu en a :

$$B(r) = \frac{\mu_0 jr}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\ (r \le a), \qquad B(r) = \frac{\mu_0 j a^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ (r \ge a).$$

On vérifie que hors du conducteur, le champ du fil infini a un rotationnel nul : les lignes de champ circulaires n'impliquent pas un rotationnel non nul.

Champ au voisinage de l'axe d'une distribution de révolution D**.** Pour des courants orthoradiaux invariants par rotation autour de Oz (spire, bobine), les plans méridiens sont d'antisymétrie : $\vec{B} = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z$. Près de l'axe, on assimile $B_z(r,z)$ à $b(z) = B_z(0,z)$. Alors $\mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + b'(z) = 0$ s'intègre en $rB_r = -\frac{r^2}{2}b'(z)$ (sans constante, B_r étant fini sur l'axe) :

$$B_r(r,z) \approx -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}z}$$

Là où le champ axial décroît, les lignes de champ s'écartent de l'axe : c'est le principe des lentilles magnétiques des microscopes électroniques.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur : en un point d'un plan de symétrie des courants, il est **perpendiculaire** à ce plan (l'inverse de $\vec{E}$).
- Oublier les courants de retour (gaine d'un câble coaxial, seconde nappe) dans le courant enlacé.
- Utiliser $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ en régime rapidement variable.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 8 Conducteur à densité de courant décroissante

✦✦✧✧✧

Un conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a est parcouru par $\vec{j} = j_0\left(1-\frac{r}{a}\right)\vec{u}_z$.

Q-1) Calculer l'intensité totale I.

Q-2) À l'aide de l'équation locale, déterminer $\vec{B}$ en tout point. Vérifier la continuité en $r=a$ et retrouver, à l'extérieur, le champ d'un fil.

Q-3) Pour quelle valeur de r le champ est-il maximal ?

Correction

Q-1) $I = \int_0^a j_0\left(1-\frac{r}{a}\right)2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi j_0\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{3}\right) = \dfrac{\pi j_0 a^2}{3}$.

Q-2) $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}(rB)}{\mathrm{d}r} = \mu_0 j_0\left(r-\frac{r^2}{a}\right)$, d'où $B = \mu_0 j_0\left(\dfrac{r}{2}-\dfrac{r^2}{3a}\right)$ pour $r \le a$ (constante nulle). Pour $r \ge a$, $rB = \text{cte}$; en $r=a$, $B = \frac{\mu_0 j_0 a}{6}$, d'où $B = \dfrac{\mu_0 j_0 a^2}{6r} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Q-3) À l'intérieur, $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r} = \mu_0 j_0\left(\frac{1}{2}-\frac{2r}{3a}\right)$ s'annule pour $r = \frac{3}{4}a$; à l'extérieur B décroît. Le maximum est en $r = \frac{3a}{4}$ et vaut $\frac{3}{16}\mu_0 j_0 a$.

EXERCICE 9 Ce champ peut-il être un champ magnétique ?

✦✧✧✧✧

Dans une région de l'espace, on propose les champs (B_0, a constantes) : $\vec{B}_1 = B_0\dfrac{x}{a}\vec{u}_y$; $\vec{B}_2 = \dfrac{B_0}{a}(y\vec{u}_x + x\vec{u}_y)$; $\vec{B}_3 = \dfrac{B_0}{a}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$.

Q-1) Lesquels peuvent être des champs magnétostatiques ?

Q-2) Pour ceux qui le peuvent, déterminer la densité de courant qui les crée dans la région considérée.

Correction

Q-1) $\operatorname{div}\vec{B}_1 = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$; $\operatorname{div}\vec{B}_2 = 0$; $\operatorname{div}\vec{B}_3 = \dfrac{2B_0}{a} \neq 0$: $\vec{B}_3$ est impossible (il aurait des « sources »).

Q-2) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_1 = \frac{\partial B_y}{\partial x}\vec{u}_z = \dfrac{B_0}{a}\vec{u}_z$: $\vec{j} = \dfrac{B_0}{\mu_0 a}\vec{u}_z$, densité uniforme. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_2 = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z = \vec{0}$: la région est vide de courants ; ce champ « quadrupolaire » est créé par des courants extérieurs (lentilles des accélérateurs de particules).

VI Comparaison des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ statiques

	$\vec{E}$ (électrostatique)	$\vec{B}$ (magnétostatique)
Sources	charges ρ	courants $\vec{j}$
Nature	vecteur polaire	vecteur axial (pseudo-vecteur)
Divergence	$\operatorname{div}\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ (Gauss)	$\operatorname{div}\vec{B}=0$ (flux conservatif)
Rotationnel	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=\vec{0}$ (circulation conservative)	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ (Ampère)
Potentiel	scalaire : $\vec{E}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$	vecteur : $\vec{B}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$
Plan de symétrie des sources	$\vec{E}$ contenu dans le plan	$\vec{B}$ perpendiculaire au plan
Plan d'antisymétrie	$\vec{E}$ perpendiculaire au plan	$\vec{B}$ contenu dans le plan
Lignes de champ	ouvertes, des charges + vers les −	fermées, enlaçant les courants
Surface chargée / nappe de courant	E_N discontinue (σ/ε_0)	B_T discontinue ($\mu_0 j_s$)

Tab. 1 : Propriétés comparées des champs statiques.

Relations de passage (rappelées par les énoncés) R

À la traversée d'une surface portant σ et $\vec{j}_s$, de la région 1 vers la région 2 (normale $\vec{n}_{12}$) :

$$\vec{E}_2-\vec{E}_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}\qquad\qquad \vec{B}_2-\vec{B}_1=\mu_0\,\vec{j}_s\wedge\vec{n}_{12}.$$

La composante tangentielle de $\vec{E}$ et la composante normale de $\vec{B}$ sont continues : ce sont les conséquences locales de $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=\vec{0}$ et de $\operatorname{div}\vec{B}=0$.

VII Synthèse

★ À retenir

- Ostrogradski : $\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$; Stokes : $\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$; ce sont les ponts entre lois intégrales et lois locales.
- Conservation de la charge : $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0$ (bilan 1D à savoir refaire) ; régime stationnaire : $\operatorname{div}\vec{j}=0$, loi des nœuds.
- Électrostatique : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=\vec{0}$, $\vec{E}=-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V$, $\operatorname{div}\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$; Poisson $\Delta V+\rho/\varepsilon_0=0$, Laplace $\Delta V=0$.
- $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{PM}$ pour une distribution bornée seulement ; V défini à une constante près, solution unique à conditions aux limites fixées.
- Numérique : chaque valeur intérieure est la moyenne de ses quatre voisines ; relaxation jusqu'à convergence.
- Gravitation : $\operatorname{div}\vec{g}=-4\pi G\mu$, $\Delta\Phi=4\pi G\mu$.
- Magnétostatique : $\operatorname{div}\vec{B}=0$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ (qui impose $\operatorname{div}\vec{j}=0$) ; près de l'axe, $B_r\approx-\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}z}$.

Pour aller plus loin

Le chapitre EM2 étudie les actions mécaniques d'un champ magnétique sur un circuit (forces de Laplace), le chapitre EM3 l'induction, où apparaît $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: le champ électrique cesse d'être à circulation conservative. Le chapitre EM4 réunit l'ensemble dans les équations de Maxwell.

VIII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 10 Cavité sphérique dans une boule chargée

★★★☆☆

Une boule de centre O_1, de rayon R, porte la densité volumique uniforme ρ, sauf dans une cavité sphérique vide de centre O_2, entièrement intérieure.

Q-1) Montrer, à partir de l'équation de Poisson ou du théorème de Gauss, que le champ d'une boule pleine s'écrit $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}$ à l'intérieur.

Q-2) En déduire le champ dans la cavité. Commenter.

Q-3) Vérifier que ce champ satisfait les équations locales dans la cavité.

Correction

Q-1) Voir le paragraphe III.4 : $E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ radial, soit $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}$.

Q-2) Superposition d'une boule pleine de densité ρ et d'une boule (la cavité) de densité $-\rho$: $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$. Le champ est **uniforme** dans la cavité, parallèle à la droite des centres.

Q-3) Un champ uniforme a une divergence et un rotationnel nuls, conformes à $\rho = 0$ dans la cavité et à $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$.

EXERCICE 11 Modèle de Thomson de l'atome et polarisabilité

★★★☆☆

Dans le modèle de Thomson, la charge $+e$ d'un atome d'hydrogène est répartie uniformément dans une boule de rayon $a = 0{,}60 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$, à l'intérieur de laquelle se déplace l'électron, ponctuel, de masse m.

Q-1) Montrer que l'électron, écarté du centre de $\vec{r}$, subit une force de rappel élastique. Calculer la pulsation propre ω_0 et la longueur d'onde du rayonnement correspondant.

Q-2) On applique un champ uniforme $\vec{E}_0$. Déterminer le déplacement de l'électron à l'équilibre et le moment dipolaire induit $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_0$. Exprimer α, commenter sa dimension et comparer à la valeur mesurée pour l'hydrogène, $\alpha_{\text{exp}} = 8{,}4 \times 10^{-30}\,\mathrm{m}^3$.

Correction

Q-1) Le champ de la boule vaut $\vec{E} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{r}$; la force $-e\vec{E} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{r}$ est élastique. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}} = 3{,}4 \times 10^{16}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, d'où $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega_0} \approx 55\,\mathrm{nm}$ (ultraviolet lointain) : bon ordre de grandeur, mais le modèle n'explique pas le spectre de raies.

Q-2) Équilibre : $-e\vec{E}_0 - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{r} = \vec{0}$, donc $\vec{r} = -\dfrac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{e}\vec{E}_0$ et $\vec{p} = -e\vec{r} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \vec{E}_0$: $\alpha = 4\pi a^3 = 2{,}7\times10^{-30}\,\mathrm{m}^3$, homogène à un volume (le volume atomique). L'ordre de grandeur est correct, la valeur trois fois trop faible : le nuage électronique réel est plus déformable.

EXERCICE 12 Câble coaxial à diélectrique

Un câble coaxial est formé d'une âme de rayon $R_1 = 0{,}45\,\mathrm{mm}$ et d'une gaine de rayon intérieur $R_2 = 1{,}5\,\mathrm{mm}$, séparées par du polyéthylène de permittivité relative $\varepsilon_r = 2{,}3$ (remplacer ε_0 par $\varepsilon_0\varepsilon_r$). L'âme est au potentiel U, la gaine à 0.

Q-1) Résoudre l'équation de Laplace entre les conducteurs et en déduire $\vec{E}$.

Q-2) Calculer la capacité linéique Γ. Retrouver Γ par l'énergie $\iiint \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\Gamma\ell U^2$.

Q-3) Le polyéthylène claque pour $E_d = 20\,\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$. Où le champ est-il maximal ? Quelle tension maximale le câble supporte-t-il ?

Correction

Q-1) $V = A\ln r + B$ avec $V(R_1) = U$ et $V(R_2) = 0$: $V = U\dfrac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}$ et $\vec{E} = \dfrac{U}{r\ln(R_2/R_1)}\vec{u}_r$.

Q-2) Gauss sur un cylindre de longueur ℓ : $\varepsilon_0\varepsilon_r E\,2\pi r\ell = Q$, d'où $\Gamma = \dfrac{Q}{\ell U} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} = 106\,\mathrm{pF\cdot m^{-1}}$. Énergie : $\int_{R_1}^{R_2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\frac{U^2}{r^2\ln^2(R_2/R_1)}2\pi r\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\ell U^2}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{1}{2}\Gamma\ell U^2$.

Q-3) Le champ est maximal au contact de l'âme : $E_{\max} = \dfrac{U}{R_1\ln(R_2/R_1)}$, d'où $U_{\max} = E_d R_1\ln(R_2/R_1) = 10{,}8\,\mathrm{kV}$.

EXERCICE 13 Potentiel et densité d'un nuage électronique

L'électron d'un atome d'hydrogène dans son état fondamental est décrit par la densité de charge $\rho(r) = -\dfrac{e}{\pi a_0^3}\mathrm{e}^{-2r/a_0}$ (a_0 : rayon de Bohr), le proton étant ponctuel en O.

Q-1) Vérifier que la charge totale du nuage vaut $-e$.

Q-2) Calculer la charge $Q(r)$ contenue dans la sphère de rayon r (proton compris), puis le champ $E(r)$.

Q-3) Étudier les comportements pour $r \ll a_0$ et $r \gg a_0$. Interpréter.

Correction

Q-1) $\int_0^\infty \rho\,4\pi r^2\mathrm{d}r = -\dfrac{4e}{a_0^3}\int_0^\infty r^2\mathrm{e}^{-2r/a_0}\mathrm{d}r = -\dfrac{4e}{a_0^3}\cdot\dfrac{2}{(2/a_0)^3} = -e$.

Q-2) Avec $u = 2r/a_0$: $\int_0^r \rho 4\pi r'^2\mathrm{d}r' = -e\left[1-\mathrm{e}^{-u}\left(1+u+\frac{u^2}{2}\right)\right]$, d'où $Q(r) = e\,\mathrm{e}^{-2r/a_0}\left(1+\dfrac{2r}{a_0}+\dfrac{2r^2}{a_0^2}\right)$ et, par Gauss, $E(r) = \dfrac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Q-3) Pour $r \ll a_0$, $Q \approx e$: on retrouve le champ coulombien du proton. Pour $r \gg a_0$, Q décroît exponentiellement : l'atome est neutre vu de loin, son champ est écranté par le nuage.

IX Classiques des concours

EXERCICE 14 Diode à vide et charge d'espace ✦✦✦✦✧

Une diode plane comporte une cathode ($x = 0$, potentiel nul) et une anode ($x = d = 5{,}0\,\text{mm}$, potentiel $V_0 = 250\,\text{V}$), de surface $S = 2{,}0\,\text{cm}^2$, grande devant d^2. La cathode chauffée émet des électrons sans vitesse initiale. En régime permanent, la charge volumique des électrons $\rho(x) < 0$ et la densité de courant $\vec{j} = -j\vec{u}_x$ ($j > 0$) règnent entre les électrodes.

Q-1) Que serait $V(x)$ en l'absence de charge d'espace ?

Q-2) Pourquoi j est-il indépendant de x ? Exprimer la vitesse $v(x)$ d'un électron, puis $\rho(x)$ en fonction de j et de $V(x)$.

Q-3) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = K\,V^{-1/2}$ et exprimer K.

Q-4) Le courant est limité lorsque le champ s'annule sur la cathode. Intégrer l'équation (multiplier par $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$) et montrer que $V(x) = V_0\left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$.

Q-5) En déduire la loi de Child-Langmuir $j = \dfrac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\dfrac{2e}{m}}\,\dfrac{V_0^{3/2}}{d^2}$ et calculer l'intensité. La diode est-elle un dipôle ohmique ?

Correction

Q-1) $\Delta V = \dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = 0$: $V = V_0\frac{x}{d}$, champ uniforme.

Q-2) En régime permanent unidimensionnel, $\operatorname{div}\vec{j} = \dfrac{\mathrm{d}j_x}{\mathrm{d}x} = 0$. Conservation de l'énergie : $\frac{1}{2}mv^2 - eV = 0$, $v = \sqrt{2eV/m}$; $j_x = \rho v = -j$, donc $\rho = -j\sqrt{\dfrac{m}{2eV}}$.

Q-3) Poisson : $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \dfrac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}\,V^{-1/2}$: $K = \dfrac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{m}{2e}}$.

Q-4) $\frac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(V'^2\right) = 2K\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(V^{1/2}\right)$; avec $V(0) = 0$ et $V'(0) = 0$: $V'^2 = 4KV^{1/2}$, $V^{-1/4}\mathrm{d}V = 2\sqrt{K}\,\mathrm{d}x$, d'où $\frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{K}x$: $V \propto x^{4/3}$, et $V(d) = V_0$ fixe la constante.

Q-5) En $x = d$: $K = \dfrac{4V_0^{3/2}}{9d^2}$, donc $j = \varepsilon_0\sqrt{\dfrac{2e}{m}}K = \dfrac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\dfrac{2e}{m}}\dfrac{V_0^{3/2}}{d^2}$. Avec $\sqrt{2e/m} = 5{,}93\times10^5\,\text{SI}$: $j = 369\,\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$, $I = jS = 74\,\text{mA}$. La caractéristique $I \propto V_0^{3/2}$ n'est pas linéaire : la diode n'est pas ohmique.

EXERCICE 15 Effet Meissner et pression magnétique

★★★★☆

Un supraconducteur occupe le demi-espace $x > 0$; le vide ($x < 0$) contient un champ magnétique tangent à la surface, $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. Dans le matériau, on admet les équations de la magnétostatique et l'équation de London $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = -\dfrac{\vec{B}}{\mu_0\lambda^2}$. Les champs ne dépendent que de x et sont continus en $x = 0$. Données : plomb, $\lambda = 37\,\text{nm}$; $B_0 = 50\,\text{mT}$.

Q-1) Montrer que $\vec{\Delta}\vec{B} = \dfrac{\vec{B}}{\lambda^2}$ dans le supraconducteur (utiliser $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$).

Q-2) Montrer que $B_x = 0$, puis déterminer $B_z(x)$. Calculer B/B_0 à $0{,}2\,\mu\text{m}$ de la surface. Conclure.

Q-3) Déterminer $\vec{j}$ dans le matériau et le courant total par unité de largeur. Que devient la distribution si $\lambda \to 0$?

Q-4) La densité volumique de force de Laplace est $\vec{j} \wedge \vec{B}$ (chapitre EM2). Calculer la force par unité de surface et l'interpréter comme une pression. Application numérique et application pratique.

Correction

Q-1) $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{B}) - \vec{\Delta}\vec{B} = -\vec{\Delta}\vec{B}$, et $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = -\vec{B}/\lambda^2$.

Q-2) $\text{div}\,\vec{B} = B_x'(x) = 0$: B_x uniforme ; la composante x de l'équation donne $0 = B_x/\lambda^2$. Pour B_z : $B_z'' = B_z/\lambda^2$, solution bornée $B_z = B_0\text{e}^{-x/\lambda}$. À $0{,}2\,\mu\text{m}$: $B/B_0 = \text{e}^{-5{,}4} = 4{,}5\times10^{-3}$. Le champ est expulsé du matériau massif : c'est l'**effet Meissner**.

Q-3) $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\text{d}B_z}{\text{d}x}\vec{u}_y = \dfrac{B_0}{\mu_0\lambda}\text{e}^{-x/\lambda}\vec{u}_y$; par unité de largeur, $\int_0^\infty j\,\text{d}x = \dfrac{B_0}{\mu_0}$. Quand $\lambda \to 0$, nappe surfacique $\vec{j}_s = \dfrac{B_0}{\mu_0}\vec{u}_y$; on vérifie $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = -B_0\vec{u}_z = \mu_0\vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$.

Q-4) $\vec{j} \wedge \vec{B} = \dfrac{B_0^2}{\mu_0\lambda}\text{e}^{-2x/\lambda}\vec{u}_x$, d'où, par unité de surface, $\dfrac{B_0^2}{2\mu_0}\vec{u}_x$: le champ exerce une **pression magnétique** $\frac{B_0^2}{2\mu_0} = 1{,}0\times10^3\,\text{Pa}$ qui repousse le supraconducteur. C'est le principe de la lévitation d'un aimant au-dessus d'un supraconducteur refroidi.