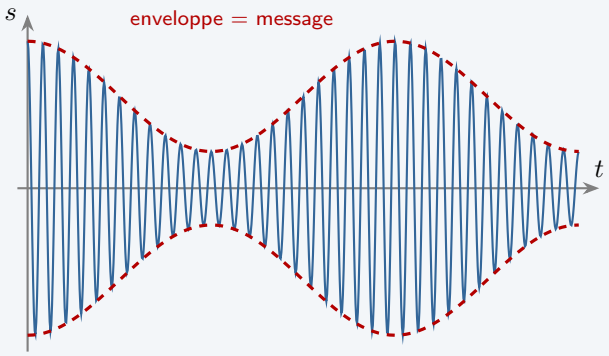
LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

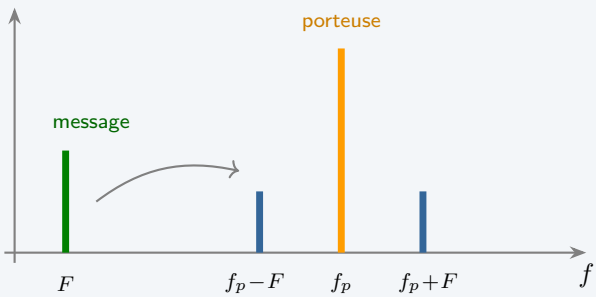
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

E4 ÉLECTRONIQUE

Modulation et démodulation d'amplitude

Transmettre une information — Modulations d'amplitude, de fréquence, de phase — Multiplieur analogique — Taux de modulation, spectre d'un signal modulé — Détection d'enveloppe — Démodulation synchrone





« *Le problème fondamental de la communication est de reproduire en un point, exactement ou approximativement, un message choisi en un autre point.*

— Claude E. Shannon, « A Mathematical Theory of Communication », *Bell System Technical Journal* (1948)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Modulation d'amplitude »

E4 — Modulation

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Expliquer l'intérêt de la modulation pour transmettre un signal ; définir les modulations d'amplitude, de fréquence et de phase ; connaître les ordres de grandeur des fréquences de la radio AM, FM et de la téléphonie mobile.
- Connaître le schéma et la relation de fonctionnement $v_s = k v_{e1} v_{e2}$ du multiplieur ; prévoir le spectre du produit de deux signaux.
- Réaliser une modulation d'amplitude à l'aide d'un multiplieur ; définir et mesurer le taux de modulation ; décrire le spectre d'un signal modulé et sa largeur de bande.
- Justifier la nécessité d'une opération non linéaire pour démoduler.
- Expliquer la démodulation par détection d'enveloppe, dimensionner le circuit et discuter l'influence du taux de modulation.
- Expliquer le principe de la démodulation (détection) synchrone et choisir le filtre associé.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Modulation d'amplitude » permet de régler la porteuse, le message et le taux de modulation, d'observer le signal modulé et son spectre, puis de le démoduler par détection d'enveloppe (choix de RC) ou par détection synchrone (choix du déphasage de la porteuse locale).
Prérequis : **E1** (spectre), **E2** (filtrage, non-linéarité). Les aspects expérimentaux sont traités en TP. Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours terminent le chapitre.

Table des matières

Introduction . . . 3
I Transmettre une information . . . 3
I.1 Pourquoi moduler ? . . . 3
I.2 Les trois types de modulation . . . 3
II Le multiplieur analogique . . . 4
II.1 Schéma et relation de fonctionnement . . . 4
II.2 Produit de deux sinusoïdes . . . 5
III Modulation d'amplitude . . . 6
III.1 Modulation à porteuse supprimée . . . 6
III.2 Modulation à porteuse conservée, taux de modulation . . . 6
III.3 Spectre du signal modulé . . . 7
IV Démodulation d'amplitude . . . 8
IV.1 Nécessité d'une opération non linéaire . . . 8
IV.2 Démodulation par détection d'enveloppe . . . 9
IV.3 Démodulation synchrone . . . 9
V Activité numérique : modulation et détection synchrone . . . 11
VI Synthèse . . . 12
VII Exercices d'approfondissement . . . 12
VIII Classiques des concours . . . 14

Introduction

Une émission de radio, un appel téléphonique, une connexion Wi-Fi transportent une information (la voix, de la musique, des données) sous la forme d'une onde électromagnétique. Le message, de basse fréquence, ne peut pas être émis tel quel : on l'**imprime** sur une onde sinusoïdale de haute fréquence, la **porteuse**. C'est la **modulation**. Le récepteur doit ensuite extraire le message : c'est la **démodulation**. Ce chapitre étudie la plus simple des techniques, la modulation d'amplitude, réalisée avec un composant non linéaire : le **multiplieur**. Il fait le lien entre l'électronique et la propagation des ondes électromagnétiques.

I Transmettre une information

I.1 Pourquoi moduler ?

Le signal électrique issu d'un microphone occupe la bande $20\,\text{Hz}$–$20\,\text{kHz}$. L'émettre directement sous forme d'onde électromagnétique se heurte à trois obstacles :

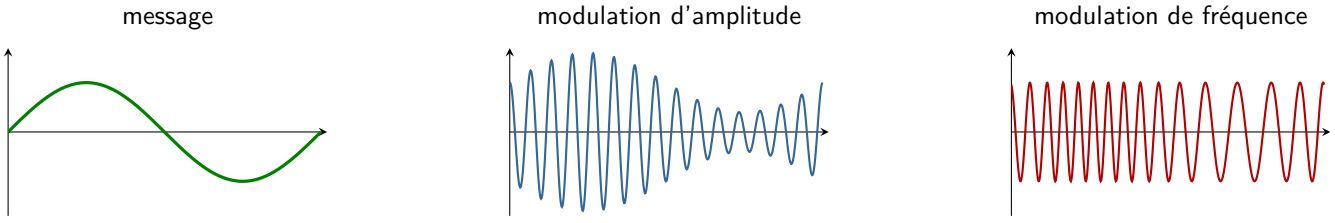
- **la taille des antennes** : une antenne efficace a une longueur de l'ordre d'une fraction de la longueur d'onde ($\lambda/4$ ou $\lambda/2$) ; à $1\,\text{kHz}$, $\lambda = c/f = 300\,\text{km}$;
- **le partage du canal** : toutes les stations émettraient dans la même bande et se brouilleraient ; en décalant chaque message autour d'une porteuse différente, on réalise un **multiplexage fréquentiel** ;
- **la propagation** : l'atmosphère, l'ionosphère, un câble ou une fibre optique ne transmettent bien que certaines bandes de fréquences (ainsi l'ionosphère réfléchit les ondes de fréquence inférieure à quelques MHz et laisse passer les ondes de plus haute fréquence, utilisées pour les satellites).

I.2 Les trois types de modulation

Définition — Porteuse, modulante, signal modulé R

La **porteuse** est une sinusoïde $p(t) = A_p\cos(\omega_p t + \varphi_p)$ de haute fréquence f_p. La **modulante** (ou message) $m(t)$ contient l'information ; son spectre est borné par $F_{\max} \ll f_p$. Le **signal modulé** est une sinusoïde dont l'un des paramètres suit lentement $m(t)$:

- **modulation d'amplitude** (AM) : l'amplitude $A(t) = A_0\big[1 + k_a m(t)\big]$ varie avec le message ;
- **modulation de fréquence** (FM) : la fréquence instantanée $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = f_p + k_f m(t)$ varie avec le message ;
- **modulation de phase** (PM) : la phase $\psi(t) = \omega_p t + k_p m(t)$ contient le message.



En AM, l'enveloppe reproduit le message ; en FM, l'amplitude est constante et les oscillations se resserrent quand le message est positif.

Ordres de grandeur

Radio AM : grandes ondes / petites ondes	150 kHz–280 kHz / 530 kHz–1,6 MHz ; canaux espacés de 9 kHz
Radio FM	88 MHz–108 MHz ; canaux espacés de 200 kHz
Télévision numérique terrestre	470 MHz–790 MHz
Téléphonie mobile (2G à 5G)	de 700 MHz à 3,5 GHz
Wi-Fi, Bluetooth	2,4 GHz et 5 GHz
Fibre optique	$\lambda = 1{,}55\,\mu\text{m}$, soit $f \approx 193\,\text{THz}$

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Antennes et canaux ✦✧✧✧✧

Q-1) Calculer la longueur d'une antenne quart d'onde pour 1 kHz, pour une station PO à 1 MHz, pour la FM à 100 MHz et pour un téléphone à 900 MHz.

Q-2) En AM, chaque station occupe une bande de 9 kHz. Combien de stations peut-on loger dans la bande PO de 531 kHz à 1602 kHz ?

Correction

Q-1) $\lambda/4 = c/(4f)$: 75 km ; 75 m ; 75 cm ; 8,3 cm. Seules les hautes fréquences permettent des antennes de taille raisonnable.

Q-2) $(1602 - 531)/9 = 119$ intervalles, soit 120 canaux (porteuses aux multiples de 9 kHz de 531 à 1602 kHz).

II Le multiplieur analogique

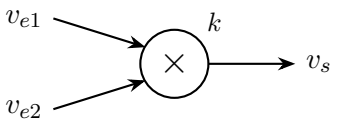
II.1 Schéma et relation de fonctionnement

Définition — Multiplieur R

Le **multiplieur** est un circuit intégré (par exemple AD633) à deux entrées, de sortie référencée à la masse :

$$v_s(t) = k\, v_{e1}(t)\, v_{e2}(t) \qquad k \approx 0{,}1\ \text{V}^{-1}$$

Comme l'ALI, il est alimenté (par exemple en ± 15 V) ; ses courants d'entrée sont négligeables, sa sortie est limitée à ± 10 V environ et sa bande passante est de quelques MHz.



Symbole du multiplieur

II.2 Produit de deux sinusoïdes

Fréquences somme et différence R D

Le produit de deux sinusoïdes de fréquences f_1 et f_2 est la somme de deux sinusoïdes de fréquences f_1+f_2 et $|f_1-f_2|$:

$$kE_1\cos(\omega_1 t)\,E_2\cos(\omega_2 t+\varphi)=\frac{kE_1E_2}{2}\Big[\cos\big((\omega_1+\omega_2)t+\varphi\big)+\cos\big((\omega_2-\omega_1)t+\varphi\big)\Big]$$

Le multiplieur fait donc apparaître des fréquences absentes des entrées : c'est un composant **non linéaire** au sens de **E2**.

Démonstration. C'est la formule trigonométrique $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\big]$.

Remarque

Si l'une des entrées est une tension constante E, la sortie $kE\,v_{e2}$ est proportionnelle à l'autre : le multiplieur se comporte en amplificateur de gain kE commandé par une tension. Si les deux entrées reçoivent le même signal $E\cos\omega t$, il fonctionne en **quadrateur** : $v_s=\frac{kE^2}{2}(1+\cos 2\omega t)$, ce qui double la fréquence et fait apparaître une composante continue.

☞ Méthode — Mesurer une valeur efficace vraie avec un multiplieur M

On élève le signal au carré (quadrateur), on en prend la valeur moyenne (passe-bas moyenneur, **E2**), puis la racine carrée (second multiplieur placé dans la boucle de contre-réaction d'un ALI) : la sortie vaut $\sqrt{\langle e^2\rangle}=E_{\text{eff}}$, quelle que soit la forme du signal. C'est le principe des voltmètres TRMS (**E1**).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 — **Produit de deux tensions** ✦✦✧✧✧

Un multiplieur ($k=0{,}1\,\text{V}^{-1}$) reçoit $v_1=2\cos(2\pi f_1 t)$ et $v_2=5\cos(2\pi f_2 t)$ (en volts) avec $f_1=1{,}0\,\text{kHz}$ et $f_2=1{,}1\,\text{kHz}$.

Q-1) Donner le spectre de la sortie.

Q-2) Décrire l'allure de v_s observée à l'oscilloscope.

Q-3) On applique ensuite v_1 sur les deux entrées. Spectre de la sortie ?

Correction

Q-1) $v_s=0{,}5\cos(2\pi\times 2100\,t)+0{,}5\cos(2\pi\times 100\,t)$: deux raies de $0{,}5\,\text{V}$ à $100\,\text{Hz}$ et $2{,}1\,\text{kHz}$.

Q-2) Vue comme $v_s=\big[\cos(2\pi f_1 t)\big]\times\cos(2\pi f_2 t)$: une oscillation à $1{,}1\,\text{kHz}$ dont l'amplitude suit $|\cos(2\pi f_1 t)|$; vue comme une somme : une sinusoïde à $2{,}1\,\text{kHz}$ superposée à une sinusoïde lente à $100\,\text{Hz}$.

Q-3) $v_s=0{,}1\times 4\cos^2(2\pi f_1 t)=0{,}2+0{,}2\cos(2\pi\times 2000\,t)$: composante continue $0{,}2\,\text{V}$ et raie de $0{,}2\,\text{V}$ à $2\,\text{kHz}$.

III Modulation d'amplitude

III.1 Modulation à porteuse supprimée

Produit modulante × porteuse R D

Le multiplieur reçoit la modulante $u_m(t) = U_m\cos(\Omega t)$ ($F = \Omega/2\pi$) et la porteuse $p(t) = A_p\cos(\omega_p t)$, avec $\Omega \ll \omega_p$:

$$s(t) = kA_pU_m\cos(\Omega t)\cos(\omega_p t) = \frac{kA_pU_m}{2}\Big[\cos\big((\omega_p-\Omega)t\big) + \cos\big((\omega_p+\Omega)t\big)\Big]$$

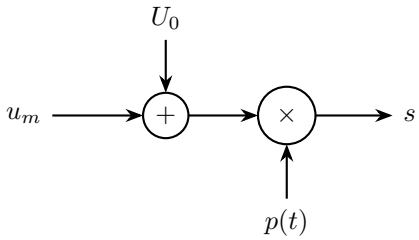
Le spectre ne contient que deux raies, à $f_p - F$ et $f_p + F$: la porteuse elle-même est absente.

L'enveloppe du signal, $|kA_pU_m\cos\Omega t|$, ne reproduit pas le message (elle est toujours positive, et la porteuse change de signe à chaque passage du message par 0) : on ne pourra pas démoduler par simple détection d'enveloppe (§IV).

III.2 Modulation à porteuse conservée, taux de modulation

On ajoute au message une tension continue U_0 avant de le multiplier par la porteuse :

$$s(t) = kA_p\big[U_0 + U_m\cos(\Omega t)\big]\cos(\omega_p t).$$

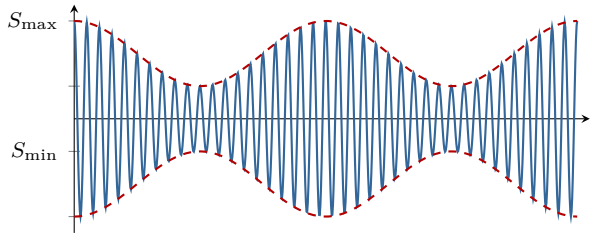


Signal modulé en amplitude R

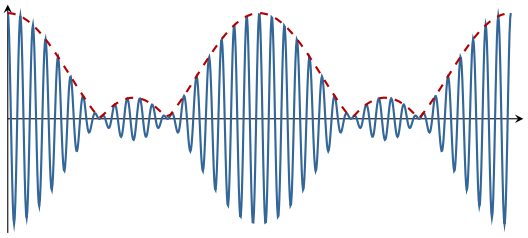
$$s(t) = S_0\big[1 + m\cos(\Omega t)\big]\cos(\omega_p t) \qquad S_0 = kA_pU_0 \qquad m = \frac{U_m}{U_0}$$

m est le **taux** (ou indice) **de modulation**. Si $m < 1$, l'amplitude $S_0(1 + m\cos\Omega t)$ reste positive : l'**enveloppe** du signal reproduit le message, à une constante près. Si $m > 1$, il y a **surmodulation** : l'enveloppe ne reproduit plus le message.

$m = 0{,}5$



$m = 1{,}5$: surmodulation



☞ **Méthode — Mesurer le taux de modulation** M D

► **Sur l'oscillogramme** ($m < 1$) : l'amplitude varie entre $S_{max} = S_0(1+m)$ et $S_{min} = S_0(1-m)$,

d'où

$$m = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{S_{\max} + S_{\min}}$$

- **Méthode du trapèze** : en mode XY (signal modulé en Y, modulante en X), on obtient un trapèze pour $m < 1$, un triangle pour $m = 1$, deux triangles opposés par le sommet pour $m > 1$; m se lit sur les côtés parallèles.
- **Sur le spectre** : rapport des raies latérales à la porteuse, $m/2$ (§III.3).

III.3 Spectre du signal modulé

Spectre AM R D

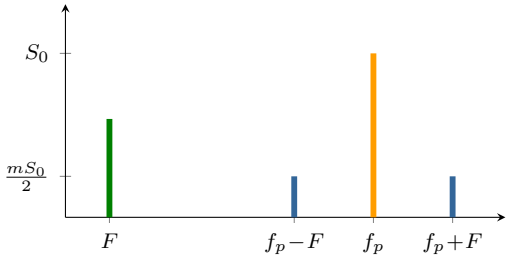
$$s(t) = S_0 \cos(\omega_p t) + \frac{mS_0}{2} \cos\big((\omega_p - \Omega)t\big) + \frac{mS_0}{2} \cos\big((\omega_p + \Omega)t\big)$$

Trois raies : la **porteuse** à f_p et deux **raies latérales** à $f_p \pm F$. Pour un message de spectre $[F_{\min}, F_{\max}]$, chaque raie du message donne deux raies latérales : le spectre modulé comporte deux **bandes latérales**, symétriques par rapport à f_p, et occupe la bande

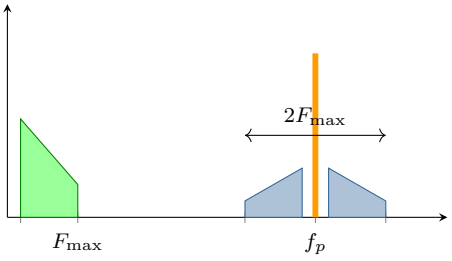
$$[f_p - F_{\max},\ f_p + F_{\max}] \qquad \text{de largeur} \quad B = 2F_{\max}$$

Démonstration. On développe $S_0 m \cos(\Omega t)\cos(\omega_p t)$ en somme de cosinus.

Message sinusoïdal



Message à spectre étendu



Remarque

Puissance. La puissance moyenne étant proportionnelle à la somme des carrés des amplitudes divisés par 2 (Parseval), la fraction de puissance portée par les raies latérales, qui seules contiennent l'information, vaut $\dfrac{m^2/2}{1 + m^2/2} = \dfrac{m^2}{2 + m^2}$, au plus $1/3$ pour $m = 1$. La porteuse consomme l'essentiel de la puissance : c'est le prix d'une démodulation simple. La modulation à porteuse supprimée, ou à bande latérale unique (BLU), est plus économe, mais exige une démodulation synchrone.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Lire un oscillogramme AM

L'enveloppe d'un signal modulé par une sinusoïde varie entre $2{,}5\,\mathrm{V}$ et $7{,}5\,\mathrm{V}$; sur $4\,\mathrm{ms}$, on compte 2 périodes de l'enveloppe et 50 oscillations de la porteuse.

Q-1) Calculer m, S_0, F et f_p.

Q-2) Représenter le spectre (fréquences et amplitudes).

Q-3) Quelle fraction de la puissance est portée par les raies latérales ?

Correction

Q-1) $m = \dfrac{7{,}5-2{,}5}{7{,}5+2{,}5} = 0{,}50$; $S_0 = \dfrac{7{,}5+2{,}5}{2} = 5{,}0\,\mathrm{V}$; $F = 2/4\,\mathrm{ms} = 500\,\mathrm{Hz}$; $f_p = 50/4\,\mathrm{ms} = 12{,}5\,\mathrm{kHz}$.

Q-2) $5{,}0\,\mathrm{V}$ à $12{,}5\,\mathrm{kHz}$; $mS_0/2 = 1{,}25\,\mathrm{V}$ à $12{,}0\,\mathrm{kHz}$ et à $13{,}0\,\mathrm{kHz}$.

Q-3) $\dfrac{m^2}{2+m^2} = \dfrac{0{,}25}{2{,}25} = 11\,\%$.

EXERCICE 4 Encombrement d'une station

Une station AM émet sur $f_p = 702\,\mathrm{kHz}$ un programme parlé et musical dont le spectre, après filtrage, s'étend de $50\,\mathrm{Hz}$ à $4{,}5\,\mathrm{kHz}$.

Q-1) Quelle bande occupe-t-elle ? Justifier l'espacement de $9\,\mathrm{kHz}$ entre stations.

Q-2) La même station veut diffuser de la musique de qualité ($F_{\max} = 15\,\mathrm{kHz}$). Est-ce compatible avec le plan de fréquences AM ? Pourquoi la FM convient-elle mieux ?

Correction

Q-1) $[697{,}5\,;\,706{,}5]$ kHz, largeur $2F_{\max} = 9\,\mathrm{kHz}$: des porteuses espacées de $9\,\mathrm{kHz}$ donnent des bandes jointives sans recouvrement.

Q-2) Il faudrait $30\,\mathrm{kHz}$ par station, plus de trois canaux AM. La bande FM, beaucoup plus haute en fréquence, offre des canaux de $200\,\mathrm{kHz}$: la largeur relative B/f_p reste faible.

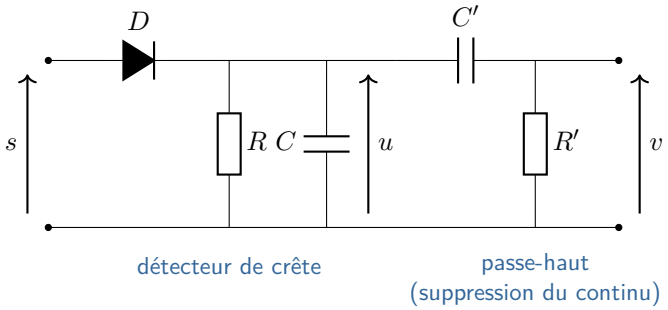
IV Démodulation d'amplitude

IV.1 Nécessité d'une opération non linéaire

Démoduler exige une non-linéarité R

Le spectre du signal modulé ne contient que des fréquences voisines de f_p ; le message, lui, est à la fréquence $F \ll f_p$. Un filtre linéaire ne crée aucune fréquence (**E2**) : il ne peut pas faire apparaître F. La démodulation nécessite un dispositif **non linéaire** : une diode (détection d'enveloppe) ou un multiplieur (détection synchrone).

IV.2 Démodulation par détection d'enveloppe



Fonctionnement (diode idéale). Lorsque s dépasse u, la diode conduit : le condensateur se charge et u suit s jusqu'à la crête. Dès que s redescend sous u, la diode se bloque : le condensateur se décharge dans R, et u décroît exponentiellement avec la constante de temps $\tau = RC$, jusqu'à la crête suivante. La tension u suit ainsi les crêtes de s, c'est-à-dire son enveloppe $S_0(1 + m\cos\Omega t)$.

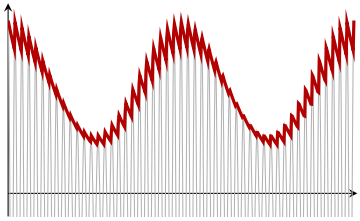
Condition de bon fonctionnement R

$$T_p = \frac{1}{f_p} \ll \tau = RC \ll T_m = \frac{1}{F} \qquad \text{et} \qquad m < 1$$

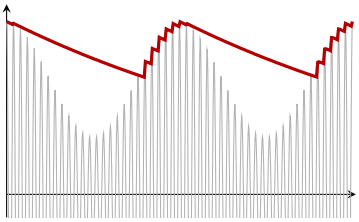
- τ trop faible : u retombe entre deux crêtes et suit les alternances positives de la porteuse (forte ondulation à f_p) ;
- τ trop grand : u ne peut pas redescendre aussi vite que l'enveloppe : **décrochage** ; ce défaut est d'autant plus marqué que m est proche de 1 ;
- $m > 1$: l'enveloppe ne reproduit pas le message, le résultat est déformé.

Le passe-haut $R'C'$ $(1/(R'C') \ll \Omega)$ élimine ensuite la composante continue S_0 ; un passe-bas peut parfaire l'élimination de l'ondulation résiduelle.

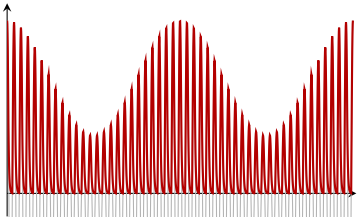
τ adapté



τ trop grand : décrochage

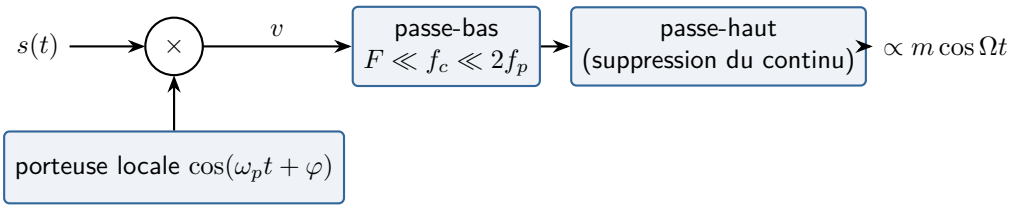


τ trop faible



Tension u en sortie du détecteur de crête (rouge) pour $m = 0{,}5$ et $f_p = 25F$: $\tau = 0{,}2\,T_m$, $\tau = 2\,T_m$, $\tau = 0{,}1\,T_p$ (simulation numérique, diode idéale).

IV.3 Démodulation synchrone



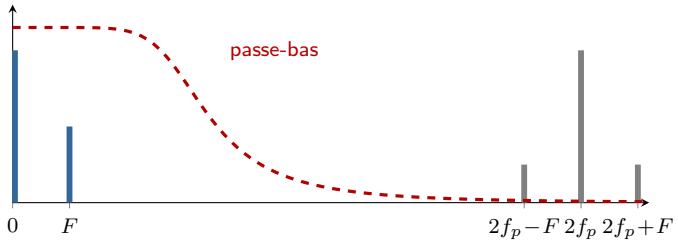
Principe de la détection synchrone R D

On multiplie le signal reçu par une porteuse locale **de même fréquence** que la porteuse, puis on filtre. Avec $s = S_0(1 + m\cos\Omega t)\cos(\omega_p t)$ et une porteuse locale $A_\ell\cos(\omega_p t + \varphi)$:

$$v(t) = \frac{kA_\ell S_0}{2}(1 + m\cos\Omega t)\Big[\cos\varphi + \cos(2\omega_p t + \varphi)\Big]$$

Le spectre de v comprend une partie basse fréquence (0 et F) et une partie centrée sur $2f_p$ ($2f_p$ et $2f_p \pm F$). Un passe-bas de fréquence de coupure $F \ll f_c \ll 2f_p - F$ ne conserve que $\frac{kA_\ell S_0}{2}\cos\varphi\,(1 + m\cos\Omega t)$, puis un passe-haut supprime la constante : on récupère le message.

Démonstration. $\cos(\omega_p t)\cos(\omega_p t + \varphi) = \frac{1}{2}\big[\cos\varphi + \cos(2\omega_p t + \varphi)\big]$.



Spectre de v (cas $\varphi = 0$) : le passe-bas conserve les raies à 0 et F et élimine le groupe centré sur $2f_p$.

Avantages et exigences R

- La détection synchrone fonctionne **quel que soit** m, même en surmodulation, et pour la modulation à porteuse supprimée.
- Elle exige une porteuse locale **synchrone** : un déphasage φ atténue le message d'un facteur $\cos\varphi$ (il disparaît pour $\varphi = \pi/2$) ; un léger écart de fréquence δf le module par $\cos(2\pi\,\delta f\,t)$ (évanouissement périodique). En pratique, on reconstruit la porteuse à partir du signal reçu par une **boucle à verrouillage de phase**.

Remarque

La détection synchrone sert aussi en mesure (amplificateur « à verrouillage », *lock-in*) : en modulant une expérience à une fréquence connue et en multipliant la réponse par une référence synchrone, on extrait un signal mille fois plus faible que le bruit, car seul le signal synchrone donne une composante continue après filtrage.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 Dimensionner un détecteur de crête ✦✦✧✧✧

Un récepteur PO reçoit une porteuse de $1\,\mathrm{MHz}$ modulée par un message dont les fréquences atteignent $F_{\max} = 4{,}5\,\mathrm{kHz}$, avec un taux $m \leq 0{,}8$. On admet que le décrochage est évité si $RC\,\Omega_{\max} \leq \dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$ (exercice d'approfondissement).

Q-1) Encadrer RC.

Q-2) Proposer C pour $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et estimer l'ondulation relative résiduelle à la fréquence f_p.

Correction

Q-1) $T_p = 1\,\mu\text{s} \ll RC$ et $RC \leq \dfrac{0{,}6}{0{,}8 \times 2\pi \times 4500} = 26{,}5\,\mu\text{s}$.

Q-2) $RC = 20\,\mu\text{s}$: $C = 2\,\text{nF}$ (valeur normalisée $2{,}2\,\text{nF}$, soit $RC = 22\,\mu\text{s}$, encore convenable). Entre deux crêtes, u décroît d'environ $T_p/RC \approx 5\,\%$: ondulation à $1\,\text{MHz}$ facile à filtrer.

EXERCICE 6 Défauts de la porteuse locale

Un signal $s = S_0(1 + m\cos\Omega t)\cos(\omega_p t)$ est démodulé par détection synchrone ($k = 0{,}1\,\text{V}^{-1}$, porteuse locale d'amplitude $10\,\text{V}$).

Q-1) Exprimer le signal en sortie du passe-bas si la porteuse locale est déphasée de $\varphi = 60°$, puis de $90°$.

Q-2) La porteuse locale a une fréquence $f_p + \delta f$, avec $\delta f = 0{,}5\,\text{Hz}$. Qu'entend l'auditeur ?

Q-3) Le signal reçu est à porteuse supprimée, $s = S_1\cos(\Omega t)\cos(\omega_p t)$. Peut-on le démoduler par détection d'enveloppe ? par détection synchrone ?

Correction

Q-1) $\dfrac{kA_\ell S_0}{2}\cos\varphi\,(1 + m\cos\Omega t) = \dfrac{S_0}{2}\cos\varphi\,(1 + m\cos\Omega t)$: le message est divisé par 2 pour $60°$ et disparaît pour $90°$.

Q-2) $\cos(\omega_p t)\cos\big((\omega_p + 2\pi\delta f)t\big)$ contient $\frac{1}{2}\cos(2\pi\delta f\, t)$: le message est multiplié par $\cos(\pi t)$; il s'évanouit et réapparaît (avec inversion de signe) deux fois par seconde.

Q-3) Détection d'enveloppe : non, l'enveloppe $|S_1\cos\Omega t|$ est un signal redressé, de fréquence $2F$. Détection synchrone : oui, on obtient $\dfrac{S_1}{2}\cos\Omega t$ directement (pas de composante continue à supprimer).

V Activité numérique : modulation et détection synchrone

Python : signal AM, spectre et démodulation synchrone

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fe = 1e6; Te = 1/fe                          # echantillonnage (simulation)
t = np.arange(0, 0.02, Te)
fp, F, m, S0 = 50e3, 500, 0.6, 1.0           # porteuse, message, taux
s = S0*(1 + m*np.cos(2*np.pi*F*t))*np.cos(2*np.pi*fp*t)

v = s*np.cos(2*np.pi*fp*t)                   # multiplication par la porteuse locale
fc = 5e3; tau = 1/(2*np.pi*fc)               # passe-bas d'ordre 1 (Euler implicite, E3)
w = np.zeros_like(v)
for k in range(1, len(v)):
    w[k] = (tau*w[k-1] + Te*v[k])/(tau + Te)

freq = np.fft.rfftfreq(len(s), Te)
S = 2*abs(np.fft.rfft(s))/len(s)
fig, (a1, a2) = plt.subplots(2, 1)
a1.plot(t*1e3, s, t*1e3, 2*w); a1.set_xlabel("t (ms)")
a2.plot(freq/1e3, S); a2.set_xlim(45, 55); a2.set_xlabel("f (kHz)")
plt.show()
```

Pistes : passer à $m = 1{,}5$ et comparer avec un détecteur de crête simulé ; introduire un déphasage ou un écart de fréquence de la porteuse locale ; remplacer le premier ordre par un filtre plus sélectif pour réduire l'ondulation à $2f_p$.

VI Synthèse

★ À retenir

- Moduler : imprimer un message ($F_{\max}$) sur une porteuse ($f_p \gg F_{\max}$) pour réduire la taille des antennes, multiplexer, s'adapter au canal. AM, FM, PM.
- Multiplieur : $v_s = k v_{e1} v_{e2}$, $k \approx 0{,}1\,\mathrm{V}^{-1}$; produit de sinusoïdes $\Rightarrow$ fréquences $f_1 + f_2$ et $|f_1 - f_2|$.
- AM : $s = S_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_p t$, $m = U_m/U_0 = \dfrac{S_{\max} - S_{\min}}{S_{\max} + S_{\min}}$; raies f_p (S_0) et $f_p \pm F$ ($mS_0/2$) ; bande $2F_{\max}$.
- Démodulation : opération non linéaire obligatoire.
- Détection d'enveloppe : diode + RC, $T_p \ll RC \ll T_m$, $m < 1$, puis suppression du continu.
- Détection synchrone : $\times \cos(\omega_p t + \varphi)$ puis passe-bas $F \ll f_c \ll 2f_p$; facteur $\cos\varphi$; tout m, porteuse supprimée possible.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Erreurs classiques : oublier que la porteuse supprimée n'a pas d'enveloppe exploitable ; calculer m avec les valeurs crête à crête au lieu des amplitudes (le rapport est le même, mais pas S_0) ; écrire les raies latérales d'amplitude mS_0 au lieu de $mS_0/2$; croire qu'un filtre peut démoduler ; choisir la coupure du passe-bas de la détection synchrone au-dessus de $2f_p - F$.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 7 Condition de non-décrochage du détecteur de crête

★★★☆☆

Le détecteur de crête reçoit $s = S_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_p t$; on suppose $T_p \ll RC$ et on assimile u à l'enveloppe $e(t) = S_0(1 + m\cos\Omega t)$ tant qu'il n'y a pas décrochage.

Q-1) Pendant la décharge, quelle est la pente de u ? Montrer que u peut suivre l'enveloppe si $-\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \leq \dfrac{e}{RC}$ à tout instant.

Q-2) En déduire la condition $RC\,\Omega\,\dfrac{m\sin\Omega t}{1 + m\cos\Omega t} \leq 1$ pour tout t, puis montrer que le maximum du membre de gauche vaut $\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}} RC\,\Omega$.

Q-3) Application : $F = 5\,\mathrm{kHz}$, $m = 0{,}5$. Valeur maximale de RC ? Et pour $m = 0{,}95$?

Correction

Q-1) Décharge dans R : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u}{RC}$. Pour suivre l'enveloppe quand elle décroît, il faut que u puisse descendre au moins aussi vite : $\left|\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right| \leq \dfrac{e}{RC}$.

Q-2) $-\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = S_0 m\Omega \sin\Omega t$, d'où la condition. On pose $g(x) = \dfrac{m\sin x}{1+m\cos x}$; $g'(x) = 0$ pour $m\cos x(1+m\cos x)+m^2\sin^2 x = 0$, soit $\cos x = -m$, où $g = \dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2} = \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$. Condition : $RC\,\Omega \le \dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$.

Q-3) $m = 0{,}5$: $RC \le \dfrac{0{,}866}{0{,}5\times 2\pi\times 5000} = 55\,\mu\text{s}$. $m = 0{,}95$: $RC \le \dfrac{0{,}312}{0{,}95\times 31\,416} = 10\,\mu\text{s}$: la contrainte devient sévère quand $m \to 1$, d'où l'influence du taux de modulation constatée en TP.

EXERCICE 8 — Récepteur superhétérodyne (changement de fréquence)

★★★☆☆

Pour sélectionner une station PO avec un filtre fixe de grande qualité, un récepteur multiplie le signal d'antenne par un oscillateur local de fréquence $f_{OL} = f_p + f_I$, avec $f_I = 455\,\text{kHz}$ (fréquence intermédiaire), puis filtre autour de f_I.

Q-1) On écoute une station à $f_p = 1000\,\text{kHz}$. Quelles fréquences sortent du multiplieur ? Que sélectionne le filtre ?

Q-2) Une autre station émet à $f' = 1910\,\text{kHz}$. Montrer qu'elle est aussi transposée à f_I (« fréquence image »). Comment s'en protéger ?

Q-3) Dans quelle plage doit varier f_{OL} pour couvrir la bande $[531, 1602]$ kHz ?

Correction

Q-1) $f_{OL} = 1455\,\text{kHz}$; sorties : $f_{OL} - f_p = 455\,\text{kHz}$ et $f_{OL} + f_p = 2455\,\text{kHz}$, chacune entourée des bandes latérales du message. Le filtre à $455\,\text{kHz}$, de largeur $9\,\text{kHz}$, conserve la station voulue, transposée et toujours modulée : on la démodule ensuite.

Q-2) $|f' - f_{OL}| = 1910 - 1455 = 455\,\text{kHz}$: la station image tombe aussi dans le filtre. On place avant le multiplieur un filtre de présélection, accordé grossièrement sur f_p, qui élimine $f_p + 2f_I$.

Q-3) f_{OL} de $986\,\text{kHz}$ à $2057\,\text{kHz}$.

EXERCICE 9 — Bande latérale unique

★★☆☆☆

Q-1) On filtre le signal AM à porteuse supprimée $s = S_1\cos\Omega t\cos\omega_p t$ pour ne garder que la raie à $f_p + F$. Écrire le signal obtenu. Quelle bande occupe un message $[F_{\min}, F_{\max}]$?

Q-2) Montrer qu'une détection synchrone restitue le message.

Correction

Q-1) $s_{\text{BLU}} = \dfrac{S_1}{2}\cos\big((\omega_p+\Omega)t\big)$; bande $[f_p + F_{\min}, f_p + F_{\max}]$, de largeur $F_{\max} - F_{\min}$, deux fois plus étroite qu'en AM.

Q-2) $\cos\big((\omega_p+\Omega)t\big)\cos(\omega_p t) = \frac{1}{2}\big[\cos(\Omega t)+\cos\big((2\omega_p+\Omega)t\big)\big]$; après passe-bas, il reste $\dfrac{kA_\ell S_1}{4}\cos\Omega t$.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 10 Communications d'un véhicule : AM puis FM

★★★☆☆

Un signal modulé s'écrit $u(t) = U(1 + m\cos\omega_0 t)\cos\omega_p t$ avec $\omega_0 \ll \omega_p$. Sur l'oscillogramme, l'enveloppe varie entre $2\,\text{V}$ et $8\,\text{V}$; sur $10\,\text{ms}$, on compte 3 périodes de l'enveloppe et 25 périodes de la porteuse.

Q-1) Déterminer m, U, f_0 et f_p.

Q-2) On multiplie u par $e_p = E_p\cos\omega_p t$ ($s_m = k\,u\,e_p$). Unité de k ? Exprimer s_m et décrire son spectre.

Q-3) Quel filtrage permet ensuite de retrouver le message ? Commenter la valeur de f_p/f_0.

Q-4) Modulateur d'Armstrong. Un message $V_1 = V_{1m}\cos\omega_1 t$ est intégré : $V_{\text{int}} = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int V_1\,\mathrm{d}t$; V_{int} est multiplié par $V_2 = V_{2m}\cos\omega_2 t$; le produit est soustrait de $V_d = V_{2m}\sin\omega_2 t$. Montrer que, si $\beta = \dfrac{kV_{1m}}{RC\omega_1} \ll 1$, la sortie vaut $V_s \approx V_{2m}\sin(\omega_2 t + \beta\sin\omega_1 t)$.

Q-5) Exprimer la pulsation instantanée $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ et justifier le nom de modulation de fréquence.

Correction

Q-1) $m = \dfrac{8-2}{8+2} = 0{,}60$; $U = 5\,\text{V}$; $f_0 = 3/10\,\text{ms} = 300\,\text{Hz}$; $f_p = 25/10\,\text{ms} = 2{,}5\,\text{kHz}$.

Q-2) k en V^{-1}. $s_m = \dfrac{kUE_p}{2}\Big[1 + m\cos\omega_0 t + \cos 2\omega_p t + \dfrac{m}{2}\cos(2\omega_p - \omega_0)t + \dfrac{m}{2}\cos(2\omega_p + \omega_0)t\Big]$: raies à 0, $f_0 = 300\,\text{Hz}$, puis $4{,}7$; $5{,}0$; $5{,}3\,\text{kHz}$.

Q-3) Passe-bas avec $f_0 \ll f_c \ll 2f_p - f_0$, puis suppression du continu (passe-haut ou condensateur de liaison). Ici $2f_p - f_0 = 4{,}7\,\text{kHz}$ n'est que 16 fois f_0 : il faut un filtre d'ordre élevé ; dans un vrai système, f_p/f_0 vaut 10^3 à 10^6 et le filtrage est aisé.

Q-4) $V_{\text{int}} = -\dfrac{V_{1m}}{RC\omega_1}\sin\omega_1 t$; $V_s = V_d - kV_{\text{int}}V_2 = V_{2m}\big[\sin\omega_2 t + \beta\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t\big]$. Or, pour $\beta \ll 1$, $\sin(\omega_2 t + \beta\sin\omega_1 t) \approx \sin\omega_2 t + \beta\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t$.

Q-5) $\psi = \omega_2 t + \beta\sin\omega_1 t$: $\Omega(t) = \omega_2 + \beta\omega_1\cos\omega_1 t = \omega_2 + \dfrac{k}{RC}V_1(t)$; la fréquence instantanée varie proportionnellement au message.

EXERCICE 11 Détection synchrone d'un signal noyé dans le bruit

★★★☆☆

Une photodiode éclairée par un laser haché à $f_r = 1\,\text{kHz}$ délivre $s(t) = a\cos(\omega_r t) + b(t)$, où $a = 1\,\mu\text{V}$ et $b(t)$ est un bruit dont la densité spectrale est uniforme : sa valeur efficace dans une bande de largeur Δf vaut $\beta\sqrt{\Delta f}$, avec $\beta = 1\,\mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Q-1) Quel est le rapport signal sur bruit (en amplitude) si l'on observe s dans la bande $[0, 10\,\text{kHz}]$?

Q-2) On multiplie s par la référence $\cos(\omega_r t)$ ($k = 0{,}1\,\text{V}^{-1}$ puis gain de compensation 10), puis on filtre par un passe-bas de bande $\Delta f = 0{,}1\,\text{Hz}$. Quel signal continu obtient-on ? Quelles composantes du bruit contribuent à la sortie ?

Q-3) En déduire le nouveau rapport signal sur bruit. Conclure.

Correction

Q-1) Bruit : $\beta\sqrt{10^4} = 100\,\mu\text{V}$; signal $1\,\mu\text{V}$: rapport $0{,}01$, signal invisible.

Q-2) $a\cos^2(\omega_r t) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos(2\omega_r t)$: sortie continue $a/2 = 0{,}5\,\mu\text{V}$. Seules les composantes du bruit de fréquences comprises dans $f_r \pm \Delta f$ donnent, après multiplication, des fréquences inférieures à Δf : elles seules traversent le filtre.

Q-3) Bruit en sortie de l'ordre de $\dfrac{1}{2}\beta\sqrt{2\Delta f} \approx 0{,}2\,\mu\text{V}$; rapport ≈ 2 : un gain d'un facteur 200. Allonger le temps d'intégration (réduire Δf) améliore encore la mesure : c'est le principe de l'amplificateur à détection synchrone.